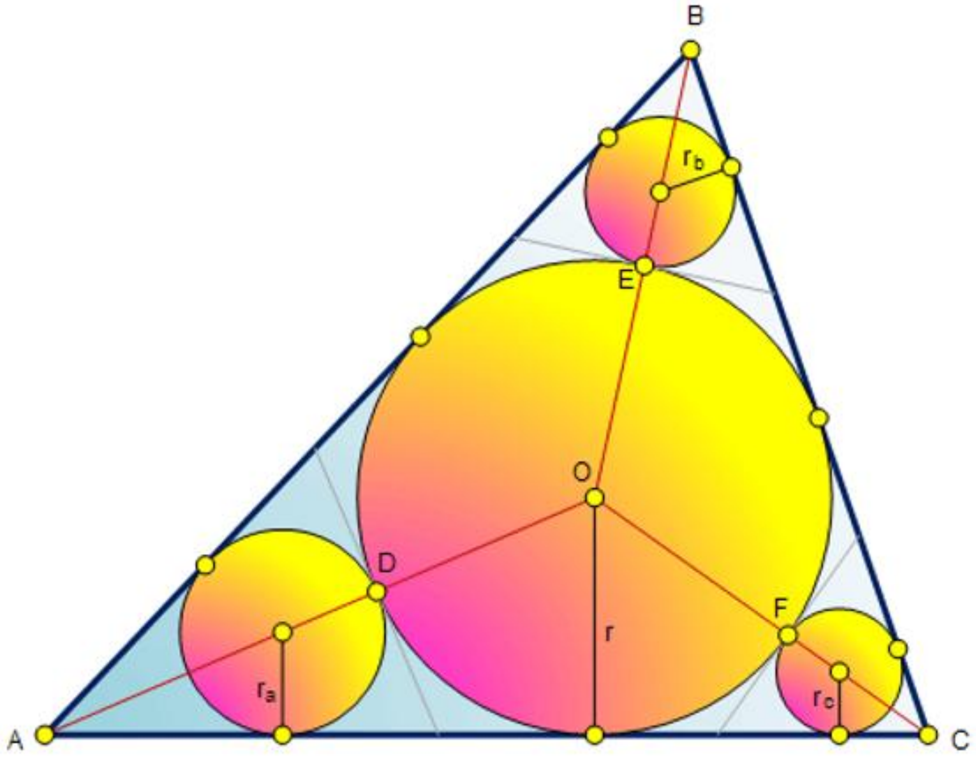
50
bijzondere
planimetrische
kwesties



$$r = \sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_a r_c}$$

Fred Muijrers

50 bijzondere planimetrische kwesties

Fred Muijrers

V2 fm_pro@duct_2025

Voorwoord

In dit pakket staan verrassende en minder bekende vraagstukken uit de vlakke meetkunde, waarvan de meeste met goede kennis van wiskunde van het vo te doen zijn.
De problemen komen van de site *gogeometry.com* en daar hoort de naam van Antonio Gutierrez bij. Hij heeft met anderen meer dan 1500 van dit type vraagstukken bij elkaar gezet. Zie hieronder.

Er zijn vijftig vraagstukken gekozen uit die hele collectie. De lezer mag zich uitgedaagd voelen de andere vraagstukken te bekijken.

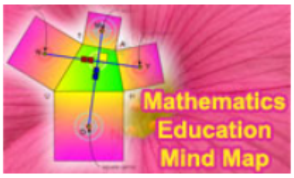
Nergens zijn coördinaten ingevoerd maar dat zou vaak zeker wel tot een oplossing geleid hebben. De vraagstukken zijn aan te pakken met trigonometrie, eigenschappen van cirkels, congruentie, etc.
Bij de figuren staat het nummer $[m]$ van het vraagstuk op de site.
Veel figuren zijn met *GeoGebra* gemaakt, maar soms zijn de plaatjes van *gogeometry* mooier en daarom hier opgenomen. In dat geval zijn hoekpunten in de wijzerrichting benoemd.

Wie de vraagstukken wil proberen: het bewijs of de oplossing staat altijd onder het nummer.
Dat deel is dus uit beeld te houden om onbevangen te kunnen beginnen …

Veel uitdaging en veel plezier.

Fred Muijrers
maart 2025

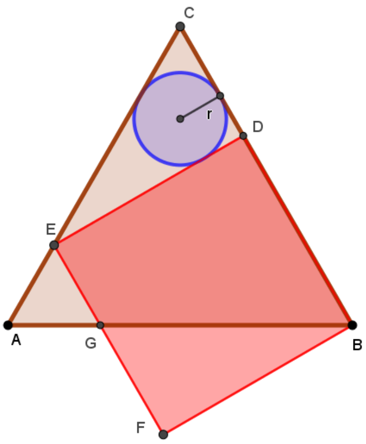
About Gogeometry.com



In his role as the founder, creator, and driving force behind it all, Antonio Gutierrez invites you to explore GoGeometry.com—a unique convergence of geometric wisdom inspired by both Greek and Inca geometers. This distinguished platform serves as a gateway to a wealth of free educational resources in geometry, harmonizing the mathematical legacies of two ancient civilizations. With an extensive collection of over 1500 illustrated problems, our website is dedicated to empowering geometry students by weaving together the profound insights of Greek and Inca geometers. Educators will find our platform essential for planning and delivering impactful lessons, complemented by additional resources thoughtfully designed to support their students' learning journey. Immerse yourself in the crossroads of mathematical heritage at GoGeometry.com!

Inhoud

P1 Cirkel en vierkant in een driehoek

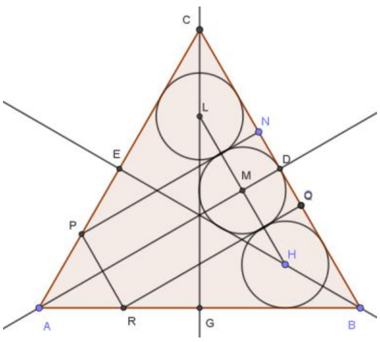


Figuur 1

[1569] aangepast.

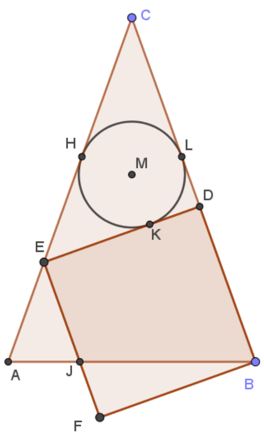
Gegeven:
Zie figuur 1.
ΔABC is gelijkzijdig.
BDEF is een vierkant.
De straal van de ingeschreven cirkel is r.

Te bewijzen:
$|EG| = 2r$.



Figuur 2

Bewijs:
Via een omgekeerde route, zie figuur 2.
Er passen drie even grote cirkels op zijde BC allemaal met een bepaalde straal r.
Met $|BC| = 1$ volgt: $r = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})$.
Dat geeft voor BN: $|BN| = 3r + r\sqrt{3} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})$.
En met $|CN| = r + r\sqrt{3} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$ volgt:
$|PN| = |CN| * \sqrt{3} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})$.
PN staat loodrecht op BN en $|BN| = |PN| = |RQ|$.
Dus: $|PR| = |NQ| = 2r$. Q.E.D.



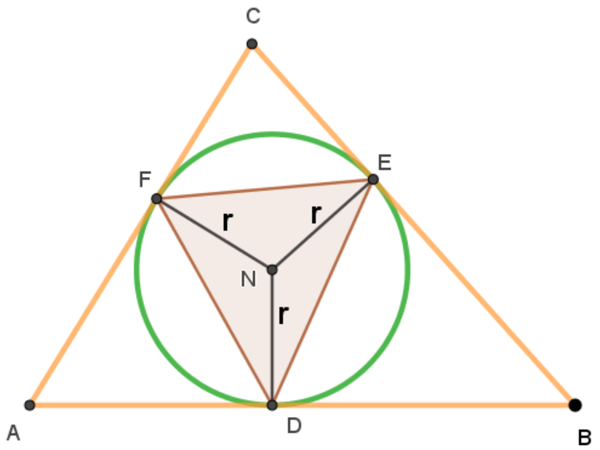
Figuur 3

Bewijs van dhr Stan Fulger:
ΔABC is gelijkbenig: $|AC| = |BC|$.
Zie verder figuur 3.
Er geldt: $|HC| = |CL|\ en\ |EH| = EK|\ en\ |DK| = |DL|$.
Raaklijnen… dus:
$|DE| + |CD| = |EK| + |KD| + |CL| + |LD| =$
$|EH| + |ML| + |CH| + |ML| = |EC| + 2|ML|$. (*)
Er volgt:
$|EC| + \ diameter\ = |DE| + |CD| = |BD| + |CD| =$
$|BC| = |AC| = |EC| + |AE|$.
Dus: $|AE| = \ diameter$.
En… $|AE| = |EJ|$ want ΔAEJ is gelijkbenig. Q.E.D.

Een gelijkzijdige driehoek is ook gelijkbenig dus…

Opmerking: (*) Dit is meer een algemene stelling:
Bij een rechthoekige driehoek met straal omgeschreven resp. ingeschreven cirkel R resp. r en rechthoekszijden a en b geldt: $2R + 2r = a + b$.

P2 Driehoek in ingeschreven cirkel



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
ΔABC met
$|AB| = 9, |BC| = 8, |AC| = 7.$
$(a, b, c) = (8,7,9).$
De ingeschreven cirkel raakt in D, E en F.

Gevraagd:
$opp(\Delta DEF) = ?$

Noem
r de straal van de ingeschreven cirkel.
R de straal van de omgeschreven cirkel.

[1546]

Oplossing:
$Opp(\Delta ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 12\sqrt{5} = r * s = r * 12.$
Gevonden met de stelling van Heron dus. Er volgt: $r = \sqrt{5}$.

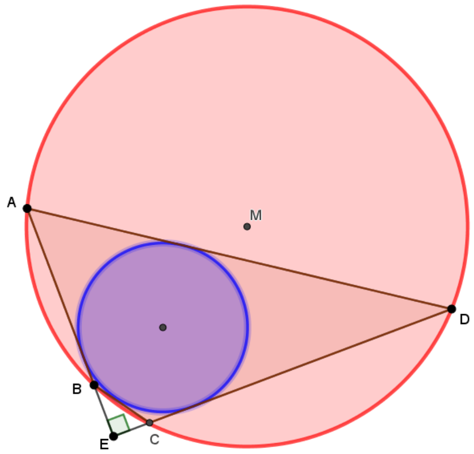
$\measuredangle DNF = 180° - \measuredangle DAF$. Soortgelijk voor de andere twee hoeken bij N.
$Opp(\Delta DEF) = \frac{1}{2}r^2 \sin(\measuredangle DNF) + \cdots = 2{,}5 * (\sin(\measuredangle A) + \sin(\measuredangle B) + \sin(\measuredangle C))$. [1]
En met de sinus-regel: $\frac{\sin(\measuredangle A)}{a} = \frac{\sin(\measuredangle B)}{b} = \frac{\sin(\measuredangle C)}{c} = \frac{1}{2R}$ volgt:
[1] = 2,5 $* \frac{a+b+c}{2R} = \frac{30}{R}$.

Er geldt ook: $opp(\Delta ABC) = \frac{1}{2}ab * \sin(\measuredangle C) = \frac{1}{2}ab * \frac{c}{2R} = \frac{a*b*c}{4R}$ Dus: $\frac{1}{R} = \frac{12\sqrt{5}}{126}$.

Conclusie: $opp(\Delta DEF) = 30 * \frac{12\sqrt{5}}{126} = \frac{20}{7}\sqrt{5} = 6{,}388\ldots.$
Klaar.

I.h.a.: $opp(\Delta DEF) = \frac{4*opp(\Delta ABC)^3}{(a+b+c)*abc} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)*Opp(\Delta ABC)}{4abc}$.
Met $(a, b, c) = (p, p, p)$ volgt: $opp(\Delta DEF) = \frac{1}{4} * opp(\Delta ABC)$.
Met $(a, b, c) = (8,7,9)$ volgt: $opp(\Delta DEF) = \frac{5}{21} * opp(\Delta ABC)$.

P3 Oppervlakte koordenvierhoek in cirkel

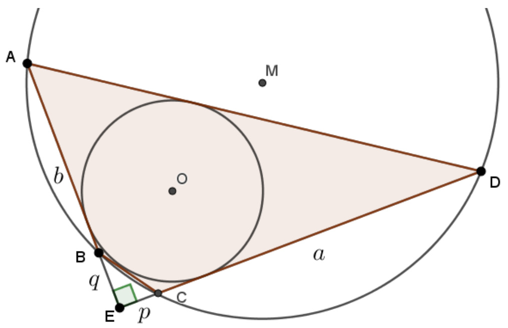


Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
Van koordenvierhoek ABCD is gegeven:
$|AD| = 26, |BC| = 4.$
ABCD heeft een ingeschreven cirkel en
$DE \perp AE.$

Gevraagd:
$opp(ABCD) = ?$

[1578]



Figuur 2

Oplossing: Zie figuur 2.
Vierhoek is een raaklijnenvierhoek.
Er volgt: $a + b = |BC| + |AD| = 30$.
Koordenvierhoek dus overstaande hoeken samen 180 gr. Gevolg: $\measuredangle ADE = \measuredangle CBE$.
Gevolg: $\frac{b+q}{26} = \frac{p}{4}$. (sinus van hoek)
Analoog: $\frac{a+p}{26} = \frac{q}{4}$.
En daarmee:
$\frac{a+b}{26} = (p+q)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{26}\right) = \frac{30}{26}$. [1]

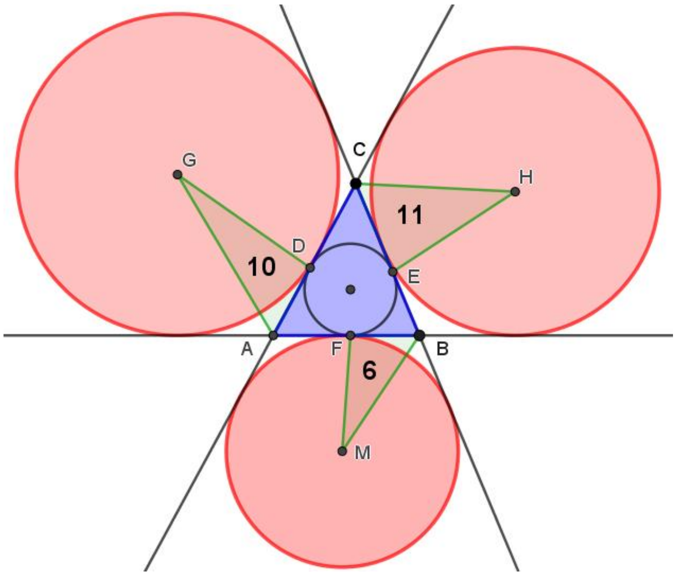
Bovendien: $p^2 + q^2 = 16$. [2]

Uitgewerkt geeft dat: $p = \frac{1}{11}(30 + 2\sqrt{17})$ en $q = \frac{1}{11}(30 - 2\sqrt{17})$. (of verwisseld).

$Opp(ABCD) = \frac{1}{2}(a+p)(b+q) - \frac{1}{2}pq = \frac{1}{2}\left(\frac{26}{4}\right)^2 pq - \frac{1}{2}pq = \frac{165}{8}pq = \frac{1560}{11} = 141{,}818 \ldots.$
Klaar.

Opm1: Omdat ΔADE gelijkvormig is met ΔCBE verhouden hun oppervlaktes zich als de kwadraten van twee overeenkomstige zijden dus als $|AD|^2 : |BC|^2 = \left(\frac{26}{4}\right)^2$.
Opm2: Eigenlijk zijn de afzonderlijke waarden van p en q niet nodig, wel hun product.
Dan volgt met [1]: $(p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = \left(\frac{60}{11}\right)^2$
En met [2]: $pq = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{60}{11}\right)^2 - 16\right) = \frac{832}{121}$.

P4 Aangeschreven cirkels en oppervlakte



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
Bij ΔABC zijn de aangeschreven cirkels gegeven en de ingeschreven cirkel. D, E en F zijn de raakpunten van de ingeschreven cirkel.
Met de gegeven oppervlaktes van driehoeken, zie figuur 1, is de vraag:

Gevraagd:
$Opp(\Delta ABC) = ?$

Noem $|AB| = c, |BC| = a, |AC| = b$.
Noem de stralen van de aangeschreven cirkels op de zijden a, b, c respectievelijk r_a, r_b, r_c.

[1545]

Oplossing:
Met $|CE| = x$ volgt: $|BF| = |BE| = a - x$ en $|AD| = |AF| = c - (a - x)$.
En dan: $|CD| = b - \big(c - (a - x)\big) = x$ dus: $x = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c$.
Dus: $opp(\Delta CEH) = \frac{1}{2}(s - c)r_a = 11$.
Analoog: $opp(\Delta BFM) = \frac{1}{2}(s - b)r_c = 6$
en $opp(ADG) = \frac{1}{2}(s - a)r_b = 10$.

Maar ook: $Opp(\Delta ABC) = \frac{1}{2}|AB| \cdot r_a + \frac{1}{2}|AC| \cdot r_a - \frac{1}{2}|BC| \cdot r_a = \frac{1}{2}(c + b - a) \cdot r_a =$
$\frac{1}{2}(a + b + c - 2a) \cdot r_a = \frac{1}{2}(2s - 2a) \cdot r_a = (s - a) \cdot r_a$.
Uiteraard ook met zijden b en c.

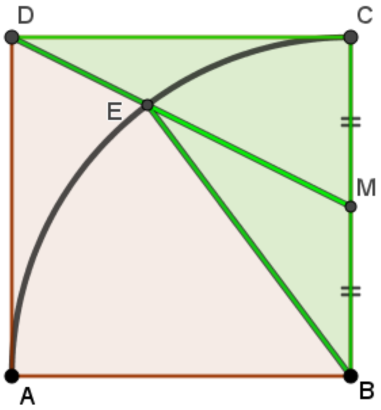
Dus:

$11 * 6 * 10 = \frac{1}{8}(s - b)(s - c)(s - a)r_a r_b r_c = \frac{1}{8} opp(\Delta ABC)^3$.

