
Arithmetica Philosophica,
Oder schöne newe wolgegründte
Uberauß Künstliche
Rechnung der Coß oder Algebræ/

$\mathbf{1}\boldsymbol{Cub}. + \boldsymbol{Rad}.\ \boldsymbol{gleich}\ \boldsymbol{Drag}.$

$$x^3 + bx = c$$

$$\boldsymbol{x_1} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{2}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{3}}\right)^3} + \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{2}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{2}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{3}}\right)^3} - \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{2}}}$$

Nader bekeken

Fred Muijrers

2025

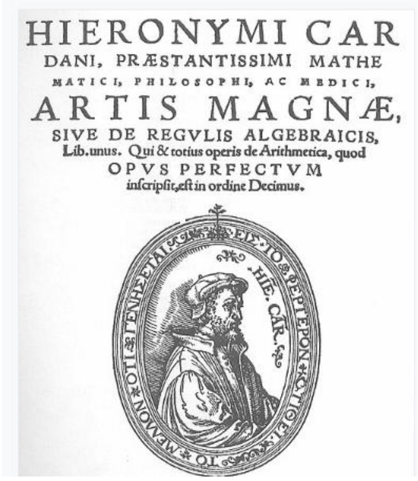
Arithmetica Philosophica door Peter Roth

F. Muijrers

v2 fm_pro@duct_2025

Voorwoord

Artis Magnae, Sive de Regulis Algebraicis, Liber unus



In 1545 verschijnt het boek *Ars Magna* van Geronimo Cardano (1501-1576). Dat gaat o.a. over het oplossen van vergelijkingen van de derde graad met de regel Coss, de naam voor algebra. Veel wiskundigen in die tijd bestuderen dat werk en schrijven er boeken over met voorbeelden en toepassingen. Peter Roth / Petrus Rothem, rekenmeester uit Nürnberg, is daar een van. Meer over Roth, zie bijlage 1.

Voor ligt een korte beschrijving van het boek *Arithmetica Philosophica* uit 1608 van Roth.
Het gaat over typen derdegraads vergelijkingen en hoe die zijn op te lossen. Daarin worden formules van Cardano gebruikt, maar er staan ook eigen vondsten van Roth in.
Later komen hogeregraads vergelijkingen aan bod.
Er worden vele voorbeelden besproken waarmee de kracht van de gehanteerde methode, om vergelijkingen op te lossen, getoond wordt.

Deze tekst geeft enige inkijk in het werk van Roth van ruim 400 pagina's, dat in oud-Duits en in een Gotisch lettertype gesteld is. Voor zover dat leesbaar was, de kopie is matig en de tekst is breedsprakerig Duits, is de kern van het verhaal omgezet naar huidig Nederlands.

Zie voor het origineel althans een kopie daarvan:

https://books.google.nl/books/about/Arithmetica_philosophica_oder_sch%C3%B6ne_ne.html?id=sJRmAAAAcAAJ&redir_esc=y

…of scan de QR-code.

Dank aan prof. Jan Hogendijk, hoogleraar in de geschiedenis van de wiskunde UU, voor opmerkingen bij een eerdere versie.

Veel leesplezier.

Fred Muijrers
Nijmegen
december 2025

Inhoud

Inleiding

Deze tekst begint met typen vergelijkingen van de derde graad. Roth behandelt die heel systematisch en uitgebreider dan Cardano: hij voegt eigen oplossingsmethoden toe. De gebruikte methode wordt genoemd een aanpak met *cossische* getallen.

Een derdegraads vergelijking wordt anders genoteerd dan tegenwoordig.
Er staat als type bijvoorbeeld: $1\ Cubus + Zens + Rad.\ gleich\ Drag.$
En als voorbeeld geeft Roth dan: $1ce\ +\ 6\mathfrak{z}\ +\ 12x\ \ gleich\ \ 22.$
Cubus (*ce*) staat voor kubisch ofwel derdemacht.
Zens ($\mathfrak{z}$) staat voor x met zichzelf vermenigvuldigd.
Rad (*radix*) staat voor x, de te zoeken waarde.
Drag staat voor een gewoon getal, een los (*ledig*) getal.
Dus het voorbeeld is: $1x^3 + 6x^2 + 12x = 22.$

Over de naam *cossische* getallen:
“Men leerde [rond 1600] dat het handig was om bij een probleem over getallen het gevraagde getal een naam te geven, meestal een variant van 'ding', in Italië 'cosa', in Duitsland verbasterd tot 'Coss'. Algebra heette daar, en ook in Nederland, nog lang de 'Cossische Kunst'.”
Prof. Henk Bos schrijft daarover in ‘Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde’ (2010).