$Opp(\Delta ABC) = 2 * \sqrt[3]{11 * 6 * 10} = 17{,}413 \ldots$.

Klaar.

P5 Sector cirkel binnen vierkant



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
De zijde van het vierkant is 20.
M is het midden van BC.

Gevraagd:
$opp(ABED) = ?$

[1543]

Oplossing:
Via de oppervlakte van ΔBME.
Hoek CME $(=\theta)$ is bekend: $\sin(\theta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ en $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
En daarmee hoek BEM: $\left(\frac{\sin(\measuredangle BEM)}{|BM|}\right) = \left(\frac{\sin(\measuredangle BME)}{|BE|}\right)$.

Dus: $\sin(\measuredangle BEM) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ en $\cos(\measuredangle BEM) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Daarmee is hoek MBE ook bekend: $\measuredangle MBE = \theta - \measuredangle BEM$.

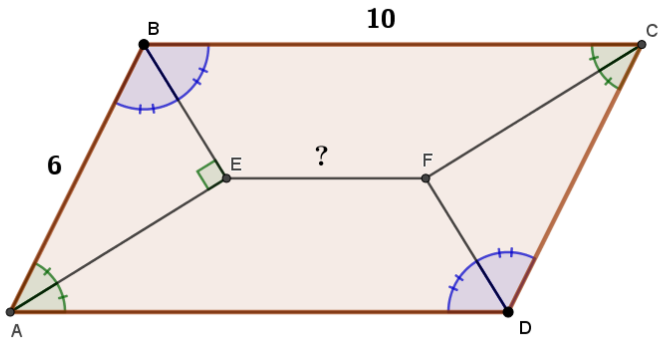
De hoogtelijn uit E heeft lengte h:
$\frac{h}{20} = \sin(\measuredangle MBE) = \sin(\theta - \measuredangle BEM) = \frac{3}{5}$.
Dus: $h = 12$.

$Opp(ABED) = 400 - \frac{1}{2} * 10 * (20 + 12) = 240$.
Klaar.

Opm1: Bij vierkant met zijde a: $opp = \frac{3}{5}a^2$.

Opm2: Als $|AB| = 1\ en\ |CM| = p$, dan volgt $Opp(ABED) = 1 - \frac{p}{2} - \frac{(1-p)}{2}\left(\frac{p^2 - p + \sqrt{2p}}{1+p^2}\right)$.
Als $p = \frac{1}{2}$ dan $opp = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$.
Als $p = 0\ resp. 1$ dan $opp = 1\ resp.\ \frac{1}{2}$.

P6 Lijnstuk binnen parallellogram

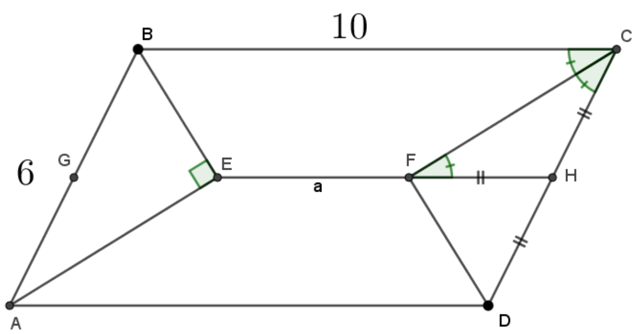


Figuur 1

Gegeven:
Figuur 1.
Vanuit de hoekpunten van het parallellogram zijn bissectrices getrokken die snijden in E en F.

Gevraagd:
$|EF| = ?$

[1524]



Figuur 2

Oplossing:
ΔBEA is rechthoekig:
De hoeken bij A en B zijn samen 180 graden en dus gehalveerd 90 graden.
Analoog voor ΔDCF.

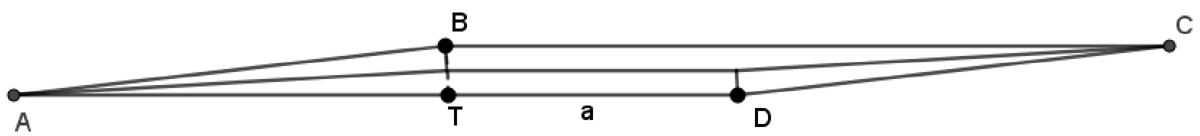
Met H middelpunt van de omgeschreven cirkel (Thales!) volgt: $|HF| = 3$.
En ook: $|EG| = 3$.

ΔCHF is gelijkbenig dus $\measuredangle HFC = \measuredangle FCB$. Gevolg: FH // BC en analoog EG // BC. (Z-hoeken)
En G is het midden van AB dus GH // BC. Gevolg: G-E-F-H is een doorlopende lijn!

Blijkbaar: $|GH| = |BC| = a + 2 * |HF|$.

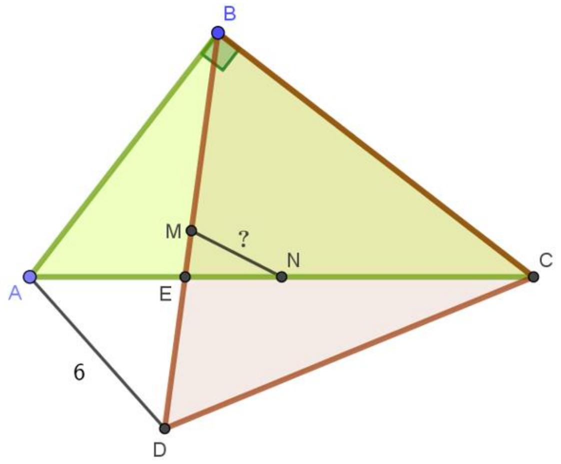
Dus: $a = 4$.
Klaar.

Opmerking: De grootte van de hoek bij A doet er niet toe, blijkt uit de vraagstelling.
Dat geeft een alternatieve redenering:
Laat de hoek bij A naar nul graden gaan, dan ontstaat figuur 3 en dus $10 = 6 + a$.



Figuur 3

P7 Lijnstuk binnen vierhoek

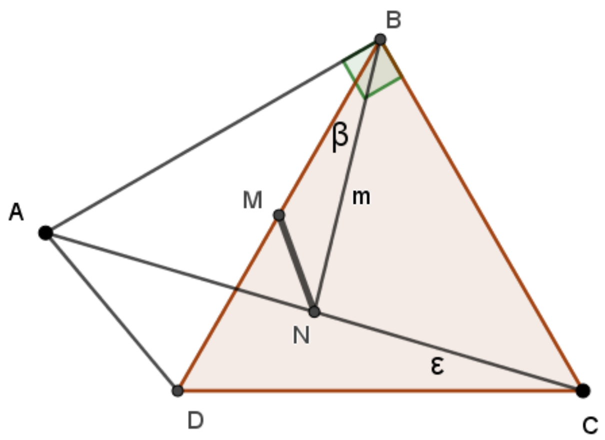


Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
Hoek te B is recht.
ΔBCD is gelijkzijdig.
M resp. N is midden van BD resp. AC.
$|AD| = 6$.

Gevraagd:
$|MN| = ?$

[1524]



Figuur 2

Oplossing:
ΔABC is rechthoekig dus N is het middelpunt van de omgeschreven cirkel (Thales!), met straal $m = \frac{1}{2}|AC|$. [1]

Ook geldt: $\measuredangle NBC = \measuredangle NCB$
Dus: $\beta = 60° - \measuredangle NBC = 60° - \measuredangle NCB = \varepsilon$. [2]

$|BM| = \frac{1}{2}|BD| = |CD|$. (gegeven) [3]

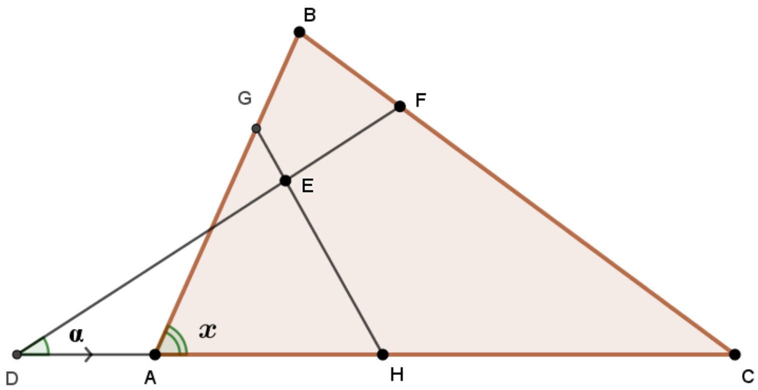
Uit [1], {2] en [3] volgt:
ΔACD is gelijkvormig met ΔNBM (zhz).

Dus: $\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|MN|}{|BM|}$.
Gevolg: $|MN| = \frac{|BM|}{|CD|} * |AD| = \frac{1}{2}|AD|$.

Dus: $|MN| = 3$.

Klaar.

P8 Hoekbepaling in driehoek



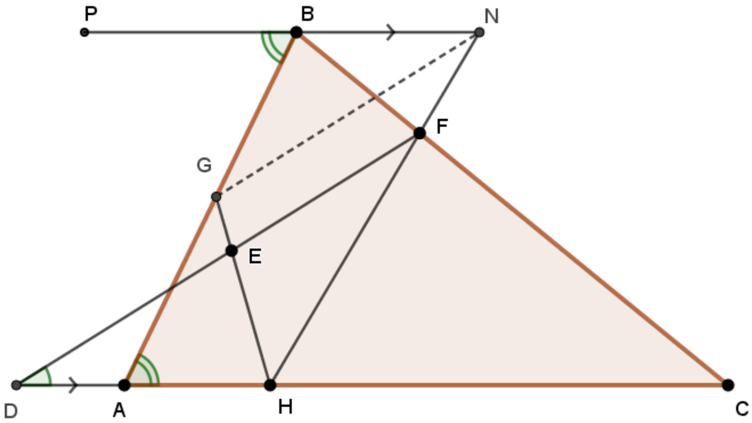
Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.

$$\frac{|CH|}{|BG|} = \frac{|EH|}{|EG|} = \frac{|CF|}{|BF|}$$

Te bewijzen:
$x = 2\alpha.$

[1497]



Figuur 2

HINT:
Trek door B een lijn evenwijdig aan AC. Verlengde van HF snijdt die lijn in punt N.

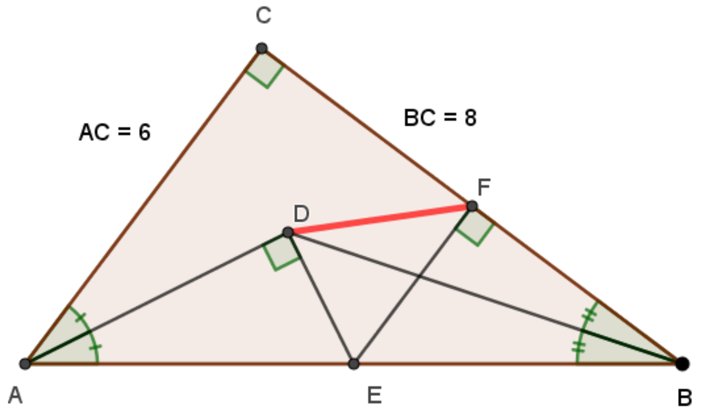
Bewijs:
Zie figuur 2.

ΔCFH is gelijkvormig met ΔBFN. Dus $\frac{|CF|}{|BF|} = \frac{|CH|}{|BN|}$, is ook gelijk aan $\frac{|CH|}{|BG|}$ (gegeven).
Blijkbaar geldt: $|BG| = |BN|$. Dus: $\measuredangle BNG = \measuredangle BGN.$
En uit de gelijkvormigheid volgt ook nog: $\frac{|CF|}{|BF|} = \frac{|HF|}{|FN|}$, is ook gelijk aan $\frac{|HE|}{|EG|}$ (gegeven).
Dus de lijn door E en F is evenwijdig aan GN.
Gevolg: $\measuredangle ADF = \measuredangle NGB.$

Omdat AC // BP geldt: $\measuredangle CAB = \measuredangle ABP = \measuredangle BNG + \measuredangle BGN = 2 * \measuredangle BGN = 2 * \measuredangle ADF.$
$\angle ABP$ is een buitenhoek van de driehoek.
Q.E.D.

Opmerking: De feitelijke verhoudingswaarde en de ligging van punt H op AC zijn niet relevant.
Een beetje gekunstelde vraag en zonder de hint vrijwel niet te doen.

P9 Lijnstuk binnen driehoek

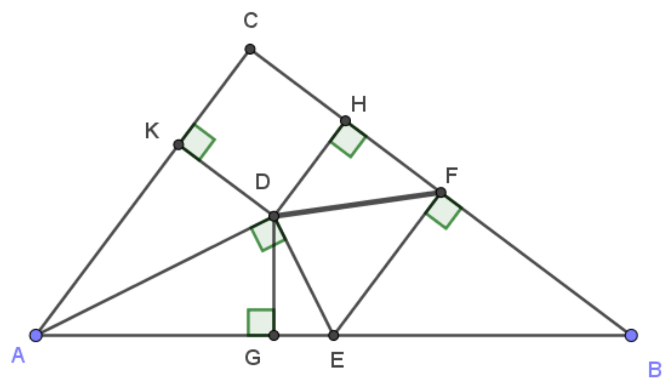


Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.

Gevraagd:
$|DF| = ?$

[1489]



Figuur 2

Oplossing:
Zie figuur 2.
D is mp van de ingeschreven cirkel met straal $r = |DG| = |DH| = |DK|$.

$|AB| = 10$. (Pythagoras)

$Opp(\Delta ABC) = r * s =$
$r * 12 = \frac{1}{2} * 8 * 6$.
Dus: $r = 2$.

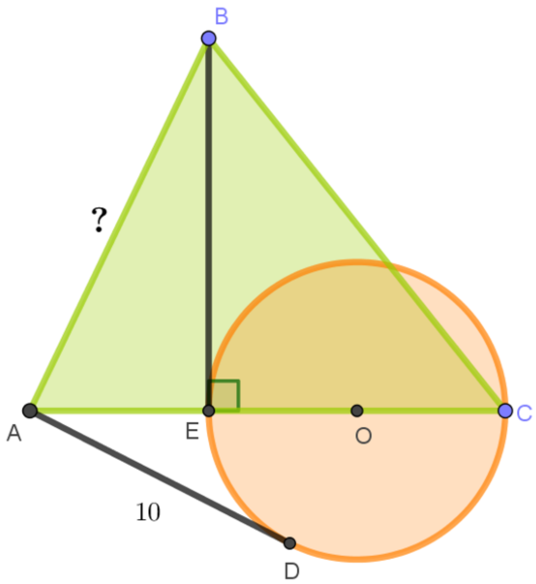
Vervolg:
$|CK| = |DK| = 2$ dus $|AK| = 4$. En dan ook $|AG| = 4$.
Gevolg: $\frac{|EG|}{|DG|} = \frac{|DG|}{|AG|}$ dus: $|EG| = 1$.
En dus: $|AE| = |AG| + |GE| = 5$. Blijkbaar is E midden van AB.

$EF \perp BC$ dus EF // AC. Gevolg: F is midden van BC. Dus: $|HF| = \frac{1}{2}|BC| - |CH| = 2$ (= $|DH|$).
Blijkbaar is ΔDHF rechthoekig gelijkbenig dus $|DF| = 2\sqrt{2}$.

Alternatief:
$\measuredangle AED = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. $\measuredangle FEB = \alpha$. Gevolg: $\measuredangle DEF = 90° - \frac{1}{2}\alpha$.
Blijkbaar is ED een bissectrice van $\angle AEF$. Dus: $|DG| = d(D, EF) = |HF|$.
Er volgt $|HF| = r$ en ΔDHF is bijgevolg gelijkbenig en rechthoekig dus: $|DF| = r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Opmerking: Beginnen met een Pythagoreïsch drietal geeft altijd r geheel.

P10 Zijde van driehoek



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
$|AC| = |BC|$.
AD raakt aan de cirkel te D.
$|AD| = 10$.

Gevraagd:
$|AB| = ?$

[1539]

Oplossing:
$|OD| = r, |AC| = |BC| = a, \ |AB| = x$.

Er volgt:
$|BE|^2 = x^2 - (a - 2r)^2 = a^2 - (2r)^2$. (2x Pythagoras)

Dus: $x^2 = 2a^2 - 4ar$.

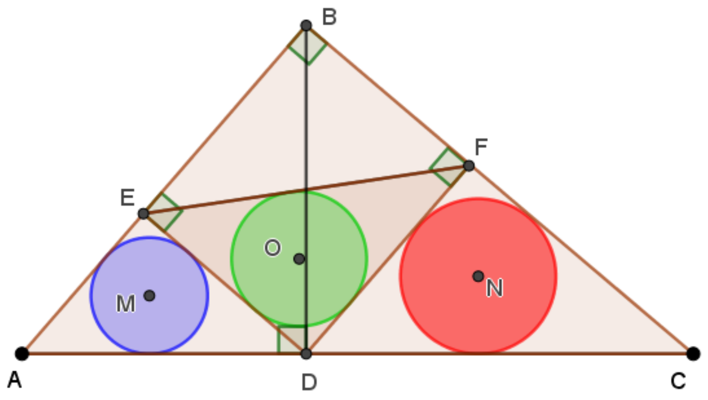
Met de macht van A t.o.v. de cirkel volgt:
$|AE| * |AC| = |AD|^2$ dus: $(a - 2r) * a = 100$.
Ofwel: $a^2 - 2ar = 100$.

Gevolg: $x^2 = 200$ en $x = 10\sqrt{2}$.

Klaar.

Opmerking: De waarden van a en r doen er niet toe, blijkt uit de vraagstelling.
Dat geeft een alternatieve redenering:
Neem $r = 0$, een puntcirkel te C. Dan vallen D en E op C en geldt: $|AC| = |AD|$.
$BE \perp AC$ en nu dus: $BC \perp AC$ en die zijden zijn gelijk in grootte.
Gevolg: ΔABC is gelijkbenig rechthoekig dus $|AB| = |AC|\sqrt{2} = |AD|\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

P11 Straal van cirkel



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
Rechthoekige driehoeken en 3 ingeschreven cirkels.
Straal cirkel met mp M is 3.
Straal cirkel met mp N is 4.
Straal cirkel met mp O is x.

Gevraagd:
$x = ?$

[1484]

Oplossing:

ΔADE is gelijkvormig met ΔDCF, waar uit volgt: $\frac{|DF|}{|AE|} = \frac{4}{3}$.

$\frac{4}{3}$ is de vermenigvuldigingsfactor tussen de twee driehoeken.

Dus: $|AE| = \frac{3}{4}|DF|$.

ΔADE is ook gelijkvormig met ΔEFD, waar uit volgt: $\frac{|DF|}{|ED|} = \frac{x}{3}$ en ook $\frac{|ED|}{|AE|} = \frac{x}{3}$.

Dus: $|DF| = \frac{x}{3}|ED| = \frac{x}{3}(\frac{x}{3}\ |AE|) = \frac{x^2}{3^2}(\frac{3}{4}|DF|)$.

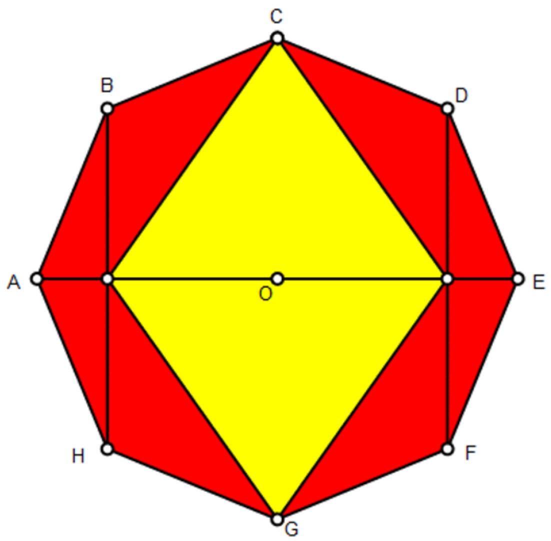
Gevolg: $x^2 = 12$.

$x = \sqrt{12}$.

Klaar.

Opmerking: In het algemeen met de stralen a en b: $x = \sqrt{a * b}$.

P12 Gelijke stukken in achthoek

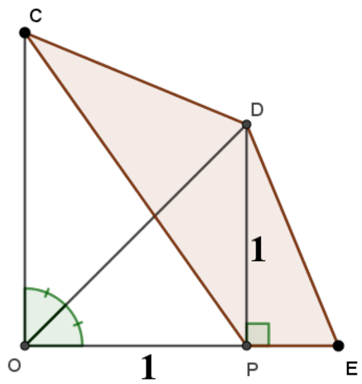


Figuur 1 (van site)

Gegeven:
Zie figuur 1.
Een regelmatige achthoek ABCDEFGH.

Te bewijzen:
De oppervlakte van de ruit is de helft van de oppervlakte van de achthoek.
(geel is even groot in oppervlakte als rood: het figuur is van de site *gogeometry.com*).

[1430]

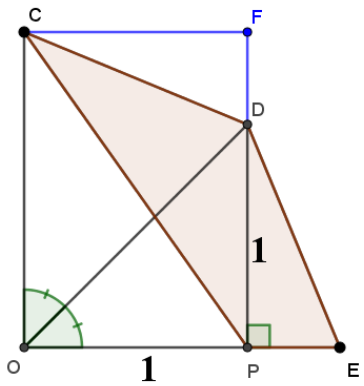


Figuur 2

Bewijs 1:
Met berekening. Zie figuur 2: een kwart van de achthoek.
Met $|OP| = 1$ volgt: $|OD| = |OC| = |OE| = \sqrt{2}$.

$Opp(OEDC) = 2 * \frac{1}{2}|OD|^2 \sin(45°) = \sqrt{2}$.
$Opp(\Delta OPC) = \frac{1}{2} * |OP| * |OC| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

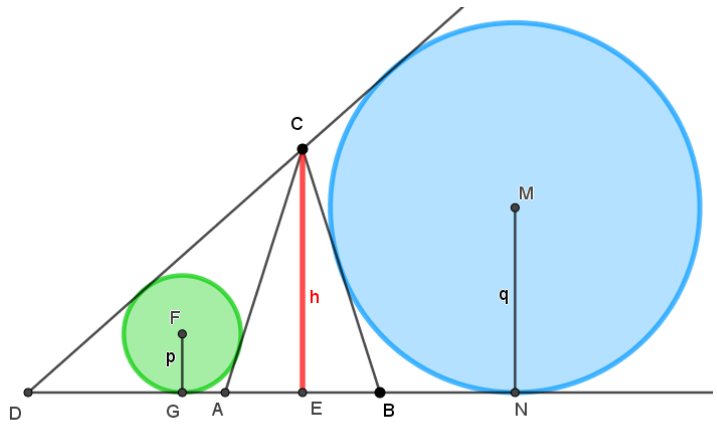
Dus $opp(\Delta OPC) = \frac{1}{2}\, opp(OEDC)$.
En wat voor een kwart geldt, geldt voor het geheel.
Q.E.D.



Figuur 3

Bewijs 2:
Met congruentie. Zie figuur 3.
$|DF| = |PF| - |PD| = |OE| - |OP| = |PE|$.
$|CF| = |OP| = |DP|$.
$\measuredangle DFC = \measuredangle DPE = 90°$.
Dus: $\Delta DPE \cong \Delta CFD$.
En: $opp(PEDC) = opp(\Delta PFC) = opp(\Delta COP)$.
En wat voor een kwart geldt, geldt voor het geheel.
Q.E.D.

P13 Driehoek tussen twee cirkels

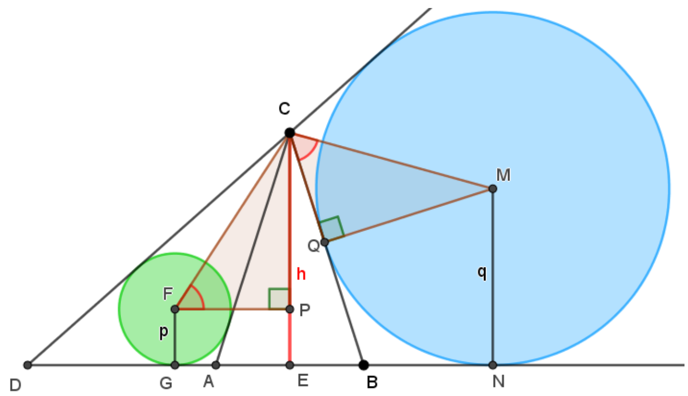


Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
ΔABC is gelijkbenig: $|AC| = |BC|$.
De hoogtelijn heeft lengte h.
De getekende ingeschreven cirkel heeft straal p.
De aangeschreven cirkel heeft straal q.

Te bewijzen:
$h = p + q$.

[1373]



Figuur 2

Bewijs:
Zie figuur 2.
Bewering: $\Delta FPC \cong \Delta CQM$.

Rechte hoek te Q en P. [1]

$\measuredangle QCM = 90° - \frac{1}{2}\measuredangle BCD$.
$\measuredangle PFC = 90° - \measuredangle PCF =$
$90° - \frac{1}{2}\measuredangle BCD$.
Dus: $\measuredangle QCM = \measuredangle PFC$. [2]

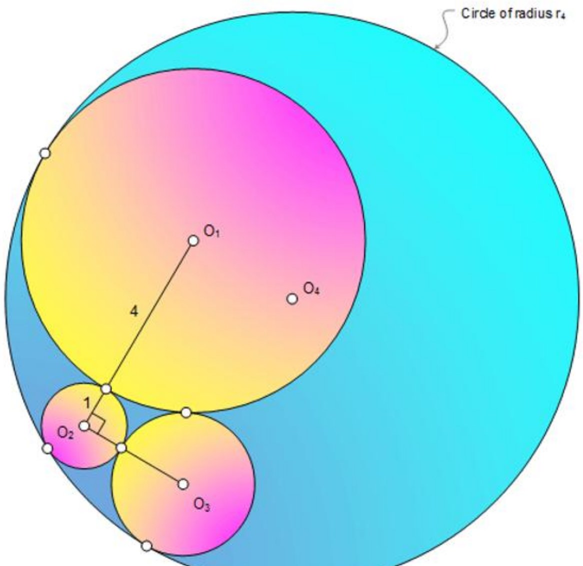
Vervolg:
Met CQ raaklijn aan cirkel mp M volgt:
$|CQ| + |CD| = |AD| + |AB| + |BN| = |AD| + |AB| + |BC| - |CQ|$. Raaklijnen uit D gelijk.
Dus: $|CQ| = \frac{1}{2}(|AD| + |AB| + |BC| - |CD|)$.

Analoog: $|AG| = |AC| - (|CD| - (|AD| - |AG|)$. Raaklijnen uit A aan kleine cirkel.
Dus: $|AG| = \frac{1}{2}(|AC| - |CD| + |AD|)$ en dan: $|EG| = \frac{1}{2}|AB| + |AG|$.
Gevolg: $|FP| = |EG| = \frac{1}{2}(|AB| + |AC| + |AD| - |CD|)$.
Met $|AC| = |BC|$ volgt: $|FP| = |CQ|$. [3]

Uit [1], [2] en [3] volgt: $\Delta FPC \cong \Delta CQM$ (HZH).
Dus: $h = |CP| + |PE| = |MQ| + |FG| = q + p$.
Q.E.D.

Opmerking: De hoeken van ΔABC zijn niet relevant. Neem nu $\measuredangle ACB = 0°$.
Dan volgt: $A = B\ dus\ |AB| = 0$.
Nu is alleen [3] voldoende: $|FP| = |CQ|$ etc.

P14 Vier raakcirkels ineen



Figuur 1 (van site)

[1157]

Gegeven:
Zie figuur 1.
Vier cirkels die elkaar allemaal raken.
Cirkel (O_1,4), cirkel (O_2,1), cirkel (O_3,r_3).
Cirkel (O_4,r_4) raakt de andere drie uitwendig.

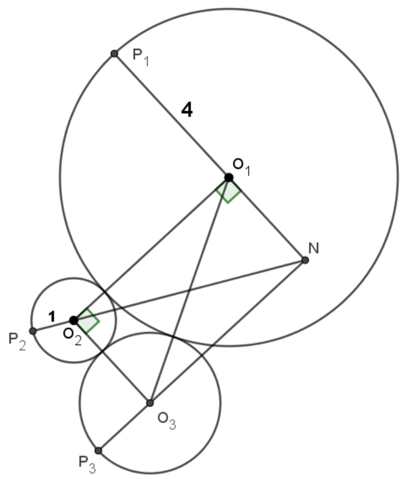
Hoek $O_1O_2O_3$ is recht.

Gevraagd:
$r_4 = ?$

Oplossing:
De straal van de derde cirkel is eenvoudig. $\Delta O_1O_2O_3$ is rechthoekig en met Pythagoras:
$(4 + r_3)^2 = 5^2 + (1 + r_3)^2$. Dus: $r_3 = \frac{5}{3}$. En dus: $|O_2O_3| = r_2 + r_3 = 2\frac{2}{3}$.

Maak rechthoek $O_1O_2O_3N$.
Zie figuur 2.
Verleng NO_1 en dat geeft P_1..
Cirkel $(N, |NP_1|)$ raakt te P_1. $|NP_1| = 6\frac{2}{3}$.
Verleng NO_2 en dat geeft P_2..
$|NO_2| = |O_2O_3| = 5\frac{2}{3}$.
Cirkel $(N, |NP_2|)$ raakt te P_2. $|NP_2| = 6\frac{2}{3}$.
Verleng NO_3 en dat geeft P_3..
Cirkel $(N, |NP_3|)$ raakt te P_3. $|NP_3| = 6\frac{2}{3}$.

Deze drie raakcirkels vallen blijkbaar samen en raken de drie gegeven cirkels.

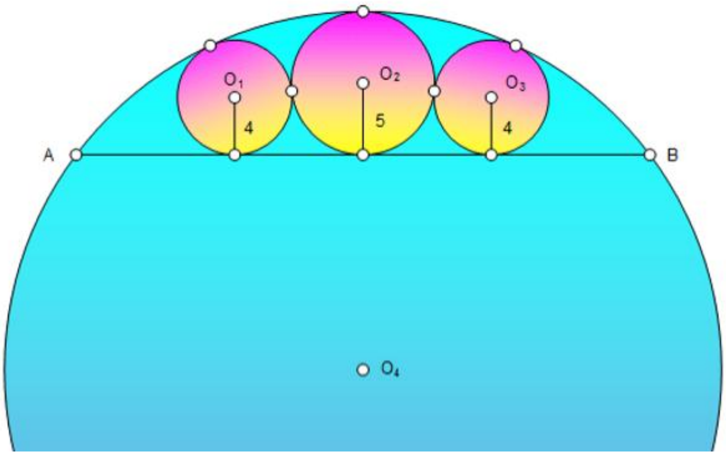


Figuur 2

Dus er geldt $N = O_4$ en $r_4 = 6\frac{2}{3}$, want de vierde raakcirkel is uniek.
Klaar.

Opmerking: Met de stelling van Descartes over vier onderling rakende cirkels en hun krommingen k_i:
$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$.
Dat geeft: $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{3}{5} + \frac{1}{r_4}\right)^2 = 2 * (\frac{1}{16} + 1 + \frac{9}{25} + \frac{1}{r_4}^2)$ en $r_4 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$.

P15 Drie raakcirkels aan koorde

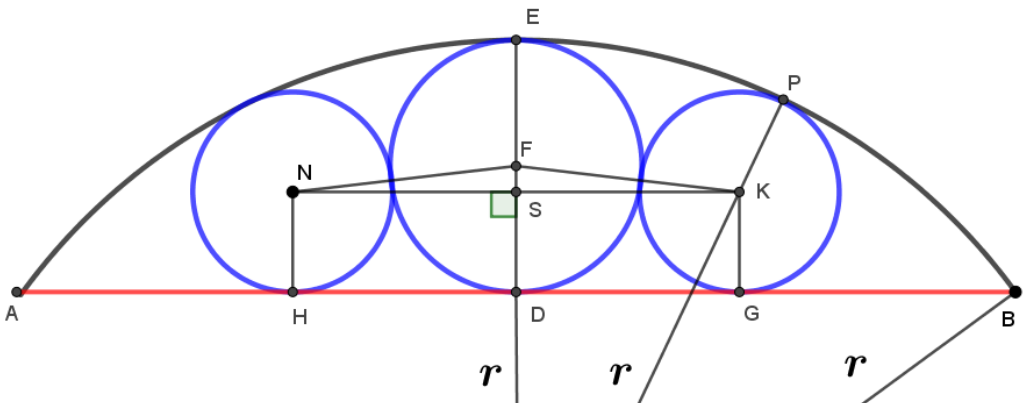


Figuur 1 (van site)

Gegeven:
zie figuur 1.
Drie raakcirkels die raken aan een koorde van een vierde cirkel.

Gevraagd:
$|AB| = ?$

[1158]

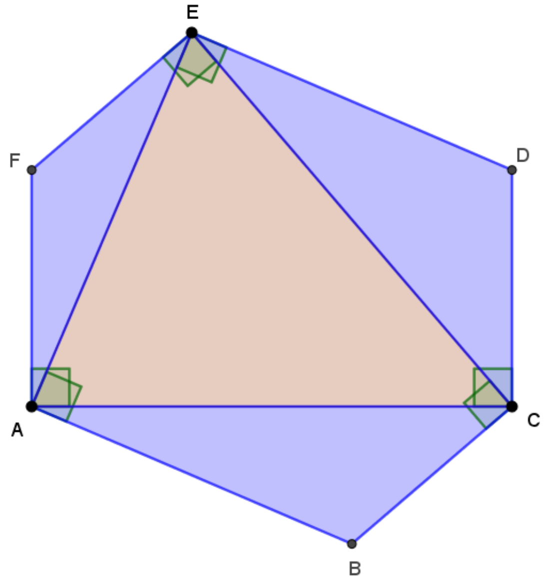


Figuur 2

Oplossing:
Zie figuur 2.
$|FS| = 1; |ES| = 6; |FK| = 9; |SK| = \sqrt{80}$.
Gevolg: $(r-6)^2 + 80 = (r-4)^2$.
Dus: $r = 25$.

En dan: $|BD|^2 + (r-10)^2 = r^2$.
Dus: $|BD| = 20$ en $|AB| = 40$.
Klaar.

P16 Oppervlakte in hexagon



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
Achthoek ABCDEF heeft oppervlakte S.
$Opp(\Delta ACE) = O$.
Bij A: $BA \perp AE, FA \perp AC$.
Bij C: $DC \perp CA, BC \perp CE$.
Bij E: $FE \perp CE, DE \perp EA$.

Te bewijzen:
$S = 2 * O$.

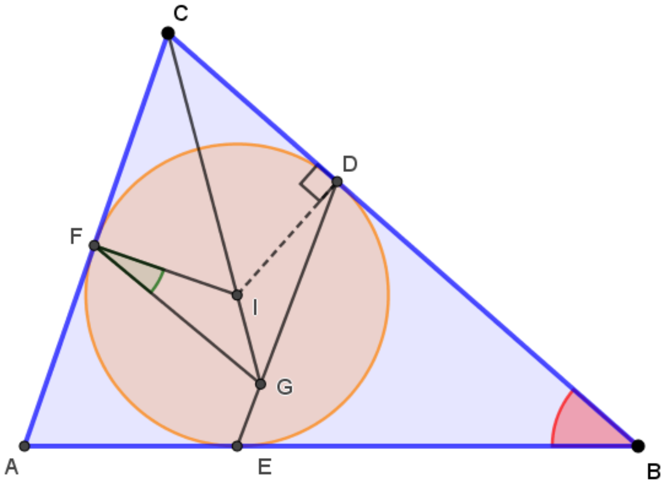
[1123]

Bewijs:

Noem H het hoogtepunt van de driehoek ACE.
Dan volgt:
$CH \perp AE \text{ en } EH \perp AC$.
Dus CH // DE en EH // CD.
Vierhoek HEDC is dan een parallellogram en CE is daarvan een diagonaal.
Gevolg: $opp(\Delta CHE) = opp(EDC)$.
Analoog vanuit punt B en punt F bezien.