Gevraagd wordt dus een getal dat voldoet aan de vergelijking.
In de voorliggende tekst wordt 1 voor x^n overal weggelaten.
In de 16e en 17e eeuw wordt de koppeling met (Euclidische) meetkunde steeds losser, maar dat gaat langzaam. Een getal stelt een lengte voor of een verhouding tussen lengtes. Vandaar dat men vooral zoekt naar positieve getallen: dat zijn de ‘ware’ oplossingen.

In een tweede gedeelte komt een deel van de 160 vraagstukken met toepassingen uit de *Arithmetica Philosophica* aan bod. Daarin worden grote getallen gebruikt en vergelijkingen van graad hoger dan 3. Die vaak gekunstelde voorbeelden laten wel de kracht van de oplossingsmethoden voor derdegraads-vergelijkingen zien.

In het laatste gedeelte komen vraagstukken met vergelijkingen van hogere graad voor maar zonder uitwerkingen, wel met antwoorden. Het zijn dus meer vraagstukken voor de lezer ter oefening en een uitdaging aan andere rekenmeesters. In dit pakket staat een greep daaruit met uitwerkingen.

Voor wie het origineel gaat bekijken nog één opmerking.
Tegenwoordig worden zelfstandige naamwoorden in het Duits met een hoofdletter geschreven. In de tekst van Roth is dat niet de regel. Spelling is in die tijd niet vastgelegd. Roth schrijft bijvoorbeeld $viereck$ maar ook overal $\mathfrak{Z}ahlen$ (getallen). De hoofdletterregel wordt pas in de 18e eeuw gangbaar en eind 19e eeuw definitief ingevoerd.

In een vraagstuk of uitwerking verwijst $[n]$ naar een uitleg of opmerking onder die teksten.
De figuren/grafieken zijn vrijwel allemaal gemaakt met *GeoGebra 5.0*.

Prefatio in de Arithmetica

De tekst van Roth begint met een lang voorwoord van 11 pagina's! Daarin worden de heersers bedankt met grote woorden. Professionele wiskundigen, in die tijd 'rekenmeesters', waren vaak in dienst van een vorst en financieel van hen afhankelijk.
In het voorwoord memoreert Roth aan wiskundigen en filosofen, aan hun bijdragen aan kennis en het belang daarvan voor eenieder. De hoogwaardige keurvorst heer Johann Philipsen en de bisschop van Bamberg, zijn vorst en heer, biedt hij altijd zijn onderdanige, gehoorzame en gewenste diensten aan en zij krijgen te lezen:
dit werk gaat over de mooie en bovenal heerlijke kunst van Arithmetica en Geometria maar vergeet ook de andere noodzakelijke kunsten als Astronomie, Muziek, Perspectief en Architectuur niet.[1]
De Arithmetica en Geometria zijn echter het fundament en de basis van alle kunsten.

Zo schrijft de heilige Augustinus over Arithmetica dat niemand zonder rekenkunst (kennis) wereldlijke zaken mag doen. En zo zegt Pythagoras, een oude filosoof, dat wie niet kan rekenen niets kan, want door getal en maat worden dingen helder. Over Plato, het hoofd der filosofen, zegt men dat hij bij zijn scholen heeft geschreven: wie van Geometria niets weet of begrijpt, die blijft buiten.
Dan wordt ook het Boek Genesis genoemd waarin op de 1e dag …, 2e dag … etc. geschapen werd. Onze enige God heeft alles in getal, gewicht en maat geordend. Noah werd bevolen een schip te bouwen van 300 bij 50 bij 50 el: Arithmetica en Geometria zijn dan nodig. En er zijn vier elementen bepalend in onze wereld: aarde, water, lucht en vuur. Archimedes wordt genoemd met zijn badkuip en de vondst om daarmee een gouden kroon op echtheid te kunnen controleren: gewicht en volume zijn dan bepalend. En de bewoners van het eiland Delos wilden een kubus maken die kwa inhoud eens zo groot was als de kubus van de inwoners van Athene: Geometria is dan onmisbaar. Etc, etc.

Hij, Roth, zal dan ook 126 vraagstukken behandelen en nog meer om de kracht van deze kunsten te laten zien. Zodat ook zijn grote heren die wijsheid en kennis tot zich kunnen nemen.

Is getekend te Nürnberg, 16 februari 1608.

Onderdanige, gehoorzame Petrus Roth
rekenmeester en burger alhier.