Conclusie: $opp(\Delta ACE) = opp(\Delta EDC) + opp(\Delta ABC) + opp(\Delta AEF)$.
Samen vormt dit oppervlakte van de achthoek dus inderdaad:
$S = 2 * O$.
Q.E.D.

P17 Hoek in ingeschreven cirkel



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
D, E en F zijn de raakpunten van de ingeschreven cirkel met ΔABC.

Te bewijzen:
$\measuredangle ABC = 2 * \measuredangle IFG.$

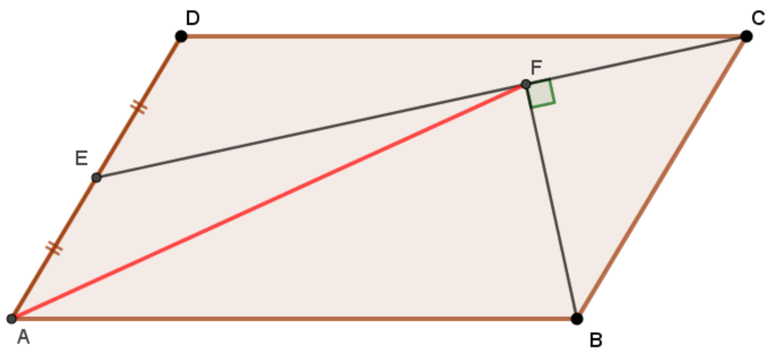
[1060]

Bewijs:
$\measuredangle GDI = 90° - \measuredangle EDB = 90° - \frac{1}{2}(180° - \measuredangle ABC) = \frac{1}{2}\measuredangle ABC.$ [1]

Verder geldt: $\Delta CFG \cong \Delta CDG.$ (ZHZ)
CG is een bissectrice en de raaklijnstukken uit C zijn even lang.

Dus: $\measuredangle IFG + \measuredangle CFI = \measuredangle IDG + \measuredangle CDI.$
Dus met [1]: $\measuredangle IFG = \measuredangle IDG = \frac{1}{2}\measuredangle ABC.$
Q.E.D.

P18 Lijnstuk binnen parallellogram



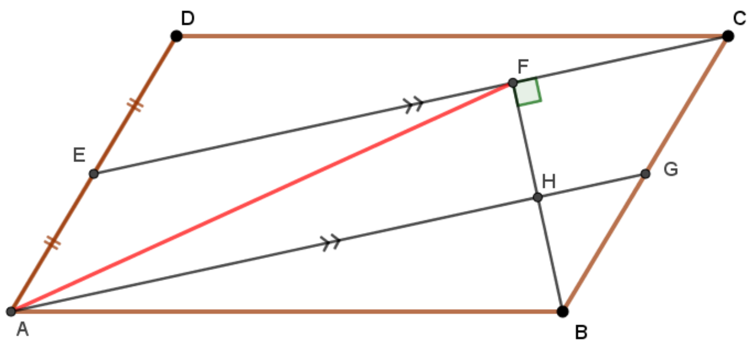
Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
Parallellogram ABCD.
E midden van AD.
BF loodrecht op EC.

Te bewijzen:
$|AF| = |AB|$.

[762]

Bewijs:



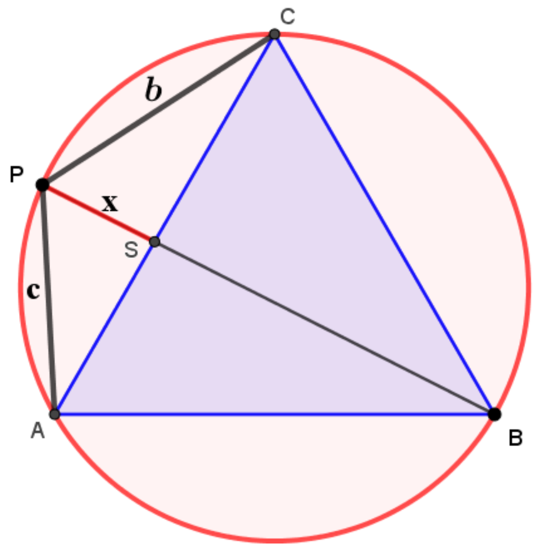
Figuur 2

Zie figuur 2. G is het midden van BC.
Dan volgt: AG // EC.

En dan ook: H midden van BF.
AH staat dus ook loodrecht op BF.
Gevolg: $\Delta AHB \cong \Delta AHF$. (ZHZ)

Dus $|AB| = |AF|$.
Q.E.D.

P19 Koordenvierhoek en gelijkzijdige driehoek



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
Koordenvierhoek ABCD.
ΔABC is gelijkzijdig.

Te bewijzen:
$\frac{1}{x} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

[757]

Bewijs:
$\measuredangle PCA = \measuredangle PBA$, want dat zijn omtrekshoeken op dezelfde boog AP.
$\measuredangle CPS = \measuredangle BPA = 60°$, want de bogen AB en BC zijn gelijk.

Dus: ΔCPS is gelijkvormig met ΔBPA. (hh)

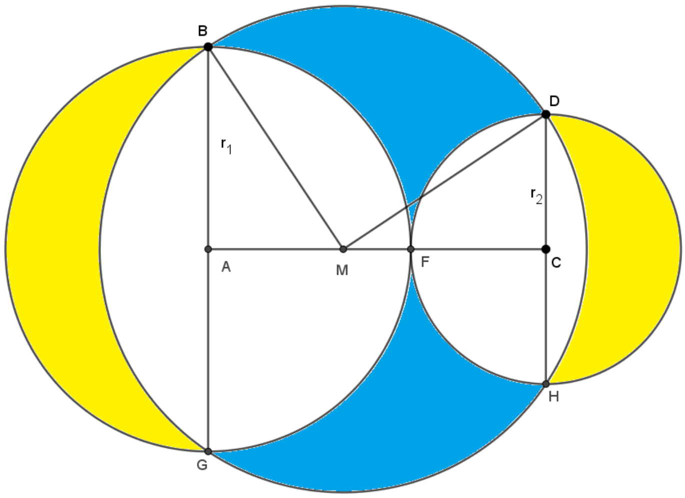
Gevolg (noem $|BS| = p$): $\frac{b}{x} = \frac{x+p}{c}$. [1]

In een koordenvierhoek volgt met de stelling van Ptolemeus:
$|AC| * |BP| = |AB| * |PC| + |BC| * |PA|$.
$|AC| = |AB| = |BC|$.
Dus: $p + x = b + c$.

Dit ingevuld in [1] geeft: $\frac{b}{x} = \frac{b+c}{c}$ ofwel: $\frac{1}{x} = \frac{b+c}{bc} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
Q.E.D.

Opmerking: $\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ heet het harmonisch gemiddelde (hm) van $b\ en\ c$. Dus: $x = \frac{1}{2}hm(b, c)$.

P20 Cirkel met twee rakende cirkels



Figuur 1

[708]

Gegeven:
Zie figuur 1.
Cirkel met mp C raakt de cirkel met mp A in F.
$AF \perp BG$ en $FC \perp DH$.

Te bewijzen:
De oppervlakte van de twee (gele) maantjes samen is de oppervlakte van het donkere (blauwe) gebied.

Bewijs:
M is het midden van de cirkel door B, G, H en D en die heeft straal R: $|MD| = |MB| = R$.
De oppervlakte van het linker maantje is O_1.
De oppervlakte van het rechter maantje is O_2.
De oppervlakte van het donkere gebied is S.

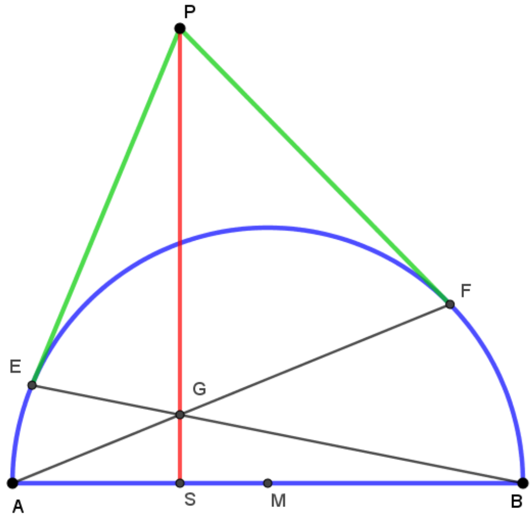
Er geldt: $S = \pi R^2 - (\pi r_1^2 - O_1) - (\pi r_2^2 - O_2) = O_1 + O_2 + \pi(R^2 - r_1^2 - r_2^2)$. [1]

Noem $|AM| = x$ dan volgt: $x^2 + r_1^2 = (r_1 + r_2 - x)^2 + r_2^2$. (2x Pythagoras)
Dat geeft: $2x(r_1 + r_2) = 2r_2(r_1 + r_2)$
En dus: $x = r_2$ en er volgt:
$R^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Conclusie bij [1]: $S = O_1 + O_2$.
Q.E.D.

Opmerking: Er geldt dus ook $\Delta BAM \cong \Delta MCD$ en $BM \perp DM$.

P21 Raaklijnen en koorden

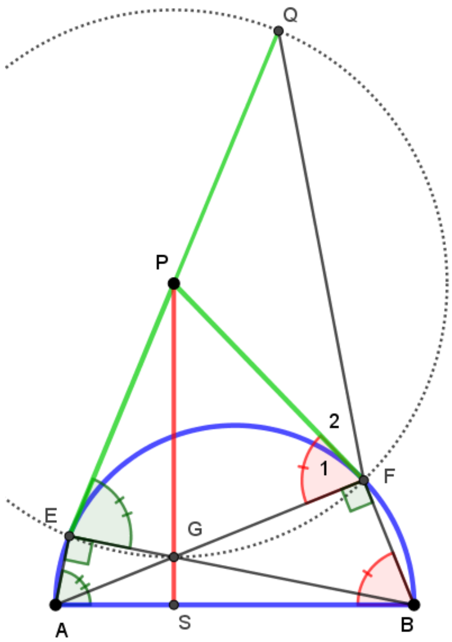


Figuur 1

[652]

Gegeven:
Zie figuur 1.
PE en PF zijn raaklijnen aan de (half)cirkel.
AF en BE snijden elkaar in G.
PG snijdt de diameter AB in S.

Te bewijzen:
$PS \perp AB.$



Figuur 2

Bewijs:
Zie figuur 2.
Te E en F zitten rechte hoeken (Thales).
$\measuredangle EAB + \measuredangle EBA = 90°$. En dan volgt:
$\measuredangle EAB + (\measuredangle EBA + \measuredangle EBF) = 90° + \measuredangle EBF.$
Kijk naar omtrekshoeken op boog EF en er volgt:
$\measuredangle PEB + \measuredangle PFA = 90° + \measuredangle EBF.$
De laatste som geeft een buitenhoek van ΔBFG dus:
$\measuredangle PEG + \measuredangle PFG = \measuredangle EGF.$ [1]

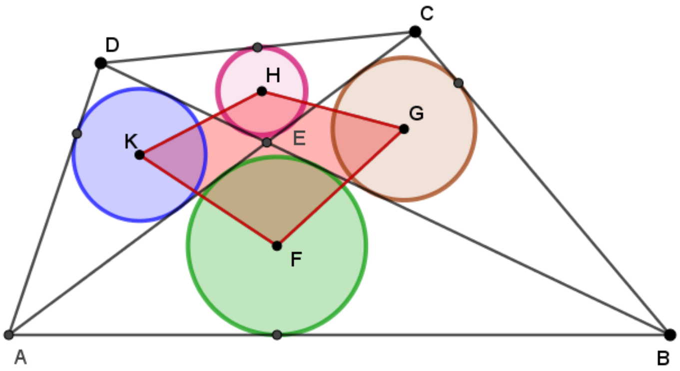
Bewering: $|PE| = |PF| = |PG|$.

Q ligt op het verlengde van EP en $|PQ| = |PE| = |PF|$.
Dan volgt, kijkend naar vierhoek EGFQ en met [1]:
$\measuredangle E + \measuredangle F_1 + \measuredangle F_2 = \measuredangle G + \measuredangle F_2 = \measuredangle G + \measuredangle Q.$
In deze vierhoek zijn de paren overstaande hoeken dus elk 180°. De vierhoek is een koordenvierhoek!
De cirkel heeft mp P en straal $|PE|$ en gaat door G.
Dus inderdaad: $|PE| = |PF| = |PG|$.

Vervolg:
$\measuredangle AGS = (*) \measuredangle FGP = (**) \measuredangle F_1 = (***) \measuredangle ABF = 90° - \measuredangle BAF = 90° - \measuredangle SAG.$
(*) overstaande hoeken; (**) ΔPGF is gelijkbenig; (***) op zelfde boog AF.
Blijkbaar geldt: $\measuredangle ASG = 90°$.
Q.E.D.

Opmerking: Dit is een stelling van Archimedes, 3e eeuw BC; propositie 12 uit zijn boek met lemma's.

P22 Raakcirkels binnen vierhoek



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
De cirkels zijn ingeschreven cirkels van de driehoeken.
F, G, H en K zijn middelpunten daarvan.

Te bewijzen:
$|FG|^2 + |HK|^2 = |FK|^2 + |GH|^2$.

[582]

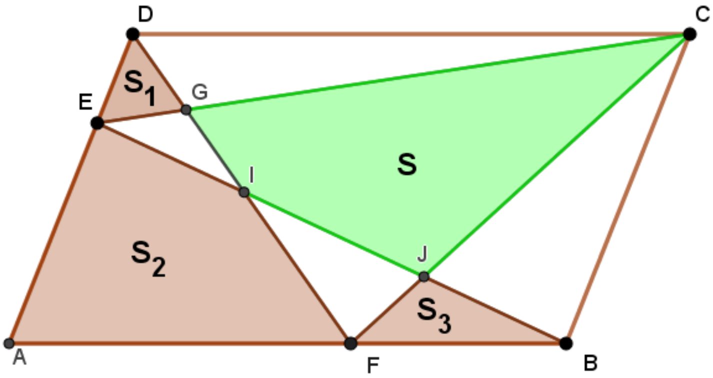
Bewijs:
Kijk naar ΔABE en ΔACE.
F op een binnenbissectrice van hoek AEB en G op een buitenbissectrice.
Dus: $EF \perp EG$.
Gevolg:$|FG|^2 = |EF|^2 + |EG|^2$.

Analoog: $|HK|^2 = |EK|^2 + |EH|^2$.
Dus: $|FG|^2 + |HK|^2 = |EF|^2 + |EG|^2 + |EK|^2 + |EH|^2$.

En dat geldt ook voor $|FK|^2 + |GH|^2$.

Q.E.D.

P23 Oppervlakten binnen parallellogram

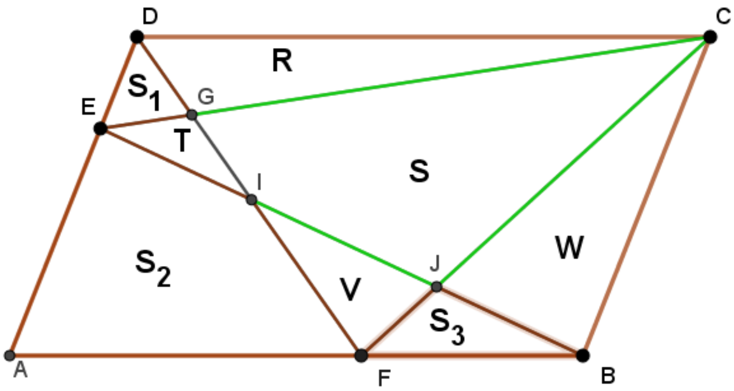


Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
ABCD is een parallellogram.
De letters in de veelhoeken stellen oppervlaktes voor.

Te bewijzen:
$S = S_1 + S_2 + S_3$.

[477]



Figuur 2

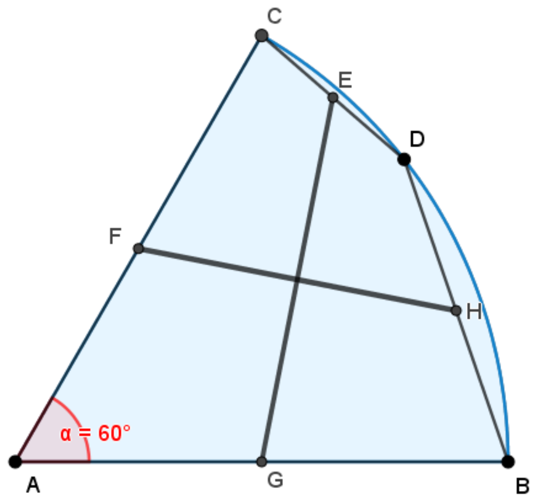
Bewijs:
Zie figuur 2.
$R + S_1 + S_2 + V + S_3 = T + S + W$. [1]
Driehoeken in parallellogram met gelijke bases en hoogte.

$S_1 + T + S_2 + S_3 + W = R + S + V$. [2]

Tel [1] en [2] bij elkaar op:
$R + S_1 + S_2 + V + S_3 + S_1 + T + S_2 + S_3 + W = T + S + W + R + S + V$.

En er volgt: $2(S_1 + S_2 + S_3) = 2S$.
Q.E.D.

P24 Middens van koorden en stralen

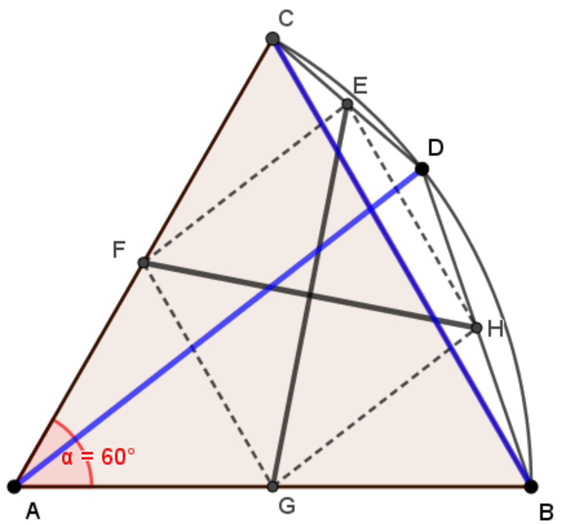


Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
D is willekeurig gekozen op boog BC.
E, F, G en H zijn middens van lijnstukken.

Te bewijzen:
$EG \perp HF$.

[365]



Figuur 2

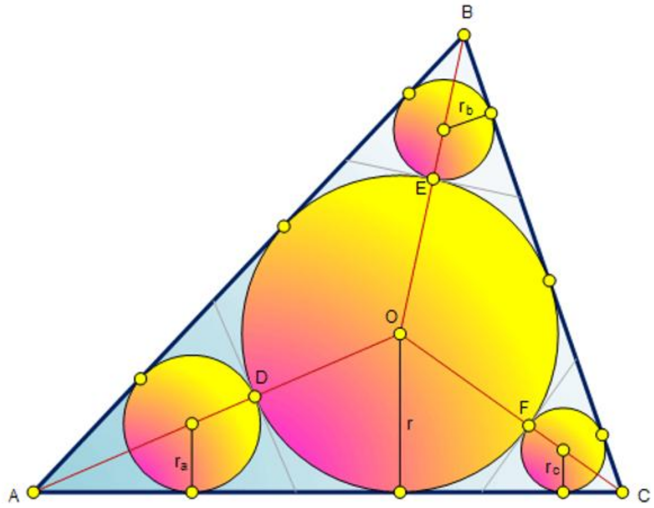
Bewijs:
Zie figuur 2.
Met $|AB| = |AC| = |BC|$
Volgt:
$|FG| = |EH| = \frac{1}{2}\ |BC|$.
en FG // EH.
Dit zijn middenparallellen in twee driehoeken.

Analoog:
$|EF| = |GH| = \frac{1}{2}|AD|$ en
EF // GH.

Gevolg: $EFGH$ is een ruit en de diagonalen staan loodrecht op elkaar.
Q.E.D.

Opmerking:
Als de hoek bij A niet 60° is, dan is het resultaat ‘slechts’ dat $EFGH$ een parallellogram is.

P25 Vier raakcirkels binnen driehoek



Figuur 1 (van site)

[454]

Gegeven:
Zie figuur 1.
De kleine cirkels raken de driehoek en de ingeschreven cirkel van de driehoek.

Te bewijzen:
$$r = \sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_a r_c}.$$

Bewijs:
Enige herschrijving van het ‘te bewijzen’ geeft:

$\sqrt{r^2} = \sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_a r_c}$ ofwel te bewijzen: $\sqrt{\frac{r_a}{r}\frac{r_b}{r}} + \sqrt{\frac{r_b}{r}\frac{r_c}{r}} + \sqrt{\frac{r_a}{r}\frac{r_c}{r}} = 1.$

Noem de hoeken bij A, B en C even α, β en γ.

Dan volgt: $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r-r_a}{r+r_a}$. En daarmee: $\frac{r_a}{r} = \frac{1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

‘Manipuleer’ nu die laatste uitdrukking:

$\frac{r_a}{r} = \frac{1-\cos\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\cos\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\sin^2(45°-\frac{\alpha}{4})}{2\cos^2\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)} = \tan^2(45° - \frac{\alpha}{4}) = \tan^2(x).$

Analoog volgt: $\frac{r_b}{r} = \tan^2\left(45° - \frac{\beta}{4}\right) = \tan^2(y)$ en $\frac{r_c}{r} = \tan^2\left(45° - \frac{\gamma}{4}\right) = \tan^2(z).$

Merk op: $x + y + z = 135° - \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma) = 90°.$

En dan (!): $\tan(x + y) = \tan(90° - z) = \frac{1}{\tan(z)} = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}.$

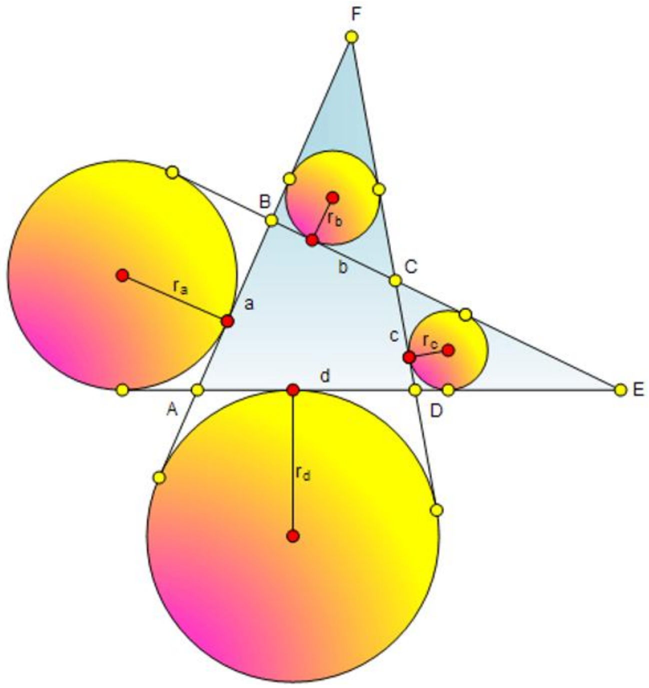
Conclusie: $\tan(x)\tan(z) + \tan(y)\tan(z) = 1 - \tan(x)\tan(y).$

Breng nu de stralen weer in het verhaal:

$\sqrt{\frac{r_a}{r}}\sqrt{\frac{r_c}{r}} + \sqrt{\frac{r_b}{r}}\sqrt{\frac{r_c}{c}} + \sqrt{\frac{r_a}{r}}\sqrt{\frac{r_b}{r}} = 1.$

Dus inderdaad: $\sqrt{r_a r_c} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_a r_b} = r.$
Q.E.D.

P26 Vier raakcirkels aan vierhoek



Figuur 1 (van site)

Gegeven:
Zie figuur 1.
Vier raakcirkels.
$a, b, c\ en\ d$ zijn de lengtes van de zijden van vierhoek $ABCD$.

Te bewijzen:
$\frac{a}{r_a} + \frac{c}{r_c} = \frac{b}{r_b} + \frac{d}{r_d}$.

[447]

Bewijs:
Benoem het raaklijnstuk vanuit A aan de cirkel met straal a_1. Andere stuk van a is dan a_2.
Zo ook vanuit B, C en D.

De middelpunten van de raakcirkels aan a en d liggen op een buitenbissectrice van hoek A.
Er volgt dan: $\tan\left(\frac{1}{2}\measuredangle A\right) = \frac{r_a}{a_1} = \frac{r_d}{d_2}$.

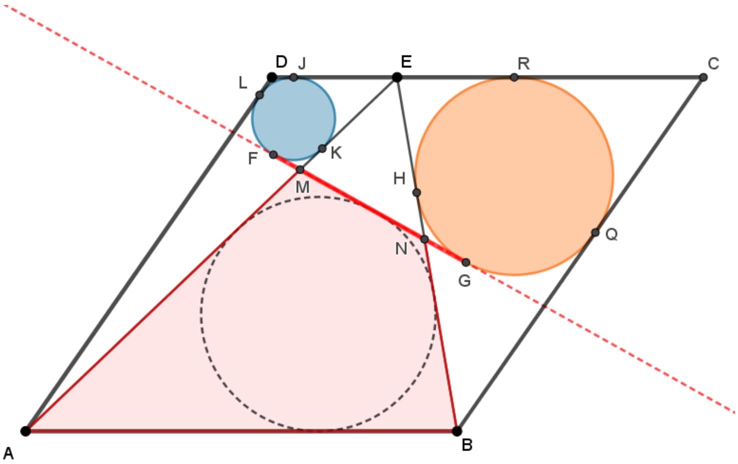
Analoog bij de andere drie hoekpunten:
$\frac{r_b}{b_1} = \frac{r_a}{a_2}, \frac{r_c}{c_1} = \frac{r_b}{b_2}, \frac{r_d}{d_1} = \frac{r_c}{c_2}$.

Er volgt:

$$\frac{a}{r_a} + \frac{c}{r_c} = \frac{a_1+a_2}{r_a} + \frac{c_1+c_2}{r_c} = \frac{a_1}{r_a} + \frac{a_2}{r_a} + \frac{c_1}{r_c} + \frac{c_2}{r_c} = \frac{d_2}{r_d} + \frac{b_1}{r_b} + \frac{b_2}{r_b} + \frac{d_1}{r_d} = \frac{b}{r_b} + \frac{d}{r_d}.$$

Q.E.D.

P27 Raken binnen parallellogram



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
$ABCD$ is een ruit.
H, G, Q, R, J, L, F, K zijn allemaal raakpunten.

Te bewijzen:
$ABNM$ is een raaklijnenvierhoek.

[351]

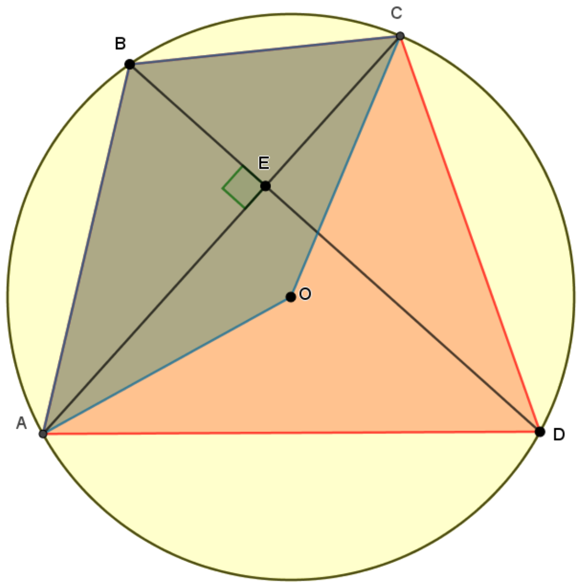
Bewijs:
Voor het bewijs is nodig en voldoende aan te tonen dat $|AB| + |MN| = |BN| + |AM|$.

$|AB| + |MN| = |AB| + |FG| - |FM| - |GN|$ [1]

$|FG| = |JR| = |CD| - |CR| - |DJ| = |CD| - |CQ| - |DL|$. Raaklijnen aan cirkel…
En verder met [1]:
$= |AB| + |CD| - |CQ| - |DL| - |FM| - |GN|$
$= |AD| - |DL| + |BC| - |CQ| - |FM| - |GN|$ Want $|AB| = |AD| = |CD| = |BC|$.
$= |AL| + |BQ| - |FM| - |GN|$
$= |AK| + |BH| - |MK| - |HN|$ Raaklijnen aan cirkel…
$= |AM| + |BN|$.

Dus $ABNM$ is een raaklijnenvierhoek.
Q.E.D.

P28 Bijzondere koordenvierhoek



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
In de koordenvierhoek $ABCD$ staan de diagonalen loodrecht op elkaar.
O is het mp van de cirkel.

Te bewijzen:
$Opp(ADCO) = opp(ABCO)$
$= \frac{1}{2} * opp(ABCD)$.

[330]

Bewijs:
Noem M het midden van BD.
Dan geldt: $OM \perp BD$.
Dan geldt ook: OM // AC.
Gevolg: $opp(\Delta ACO) = opp(\Delta ACM)$.
Dus ook: $opp(ABCO) = opp(ABCM)$. [1]

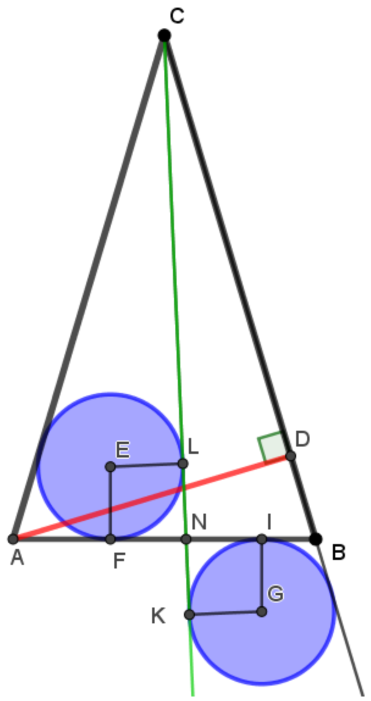
$opp(ABCM) = |AC| * \frac{1}{2}|BM|$ (want $BM \perp AC$).

Maar er geldt ook: $opp(ABCD) = |AC| * \frac{1}{2}|BD| = |AC| * |BM| = 2 * opp(ABCM)$.

Met [1] volgt: $opp(ABCD) = 2 * opp(ABCO)$.

Q.E.D.

P29 Raakcirkels bij gelijkbenige driehoek



Figuur 1

[325]

Gegeven:
Zie figuur 1.
$|AC| = |BC|$.
De twee raakcirkels hebben straal r.
F, L, K en I zijn raakpunten.

Te bewijzen:
$|AD| = 4r$.

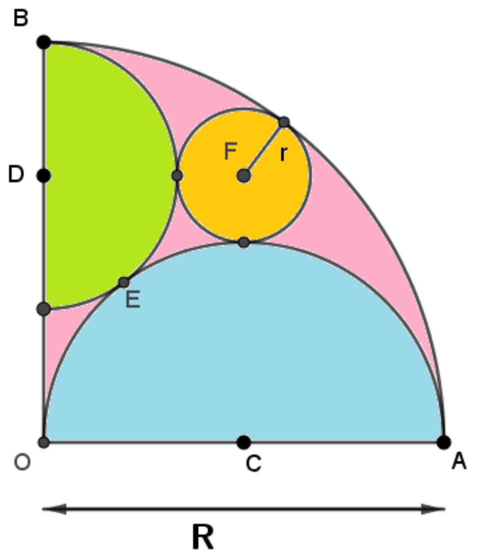
Benoem enige zijden…
$|AC| = a, |CN| = q, |AN| = v, |BN| = w$.

Bewijs:
$Opp(\Delta ABC| = \frac{1}{2}|AD| * a = opp(\Delta ANC) + opp(\Delta BNC)$. [1]
$Opp(\Delta ANC) = \frac{1}{2}r * (a + q + v); opp(\Delta BNC) = \frac{1}{2}r * (a + q - w)$. [2]
Loop vanuit N rond over zijden ΔNAC. Er volgt: $|NF| = \frac{1}{2}(v + q - a)$. Raaklijnstuk…
Loop vanuit N rond over zijden ΔNBC. Er volgt: $|NI| = \frac{1}{2}(w - q + a)$. Idem.
Omdat G en E op een bissectrice van hoek N liggen, volgt: $\Delta NFE \cong \Delta NIG$. (ZHH)
Dus: $|NF| = |NI|$
Daarmee volgt: $v + q - a = w - q + a$.
Dus: $v - w = 2a - 2q$. [3]

[2] en [3] ingevuld in [1] geeft:
$\frac{1}{2}|AD| * a = \frac{1}{2}r * (a + q + v + a + q - w) = \frac{1}{2}r * (2a + 2q + 2a - 2q) = \frac{1}{2}4r * a$.

Conclusie: $|AD| = 4r$.
Q.E.D.

P30 Raakcirkels in kwartcirkel



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.

Te bewijzen:
$r = \frac{1}{6}R.$

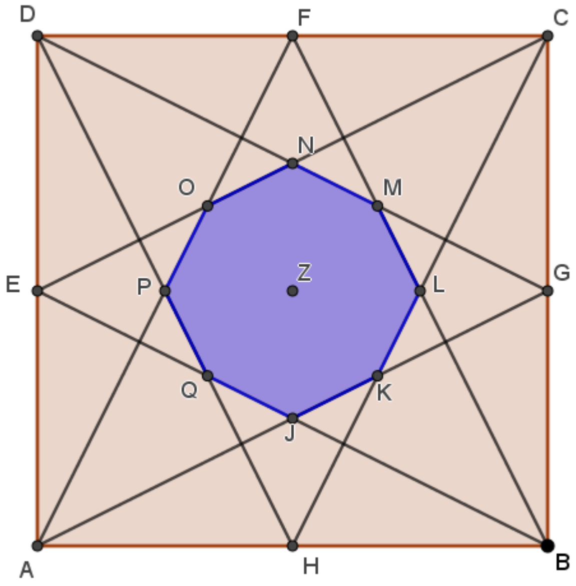
[285]

Bewijs:
Noem de straal van de cirkel met mp D even p.
ΔOCD is rechthoekig, dus: $|CD|^2 = |CO|^2 + |OD|^2$.
Dat geeft: $\left(\frac{1}{2}R + p\right)^2 = \left(\frac{1}{2}R\right)^2 + (R - p)^2$.

Dus: $p = \frac{1}{3}R$.

Er geldt ook: $|CO| = |DF|$ ofwel $\frac{1}{2}R = \frac{1}{3}R + r$.
Dus: $r = \frac{1}{6}R$.
Q.E.D.

P31 Achthoek binnen een vierkant



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
Vierkant ABCD heeft zijde a.
E, F, G en H zijn middens van de zijden.

Te bewijzen:
JKLMNOPQ is een achthoek met gelijke zijden (van lengte b).

En: $b = a * \frac{\sqrt{5}}{12}$.

[286]

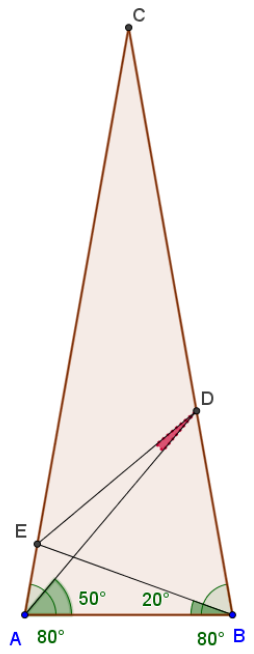
Bewijs:
Uit spiegelsymmetrie volgt dat $|JK| = |KL|$ met lijn BD en dat $|KL| = |LM|$ met lijn EG.
Gevolg: alle zijden van de achthoek zijn even lang.
$|ZJ| = |ZL| = |ZN| = |ZP| = \frac{1}{2}|ZH| = \frac{1}{4}a = 0{,}25 * a.$
In ΔHGZ zijn HL en GJ zwaartelijnen. Dan is de lijn door Z door K dat ook: K is zwaartepunt.
$|ZK| = \frac{2}{3}\frac{1}{2}|ZB| = \frac{1}{3}\frac{1}{2}a\sqrt{2} \approx 0{,}236 * a.$
Gevolg: de achthoek is géén regelmatige achthoek.

$$|KL| = \frac{1}{3}\,|HL| = \frac{1}{3} * \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = a * \frac{\sqrt{5}}{12} = b.$$

Q.E.D.

Opmerking: Als een achthoek regelmatig is, dan zijn alle hoeken bij de acht hoekpunten 135°.
Maar nu geldt: $\measuredangle JKL \approx 143{,}13°$ en $\measuredangle KLM \approx 126{,}87°$.

P32 Hoek in gelijkbenige driehoek



Figuur 1

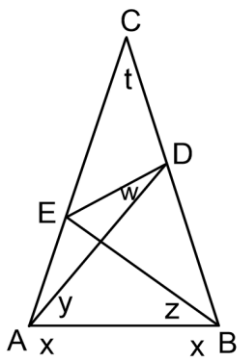
Gegeven:
Zie figuur 1.
Driehoek ABC is gelijkbenig met basishoeken van 80°.
Vanuit A is een lijn getrokken onder een hoek van 50° met AB en vanuit B is een lijn getrokken onder een hoek van 20° met AB.
Die lijnen snijden de zijden van de driehoek in D en E.

Te bewijzen:
$\measuredangle ADE = 10°$.

[274] met andere hoeken (*).

Bewijs:
$\measuredangle BAE = \measuredangle AEB = 80°$. Dus: $|AB| = |BE|$. $\measuredangle BAD = \measuredangle ADB = 50°$.
Dus: $|AB| = |BD|$. Gevolg: $|BE| = |BD|$
Driehoek BDE gelijkbenig met tophoek van 60°.
Dus: $\measuredangle ADE = 60° - 50° = 10°$.
Q.E.D.

(*) Dit is één voorbeeld van soortgelijke vraagstukken over gelijkbenige driehoeken van de wiskundige Langley. Overigens zijn de puur meetkundige oplossingen niet altijd makkelijk te vinden.

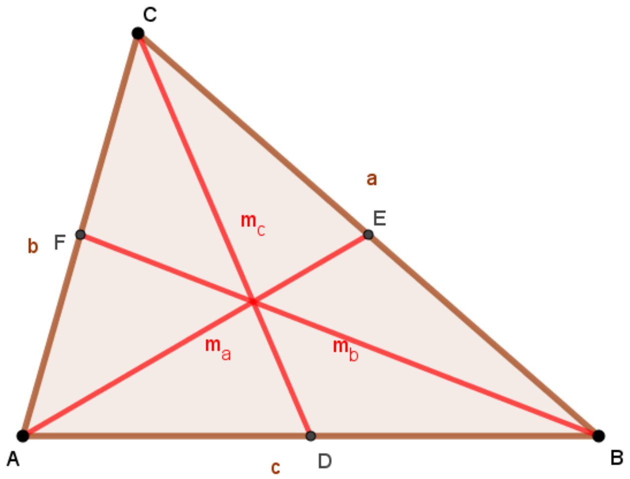


Figuur 2

Soms blijkt er bij D een geheeltallige hoek te zitten!
Zie figuur 2 met $x = 80°$ en $(y, z \to w)$:
(70,60 →20); (65,60→40); (60,50→30); (60,30→10); (50,20→10)

Trigonometrisch is te bewijzen met herhaald gebruik sinusregel:
$\sin(w)\sin(x+z)\sin(x) = \sin(x+w-y)\sin(x+y)\sin(z)$.
En daarmee: $\tan(w) = \cdots$

P33 Zwaartelijnen en zijden



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
D, E en F zijn middens.
Zwaartelijn naar zijde a heeft lengte m_a.
Idem voor b en c.

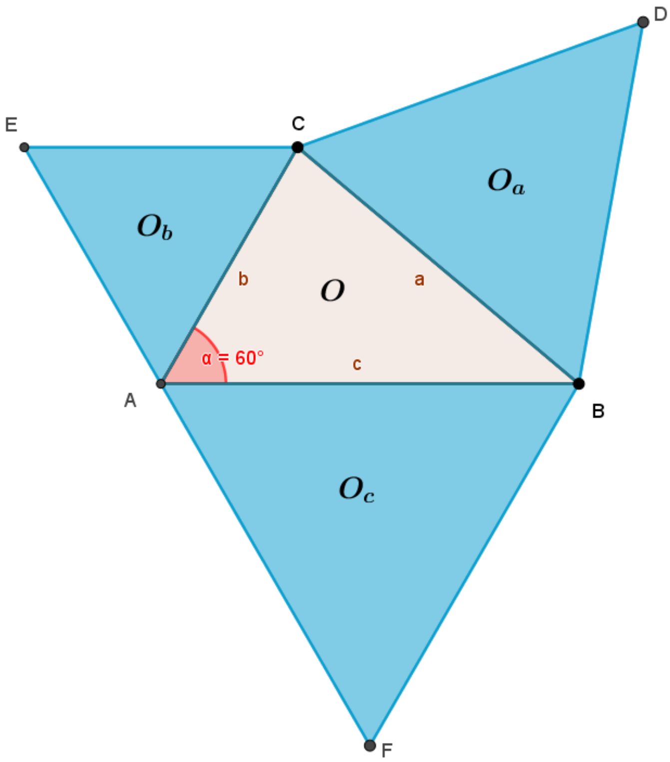
Te bewijzen:
$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

[249]

Bewijs:
Met de cosinusregel volgt
$m_a^2 = \frac{1}{4}a^2 + c^2 - ac * \cos(\measuredangle B)$. [1]
En: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos(\measuredangle B)$. [2]
En nu met [1] minus ½*[2] volgt:
$m_a^2 = \frac{1}{4}a^2 + c^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}a^2$.
Analoog:
$m_b^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}b^2$.
$m_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$.

Dus: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{3}{4}c^2$.
Q.E.D.

P34 Regelmatige driehoeken op een driehoek



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
De driehoeken op de zijden van ΔABC zijn gelijkzijdig en $\measuredangle BAC = 60°$.

Te bewijzen:
$O_a = O_b + O_c - O$.
$O = \sqrt{O_b O_c}$.

[211]

Bewijs:
$O = \frac{1}{2}\, bc * \sin(\measuredangle BAC) = \frac{1}{4}\, bc\, \sqrt{3}$.

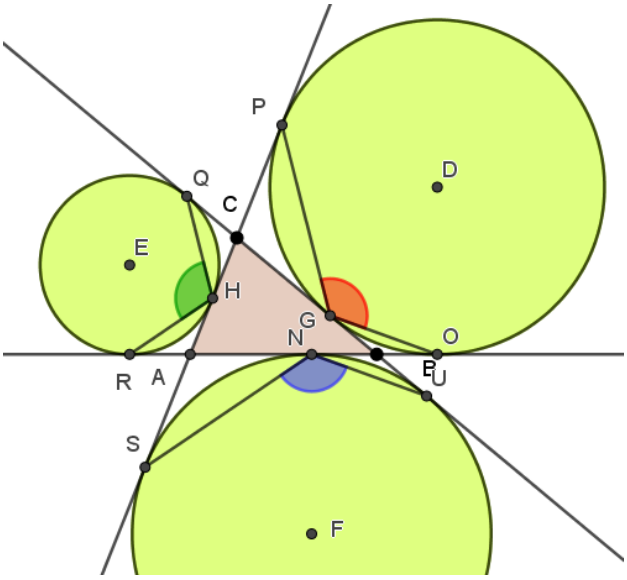
$O_a = \frac{1}{2} a^2 * \frac{1}{2}\, \sqrt{3}$. Analoog voor O_b en O_c.

De cosinus-regel in ΔABC geeft:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos(60°) = b^2 + c^2 - bc$.
Vermenigvuldig alles met $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ en er volgt:
$O_a = O_b + O_c - O$.

En: $\sqrt{O_b O_c} = bc * \frac{1}{4}\, \sqrt{3} = O$.

Q.E.D.

P35 Hoeken in aangeschreven cirkels



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
De cirkels zijn de aangeschreven cirkels van driehoek ABC.
P, G en O zijn raakpunten.
Analoog bij de andere cirkels.

Te bewijzen:
Zie de gemarkeerde hoeken.

$\measuredangle G + \measuredangle H + \measuredangle N = 360°$.

[208]

Bewijs:
Kijk bij punt E.
$\measuredangle RHQ + \measuredangle RHA + \measuredangle QHC = 180°$. [1]
$\angle RHA$ op boog RH dus $\measuredangle RHA = \frac{1}{2}\measuredangle REH$. Omtrekshoek!
Analoog: $\measuredangle QHC = \frac{1}{2}\measuredangle QEH$.

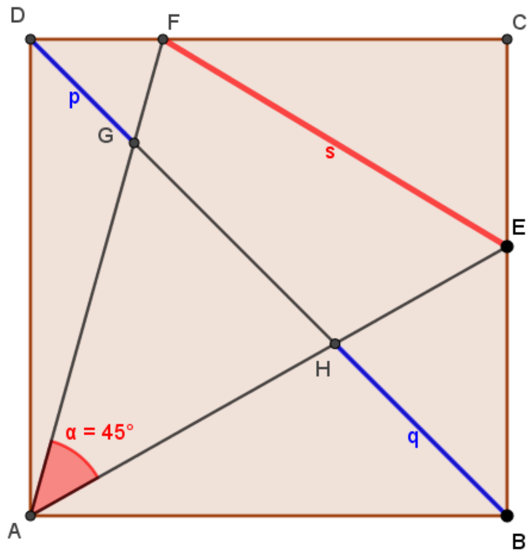
Omdat $ERBQ$ een koordenvierhoek is (bij R en Q zitten rechte hoeken) volgt:
$\measuredangle REQ = 180° - \measuredangle ABC$.

Dus vervolg met [1]:
$180° = \measuredangle RHQ + \frac{1}{2}\measuredangle REH + \frac{1}{2}\measuredangle QEH = \measuredangle RHQ + \frac{1}{2}\measuredangle REQ = \measuredangle RHQ + 90° - \frac{1}{2}\measuredangle ABC$.

Dus: $\measuredangle H = 90° + \frac{1}{2}\beta$. Analoog: $\measuredangle G = 90° + \frac{1}{2}\alpha$; $\measuredangle N = 90° + \frac{1}{2}\gamma$.

Conclusie: $\measuredangle G + \measuredangle H + \measuredangle N = 270° + \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 360°$.
Q.E.D.

P36 Lijnstuk binnen vierkant

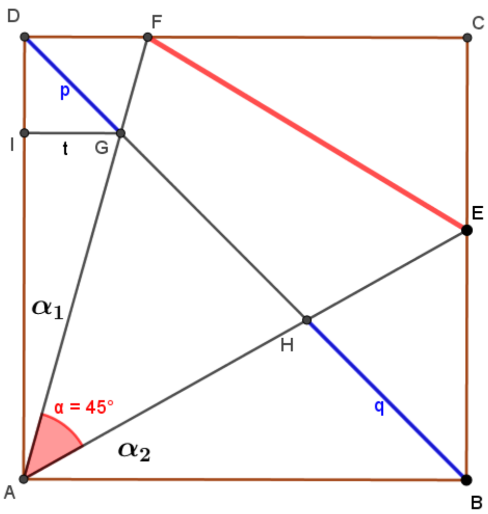


Figuur 1

[188]

Gegeven:
Zie figuur 1.
ABCD is een vierkant.

Te bewijzen:
$s^2 = 2(p^2 + q^2)$.



Figuur 2

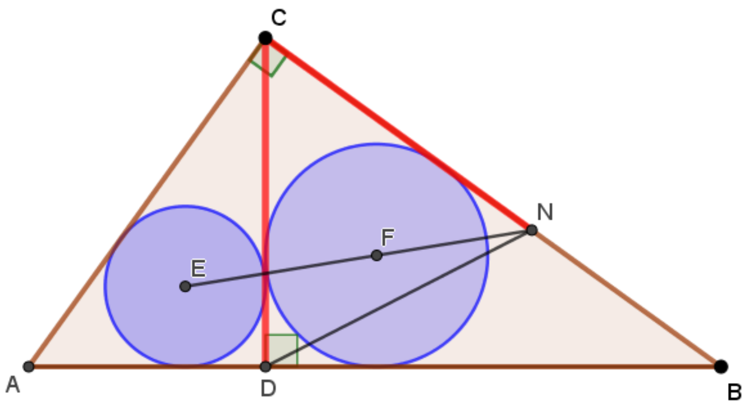
Bewijs:
Zie figuur 2.
Met $|AB| = 1$ en $GI \perp AD$ en $|GI| = t$ volgt:
$\tan(\alpha_1) = \frac{t}{1-t}$.
En:
$\tan(\alpha_2) = \tan(45° - \alpha_1)$
$= \frac{\tan(45°)-\tan(\alpha_1)}{1+\tan(45°)\tan(\alpha_1)} = \frac{1-\frac{t}{1-t}}{1+\frac{t}{1-t}} = 1 - 2t.$

Maar ook: $\tan(\alpha_2) = 1 - |CE|$.
Dus:
$|CE| = 2t$.

Vervolg:
$2t^2 = p^2$ en dus: $|CE|^2 = 2p^2$.

Analoog: $|CF|^2 = 2q^2$. Dus: $s^2 = |CE|^2 + |CF|^2 = 2(p^2 + q^2)$
Q.E.D.

P37 Twee ingeschreven cirkels in driehoek

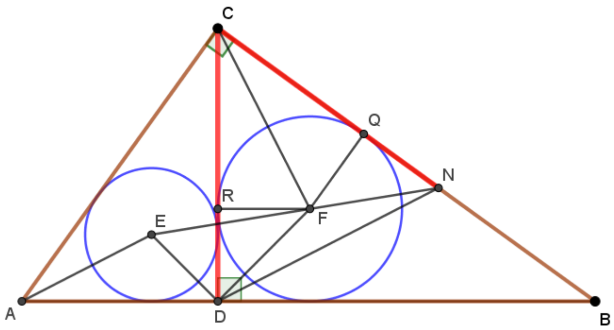


Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
E en F zijn de middelpunten van de cirkels.

Te bewijzen:
$|CD| = |CN|$.

[186]



Figuur 2

Bewijs:
Zie figuur 2.

Te laten zien dat $\Delta DRF \cong \Delta NQF$.

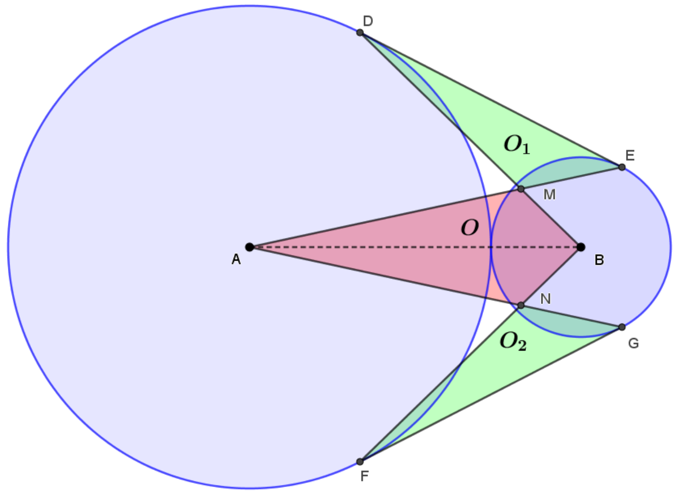
Kijk eerst naar de driehoeken ADE en CDF.
Die zijn gelijkvormig (hh): $\measuredangle DAE = \measuredangle DCF = \frac{1}{2}\alpha$. En: $\measuredangle ADE = \measuredangle CDF = 45°$.
Dus: $\frac{|DE|}{|DF|} = \frac{|AD|}{|CD|}$. [1]
Kijk dan naar de driehoeken ACD en EFD.
$\measuredangle ADC = \measuredangle EDF = 90°$ en met [1] volgt (zhz): $\Delta ACD \sim \Delta EFD$.

Dus: $\measuredangle EFD = \measuredangle ACD = \beta$.

En nu in ΔCDF:
$\measuredangle CFE = 180° - \measuredangle EFD - \measuredangle DCF - \measuredangle FDC = 135° - \beta - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \measuredangle CNF$. Een buitenhoek…
Dus: $\measuredangle CNF = 135° - \alpha - \beta = 45°$.

En hiermee: $\Delta DRF \cong \Delta NQF$ (ZHH).
Dus: $|DR| = |NQ|$.
En dan: $|CD| = |CR| + |DR| = |CQ| + |NQ| = |CN|$. Raaklijnstukken zijn even lang.
Q.E.D.

P38 Oppervlaktes bij twee raakcirkels

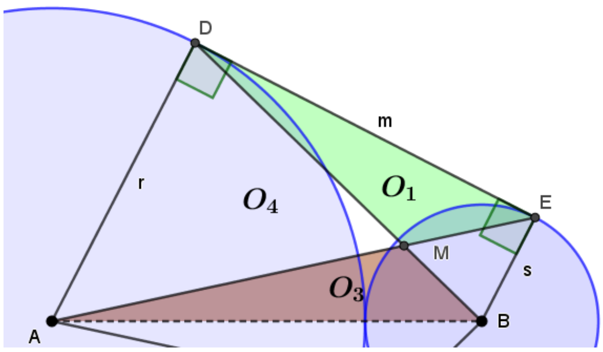


Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
D, E, F en G zijn raakpunten.

Te bewijzen:
$O = O_1 + O_2$.

[180]



Figuur 2

Bewijs:
Zie figuur 2.

$O_1 + O_4 = \frac{1}{2} m * r.$

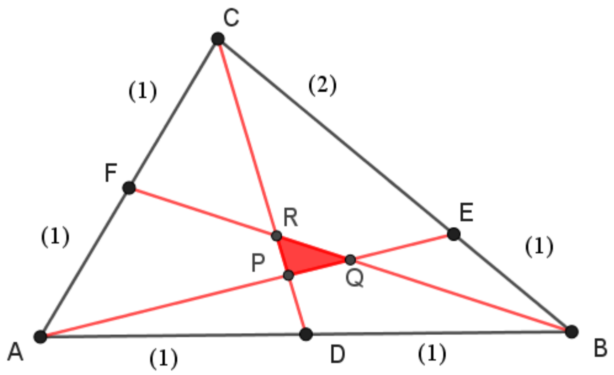
EB//AD
Dus:
$O_3 + O_4 = \frac{1}{2}\ m * r.$

Gevolg:
$O_1 = O_3$.
En vanwege spiegelsymmetrie in lijn AB volgt:
$O_1 = O_2$.

Dus: $O = 2 * O_3 = O_1 + O_2$.

Q.E.D.

P39 Driehoek ingesloten binnen driehoek 1



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
$Opp(\Delta ABC) = 1$.
De getallen tussen haakjes duiden verhoudingen aan.

Gevraagd:
$Opp(\Delta PQR) = ?$

[121] (*)

Oplossing:
Zie AE als een transversaal van ΔBCF.
Dan volgt met Menelaos: $\frac{|BE|}{|EC|}\frac{|CA|}{|AF|}\frac{|FQ|}{|QB|} = 1$. Nu met lengtes i.p.v. gerichte lijnstukken.
Gevolg: $|FQ| = |BQ|$. [1]
Zie CD als een transversaal van ΔBCF. Dan volgt: $\frac{|BR|}{|RF|}\frac{|FC|}{|CA|}\frac{|AD|}{|DB|} = 1$.
Gevolg: $|BR| = 2 * |RF|$.
Met [1] volgt: $|FR| : |RQ| : |QB| = 2 : 1 : 3$.

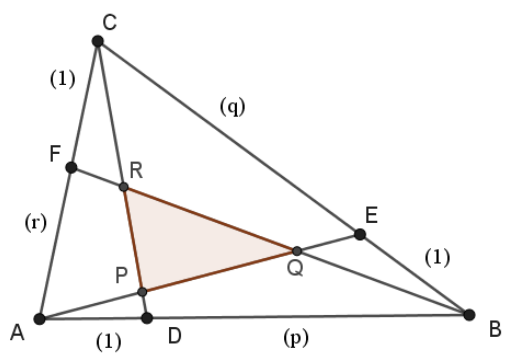
Analoog is te vinden met CD resp. BF transversalen van ΔABE resp. ΔACE:
$|AP| : |PQ| : |QE| = 12 : 3 : 5$.

En dan:
$opp(\Delta PQR) = \frac{1}{3}\ opp(\Delta PQF) = \frac{1}{3}\frac{3}{15}\ opp(\Delta AQF) = \frac{1}{3}\frac{3}{15}\frac{1}{2}\ opp(\Delta ABF) = \frac{1}{3}\frac{3}{15}\frac{1}{2}\frac{1}{2} opp(\Delta ABC) = \frac{1}{60}$.
Klaar.

Opmerking: (*) Dit is een bijzonder geval van de Stelling van Routh, Brits wiskundige uit de 19e eeuw. Zie figuur 2.

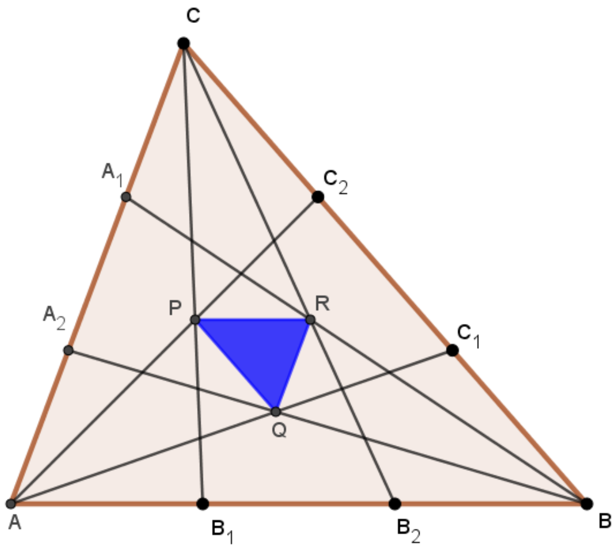
Er geldt:
$\frac{O(\Delta PQR)}{O(\Delta ABC)} = \frac{(pqr-1)^2}{(pq+q+1)(qr+r+1)(rp+p+1)}$.

Met $(p, q, r) = (1,2,1)$ in het voorbeeld.



Figuur 2.

P40 Driehoek ingesloten binnen driehoek 2



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
$Opp(\Delta ABC) = 1$.
B_1 en B_2 delen AB in drie gelijke stukken.
Analoog $C_{1,2}$ bij BC en $A_{1,2}$ bij AC.

Gevraagd:
$Opp(\Delta PQR) = ?$

[124]

Oplossing:
Zie CB_1 als een transversaal van ΔABC_2.
Dan volgt met Menelaos: $\frac{|AB_1|}{|B_1B|}\frac{|BC|}{|CC_2|}\frac{|C_2P|}{|PA|} = 1$. Nu met lengtes i.p.v. gerichte lijnstukken.
Gevolg: $|C_2P| : |PA| = 2 : 3$. Analoog: $|C_1Q| : |QA| = 2 : 3$.

Er volgt: PQ // C_1C_2 [1] en $|PQ| : |C_1C_2| = 3 : 5$.

Dus: $|PQ| = \frac{3}{5}\frac{1}{3}|BC| = \frac{1}{5}\ |BC|$.

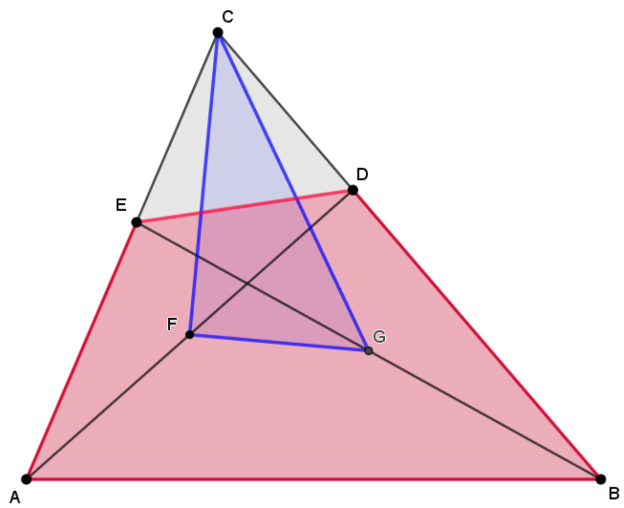
Analoog: $|PR| = \frac{1}{5}\ |AB|$. En PR // AB. [2]

Uit [1] en [2] volgt: $\measuredangle ABC = \measuredangle RPQ = \beta$.

En dan: $opp(\Delta PQR) = \frac{1}{2}|PR| * PQ| * \sin(\beta) = \frac{1}{25}\frac{1}{2}|AB| * |BC| * \sin(\beta) = \frac{1}{25}$.
Klaar.

Opmerking:
Meer algemeen als $|AB_1| : |B_1B_2| : |B_2B| = 1 : p : 1$ en op BC en AC soortgelijk.
Dan volgt: $opp(\Delta PQR) = \left(\frac{p}{2p+3}\right)^2 * opp(\Delta ABC)$. In het voorbeeld: $p = 1$.
Als $p \to \infty$ dan naderen P, Q en R de middens van de zijden van ΔABC en
dan $opp(\Delta PQR) \to \frac{1}{4} opp(\Delta ABC)$.

P41 Driehoek en vierhoek binnen driehoek

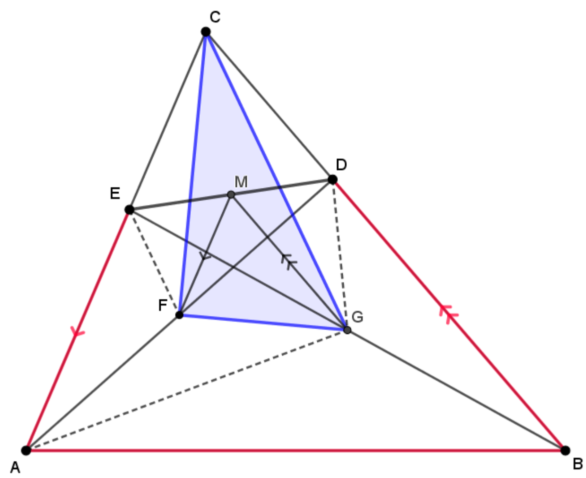


Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
D en E zijn willekeurig gekozen op de zijden. F resp. G is het midden van AD resp. BE.

Te bewijzen:
$Opp(\Delta CFG) = \frac{1}{4} opp(ABDE)$.

[90]



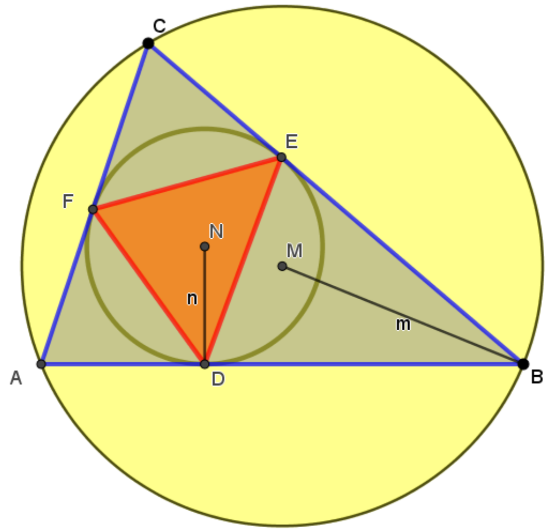
Figuur 2

Bewijs:
Zie figuur 2.
Kijk naar vierhoek EFGD.
F is een midden dus
$opp(EFD) = \frac{1}{2} opp(EAD)$.
Analoog vanuit G gezien, dus
$Opp(EFGD) = \frac{1}{2} O(EAGD) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} O(ABDE)$.
[1]
M is het midden van DE.
Dus: MF // AC en GM // BC.
Gevolg:
$Opp(\Delta CED) = O(\Delta CEM) + O(\Delta CDM) = O(\Delta CEF) + O(\Delta CDG)$. [2]

En nu volgt:
$opp(\Delta CED) + opp(EFGD) = opp(\Delta CFG) + opp(\Delta CEF) + opp(\Delta CDG)$.
Met [1] en [2] volgt:
$opp(\Delta CED) + \frac{1}{4} opp(ABDE) = opp(\Delta CFG) + opp(\Delta CED)$.

Dus:
$Opp(\Delta CFG) = \frac{1}{4} opp(ABDE)$.
Q.E.D.

P42 Driehoek binnen ingeschreven cirkel van driehoek



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
De ingeschreven cirkel (N,n) raakt in D, E en F.
Cirkel (M,m) is de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.

Te bewijzen:
$\frac{opp(\Delta DEF)}{opp(\Delta ABC)} = \frac{n}{2m}$.

[82]

Bewijs:
ΔDEF bestaat uit drie kleinere driehoeken met tophoek te N.
$Opp(\Delta DNF) = \frac{1}{2}\, n^2 \sin(\measuredangle DNF)$.
Vierhoek ADNF is een koordenvierhoek.
Dus: $Opp(\Delta DNF) = \frac{1}{2}\, n^2 \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}\, n^2 \sin(\alpha)$.

Trek lijn door C en M: snijpunt met de grote cirkel (M,m) is S.
Dan volgt: $\measuredangle BSC = \alpha$. Omtrekshoek op koorde BC.
Maar hoek CBS is recht t.g.v. stelling van Thales.
Dus: $\sin(\measuredangle BSC) = \frac{|BC|}{|CS|} = \frac{a}{2m}$.

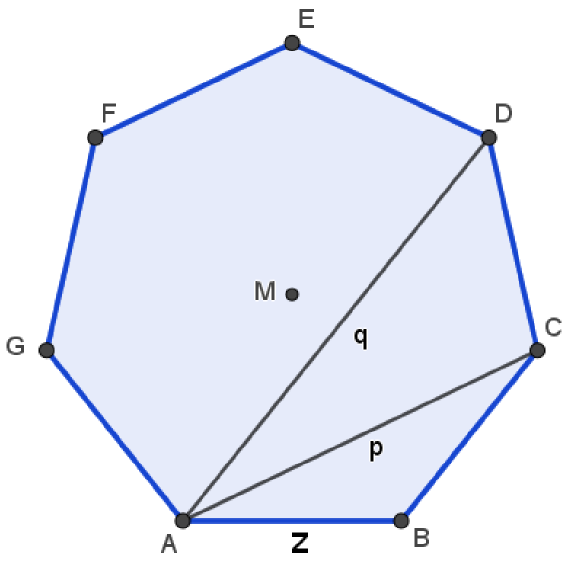
Gevolg: $Opp(\Delta DEF) = \frac{1}{2}\, n^2(\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)) = \frac{1}{2}\, n^2 \left(\frac{a}{2m} + \frac{b}{2m} + \frac{c}{2m}\right) = \frac{n^2}{2m} \frac{(a+b+c)}{2}$.

En er geldt: $Opp(\Delta ABC) = n * \frac{a+b+c}{2}$.

Dus: $Opp(\Delta DEF) = \frac{n}{2m} opp(\Delta ABC)$.

Q.E.D.

P43 Diagonalen in regelmatige zevenhoek



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
ABCDEFG is een regelmatige zevenhoek.

Te bewijzen:
$\frac{1}{z} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

[63]

Bewijs:
Kijk naar koordenvierhoek ABDG.
$|BD| = p, |DG| = q$. ΔADG is gelijkbenig!

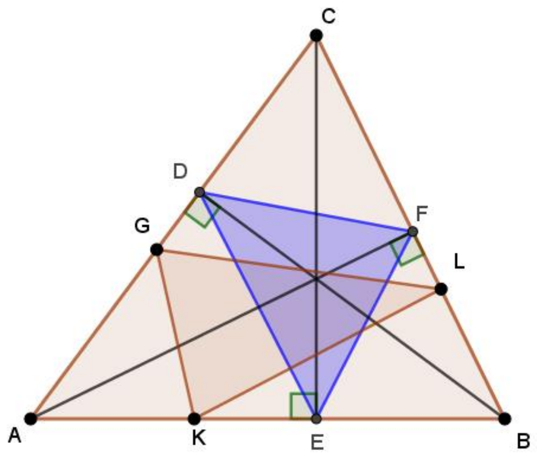
Er volgt met Ptolemeus: $|AD| * |BG| = |AB| * |DG| + |BD| * |AG|$.

Dus: $pq = zq + pz = z(p+q)$.

En dan: $\frac{1}{z} = \frac{p+q}{pq} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.
Q.E.D.

Opmerking: Bij een regelmatig 9-, 11-hoek etc. is een soortgelijke betrekking te vinden.
Bij een regelmatige 5-hoek geeft dit:
$p^2 = z^2 + pz$.
Hiermee is snel de verhouding diagonaal : zijde te vinden.
$\frac{p}{z} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

P44 Driehoek met kleinste omtrek



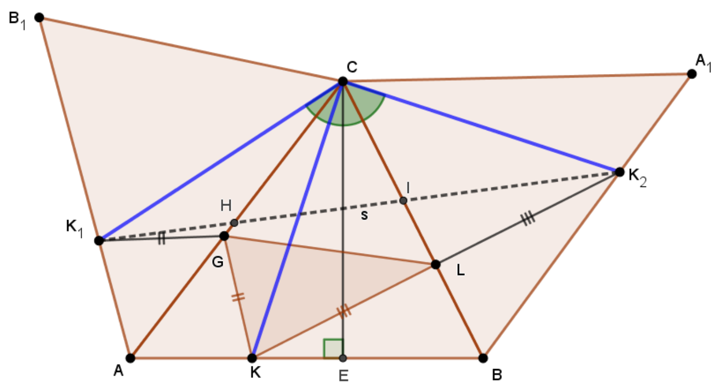
Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
D, E en F zijn voetpunten van hoogtelijnen in ΔABC.
G, K en L zijn willekeurig gekozen punten op de zijden.

Te bewijzen:
Omtrek ΔDEF is kleiner dan omtrek ΔGKL.

Ofwel: ΔDEF heeft de kleinste omtrek van alle driehoeken met hoekpunten op de zijden.

[61]



Figuur 2

Bewijs:
Zie figuur 2.
De omtrek van ΔGKL wordt omgezet in lengte van een lijnstuk. ΔACB_1 en ΔBCA_1 zijn de gespiegelden van ΔABC.
De omtrek is nu
$|K_1G| + |GL| + |LK_2|$. [1]

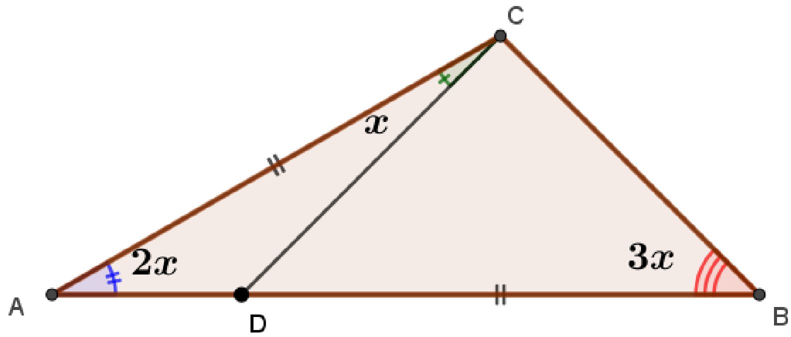
Met K vast gekozen geeft de keuze van G en L niet een driehoek met kleinste omtrek.
K_1 en K_2 liggen vast en dan is K_1K_2 het kortste, korter dan [1].

Dus bij deze beginkeuze van K zijn H en I betere keuzes:
de omtrek van ΔKHI is kleiner dan de omtrek van ΔKGL.
Maar… is K de beste beginkeuze?
Merk op dat ΔCK_1K_2 gelijkbenig is met tophoek 2γ.
Bij variatie van K verandert die tophoek niet maar de lengte van de benen wel.
Welke van al deze gelijkbenige driehoeken heeft dan de grootste basis (s in figuur 2)?
Dat is de driehoek met de kleinste benen CK_1 en CK_2. Die hebben lengte $|CK|$.
En die is het kleinst als CK de hoogtelijn is! Dus K moet op E gekozen worden.

Zo wordt de positie van K gevonden. Redeneer nu vanuit BC en punt L en dan vanuit AC en punt G.
Conclusie: L resp. G moet voetpunt van de hoogtelijn uit A resp. B zijn.
De driehoek met de kleinste omtrek is gevonden: de hoekpunten zijn de voetpunten van de hoogtelijnen…
Q.E.D.

Opmerking: Dit probleem met deze oplossing is van de Italiaanse wiskundige Fagnano uit 1775.

P45 Hoeken in een driehoek 1

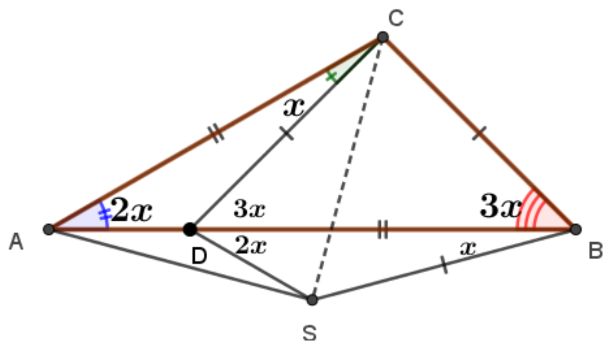


Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
$|AC| = |BD|$.

Gevraagd:
$x = ?$

[6]



Figuur 2

Oplossing:
Zie figuur 2.
Maak punt S zodat $\Delta BDS \cong \Delta CAD$.
Dan volgt: $\measuredangle DAS = x$. En $|AD| = |DS|$.
Dus: ΔABS is gelijkbenig.
Gevolg: $|AS| = |BS| = |BC|$.

En: $\measuredangle SAC = 3x$.
En daarmee: $\Delta SAC \cong \Delta CBD$ (ZHZ)
Dus: $|CS| = |CD| = |BC| = |BS|$.
Gevolg: ΔBCS is gelijkzijdig.

Dus: $4x = 60°$.
En: $x = 15°$.
Klaar.

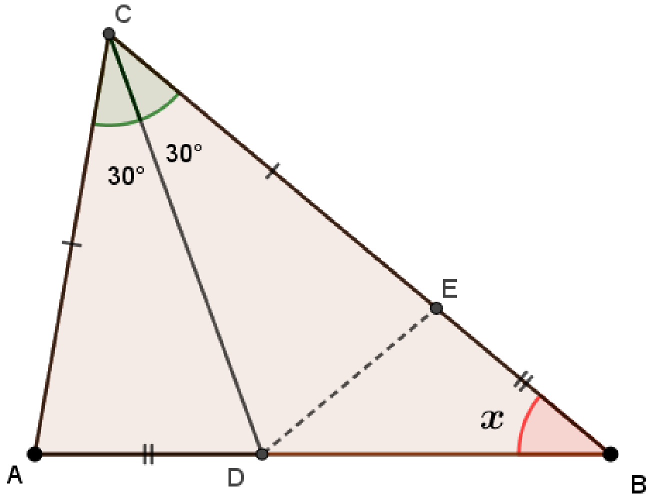
Alternatief:
$\measuredangle BDC = 3x$. Verder met trigonometrie:
Met de sinus-regel: $\frac{|AC|}{\sin(\measuredangle ADC)} = \frac{|CD|}{\sin(2x)}$. En ook: $\frac{|CD|}{\sin(3x)} = \frac{|BD|}{\sin(\measuredangle BCD)}$.

$\sin(\measuredangle ADC) = \sin(180° - 3x) = \sin(3x)$.

Dus: $\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sin(180°-6x)}{\sin(3x)} = \frac{\sin(6x)}{\sin(3x)} = 2\cos(3x)$.

Dus: $\tan(3x) = 2\sin(2x)$.
En met $x < 30°$ is de enige oplossing hiervan $x = 15°$.

P46 Hoeken in een driehoek 2



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
$|BC| = |AC| + |AD|$.

Gevraagd:
$x = ?$

[15]

Oplossing:
$|CE| = |AC|$.
Dan volgt: $\Delta ACD \cong \Delta ECD$. (ZHZ)
Dus: $|AD| = |DE|$ dus ook gelijk aan $|BE|$.

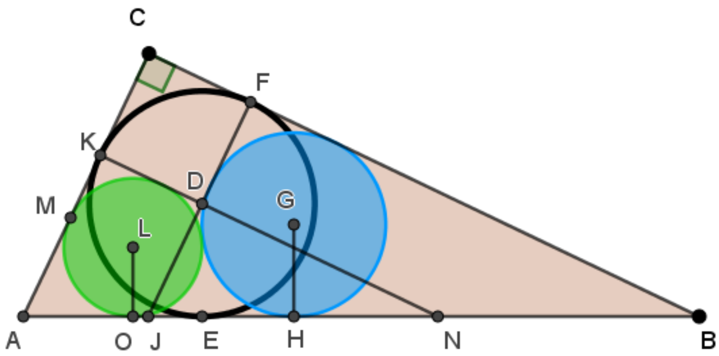
Gevolg: ΔBED is gelijkbenig.
Dus: $\measuredangle BDE = x$ en dus $\measuredangle DEC = 2x$.

Gevolg: $\measuredangle BAC = 2x$.

En dan: $x + 2x + 60° = 180°$.
Dus: $x = 40°$.
Klaar.

Opmerking:
Relevant is dat CD een bissectrice is, niet dat de hoek bij C gelijk is aan 60°.
De grootte van de hoek bij B is verder eenvoudig te vinden.

P47 Drie ingeschreven cirkels



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
D is mp van de ingeschreven cirkel van ΔABC.
JF // AC en NK // BC.
L resp. G is weer mp van een ingeschreven cirkel met straal r_1 resp. r_2.

Te bewijzen:
$|HO| = r_1 + r_2$.

[27

Bewijs:
$|LM| = |LO| = r_1$ en $|GH| = r_2$ en $|DK| = |DF| = r$.
Dan ook: $|KM| = r_1$.
En: $|AO| = |AM| = |AC| - r_1 - |CK| = b - r_1 - r$.

Analoog: $|BH| = a - r_2 - r$.

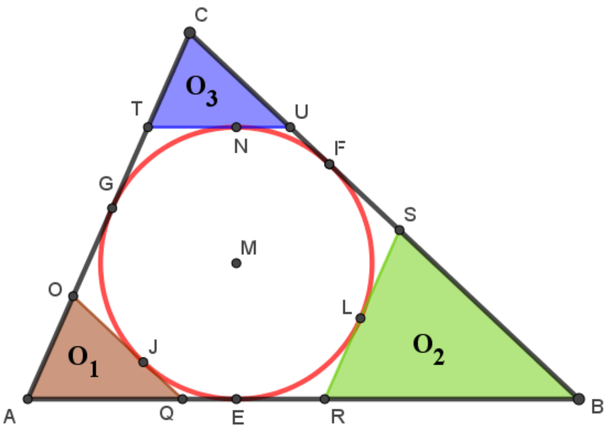
En dan: $|HO| = |AB| - |AO| - |BH| = c - (b - r_1 - r) - (a - r_2 - r)$.
Dus: $|HO| = r_1 + r_2 + (c - b - a + 2r)$. [1]

K en F zijn raakpunten en kijk vanuit C naar de raaklijnstukken.
Er volgt met $|CK| = r$: $r = a - (c - (b - r))$.
Dus: $c - a - b + 2r = 0$. [2]

Conclusie uit [1] en [2]: $|HO| = r_1 + r_2$.
Q.E.D.

Opmerking: In figuur 1 lijkt het dat cirkel (L,r_1) raakt aan cirkel (G,r_2), maar dat is niet zo.
OHGL is een (recht) trapezium als $r_2 > r_1$ en géén rechthoek en er volgt: $|LG| > |OH|$.
Om te raken zou moeten gelden: $|LG| = r_1 + r_2$.

P48 Ingeschreven cirkel met driehoeken



[142]

Gegeven:
Zie figuur 1.
OQ // BC, RS // AC, TU // AB.
In de drie kleine driehoeken staat hun oppervlakte.
$Opp(\Delta ABC) = O$.

Te bewijzen:
$\sqrt{O} = \sqrt{O_1} + \sqrt{O_2} + \sqrt{O_3}$.

Bewijs:
Met enige herschrijving volgt:
Te bewijzen: $\sqrt{\frac{O_1}{O}} + \sqrt{\frac{O_2}{O}} + \sqrt{\frac{O_3}{O}} = 1$. [1]

De kleine driehoeken en ΔABC zijn gelijkvormig.
Dan verhouden oppervlakten zich als kwadraten van overeenkomstige zijden.
Dus: $\frac{O_1}{O} = \frac{|AO|^2}{|AC|^2}$. En: $\frac{O_3}{O} = \frac{|CT|^2}{|AC|^2}$. En: $\frac{O_2}{O} = \frac{|RS|^2}{|AC|^2}$. [2]
Die laatste verhouding is anders te schrijven.

$\measuredangle ERL = \measuredangle GTN$ want AB // TU en RS // AC.
M ligt op de bissectrice van deze hoeken dus: $\measuredangle MRL = \measuredangle GTM$.
$|ML| = |MG|$ want dat is de straal van de ingeschreven cirkel.
Er volgt: $\Delta MRL \cong \Delta MTG$ (ZHH)
Dus: $|RL| = |TG|$.

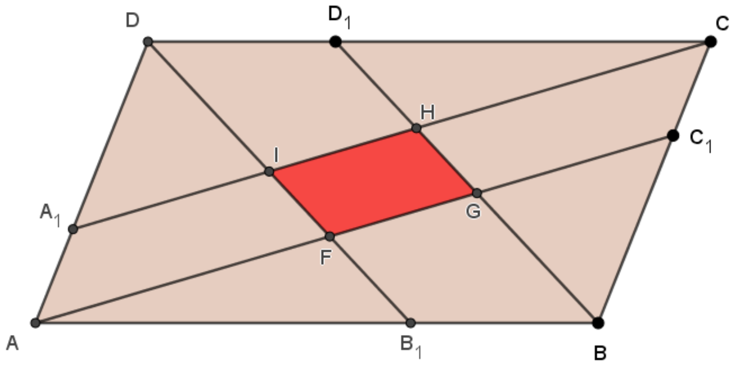
Analoog: $\Delta MSL \cong \Delta MOG$ (ZHH) en er volgt: $|LS| = |GO|$.

Conclusie: $|RS| = |RL| + |LS| = |TG| + |GO| = |TO|$.
En er volgt bij [2]: $\frac{O_2}{O} = \frac{|TO|^2}{|AC|^2}$.

In gevuld in [1] volgt: $\sqrt{\frac{O_1}{O}} + \sqrt{\frac{O_2}{O}} + \sqrt{\frac{O_3}{O}} = \frac{|AO|}{|AC|} + \frac{|OT|}{|AC|} + \frac{|CT|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AC|} = 1$.
Dus inderdaad:
$\sqrt{O} = \sqrt{O_1} + \sqrt{O_2} + \sqrt{O_3}$.

Q.E.D.

P49 Parallellogram in parallellogram

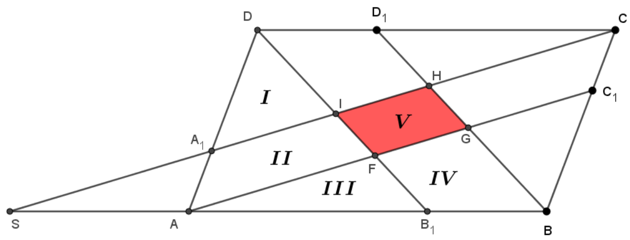


Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
$|AA_1| = \frac{1}{3}|AD|$.
Analoog: B_1, C_1, D_1.

Te bewijzen:
$Opp(FGHI) = \frac{1}{13}opp(ABCD)$.

[398]



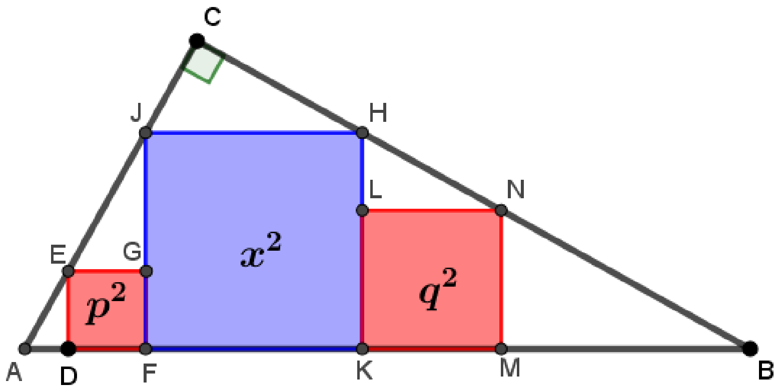
Figuur 2

Bewijs:
Zie figuur 2.
Oppervlakte gebied V is te bepalen als de oppervlakten I, II,… bekend zijn.
Noem $opp(ABCD) = O$.

- $|AB_1| : |BB_1| = 2 : 1$.
- En $|SA| : |AB_1| : |B_1B| = 3 : 4 : 2$.
- Dan met Menelaos en transversaal SI volgt: $\frac{|DI|}{|IB_1|}\frac{7}{3}\frac{1}{2} = 1$, dus $\frac{|DI|}{|IB_1|} = \frac{6}{7}$.
- En er volgt $|DI| : |IF| : |FB_1| = 6 : 3 : 4$.
- $Opp(III) = \frac{4}{13}\ opp(I + II + III) = \frac{4}{13}\frac{1}{2}\frac{2}{3}\ opp(ABCD) = \frac{4}{39}O$.
- $Opp(III + IV) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 * opp(III) = \frac{9}{4}\frac{4}{39}O = \frac{3}{13}O$.
- Dus: $opp(IV) = \frac{5}{4}\frac{4}{39}O = \frac{5}{39}O$.
- $Opp(V) = opp(BD_1DB_1) - 2 * opp(IV) = \frac{1}{3}O - \frac{10}{39}O = \frac{3}{39}O = \frac{1}{13}O$. Q.E.D.

Opmerking:
In het algemeen met $|AA_1| = \frac{1}{n}|AD|$ en B_1, C_1, D_1 soortgelijk volgt:
$|DI| : |IF| : |FB_1| = n(n-1) : n : (n-1)^2$.
$opp(III) = \frac{(n-1)^2}{2n^2-2n+1}\frac{1}{2}\frac{n-1}{n}\ O$. Dan $opp(IV)$ etc.
Er volgt: $opp(V) = \frac{1}{2n^2-2n+1}opp(ABCD)$.

P50 Drie vierkanten in driehoek



Figuur 1

Gegeven:
Zie figuur 1.
Drie vierkanten in een rechthoekige driehoek met hun oppervlakte.

Te bewijzen:
$x = p + q$.

[317]

Bewijs:
$|DF| = |DE| = p$. $|KM| = q$. En $|JF| = x$.
$Opp(\Delta AJF) = \frac{1}{2}\, x * |AF| = \frac{1}{2} p * |AF| + \frac{1}{2}\, p * x$.

Dus: $p = \frac{x*|AF|}{x+|AF|}$. Analoog: $q = \frac{x*|BK|}{x+|BK|}$.

En dan: $p + q = x * \left(\frac{|AF|}{x+|AF|} + \frac{|BK|}{x+|BK|}\right)$. [1]

Er geldt: $\frac{x}{|AF|} = \tan(\alpha)$ en $\frac{x}{|BK|} = \tan(\beta) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$.

Dat geeft voor [1]: $p + q = x * \left(\frac{1}{\frac{x}{|AF|}+1} + \frac{1}{\frac{x}{|BK|}+1}\right) = x * \left(\frac{1}{1+\tan(\alpha)} + \frac{\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)}\right) = x$.

Q.E.D.

Nawoord

Terugkijkend naar deze soms bijzondere ‘kwesties’ en met zeker op *gogeometry* prachtige figuren daarbij, is de vraag voor welke doelgroep dit alles bedoeld is. De auteurs zeggen voor ‘High School’, grofweg wiskunde bovenbouw havo-vwo, en ‘SAT Prep’ ofwel als voorbereiding op de toelatingstest voor colleges en universiteiten in de VS. Soms is meer basiskennis vereist en voor ons vo past daar kennis van stellingen als Heron, Menelaos, Ptolemeus en regels van trigonometrie en goniometrie bij.

Wie meer wil, ga naar de site! De hier besproken vraagstukken vormen minder dan 4% van de totale verzameling. Overigens is daar groepering aangebracht: soms een groep enkel over hoeken, dan weer een groep enkel over oppervlakte, etc. En… soms zijn er animaties gemaakt bij een vraagstuk met het programma *Wolfram Alpha.*

Voor de wiskundedocent, die liefhebber is van Euclidische vlakke meetkunde, een waar *eldorado* dus.

Fred Muijrers
oud-docent van de lerarenopleiding wiskunde eerste- en tweedegraad van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen.

Opmerkingen en/of foutmeldingen: stuur een mail.