---

[1] In de vroege middeleeuwen sprak men van 7 vrije kunsten (kundigheden): grammatica, dialectica/logica, retorica, arithmetica, geometria, musica en astronomia. Roth refereert daar aan. 'Vrij' is bedoeld voor de vorming tot vrije burgers.

Derdegraads-vergelijkingen nader bekeken

Bij de zoektocht naar oplossingen van derdegraads-vergelijkingen gebruikt Roth de indeling van Cardano. Roth en Cardano gebruiken enkel niet-negatieve gehele getallen. Dat geeft soms een beperking voor de oplossingsmethode en voor het rekenwerk en het schrijfwerk.

Ga uit van de basisvergelijking: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.
Codeer nu met $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \{0,1,2\}$ met betekenis:
$als\ \bar{a} = 0; 1; 2\ dan\ ontbreekt\ ax^2; wordt\ ax^2\ opgeteld; wordt\ ax^2\ afgetrokken.$
Analoog voor $\bar{b}$ en $\bar{c}$.
Met deze codering zijn er 27 typen vergelijkingen waarvan Roth er 13 behandelt.
In de tabel wordt verwezen naar de volgende opmerkingen:
A -> wordt niet bekeken: oplossing $x = 0$ is meteen te zien. Er resteert een vierkantsvergelijking.
B -> wordt niet bekeken: een 'ware' oplossing is niet-negatief en die heeft deze vergelijking niet.
C -> wordt niet bekeken: een 'ware' oplossing is eenvoudig te vinden.
n -> wordt door Roth behandeld als type nummer n.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$	Een voorbeeld	Opmerking	Notatie van Roth (en Cardano)
0,0,0	$x^3 = 0$	A	
0,0,1	$x^3 + 1 = 0$	B	
0,0,2	$x^3 - 2 = 0$	C: $x = \sqrt[3]{2}$	
0,1,0	$x^3 + x = 0$	A	
0,1,1	$x^3 + x + 2 = 0$	B	
0,1,2	$x^3 + 6x - 20 = 0$	1	$x^3 + 6x = 20$
0,2,0	$x^3 - 2x = 0$	A	
0,2,1	$x^3 - 8x + 3 = 0$	3	$x^3 + 3 = 8x$
0,2,2	$x^3 - 6x - 40 = 0$	2	$x^3 = 6x + 40$
1,0,0	$x^3 + x^2 = 0$	A	
1,0,1	$x^3 + x^2 + 2 = 0$	B	
1,0,2	$x^3 + 6x^2 - 16 = 0$	5	$x^3 + 6x^2 = 16$
1,1,0	$x^3 + x^2 + 2x = 0$	A	
1,1,1	$x^3 + x^2 + 2x + 3 = 0$	B	
1,1,2	$x^3 + 6x^2 + 12x - 22 = 0$	7	$x^3 + 6x^2 + 12x = 22$
1,2,0	$x^3 + x^2 - 2x = 0$	A	
1,2,1	$x^3 + 6x^2 - 31x + 12 = 0$	13	$x^3 + 6x^2 + 12 = 31x$
1,2,2	$x^3 + 6x^2 - 20x - 56 = 0$	9	$x^3 + 6x^2 = 20x + 56$
2,0,0	$x^3 - 2x^2 = 0$	A	
2,0,1	$x^3 - 18x^2 + 64 = 0$	6	$x^3 + 64 = 18x^2$
2,0,2	$x^3 - 6x^2 - 20 = 0$	4	$x^3 = 6x^2 + 20$
2,1,0	$x^3 - x^2 + 2x = 0$	A	
2,1,1	$x^3 - 6x^2 + 4x + 8 = 0$	12	$x^3 + 4x + 8 = 6x^2$
2,1,2	$x^3 - 6x^2 + 12x - 25 = 0$	8	$x^3 + 12x = 6x^2 + 25$
2,2,0	$x^3 - x^2 - 2x = 0$	A	
2,2,1	$x^3 - 6x^2 - 24x + 128 = 0$	11	$x^3 + 128 = 6x^2 + 24x$
2,2,2	$x^3 - 6x^2 - 72x - 729 = 0$	10	$x^3 = 6x^2 + 72x + 729$

Type 1: $x^3 + bx = c$

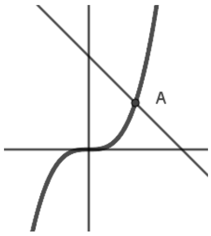
Voorbeeld: $\boldsymbol{x^3 + 6x = 20}$.
Verhef (*multiplicir*) 2, het derde deel van 6, tot de derde macht, dat geeft 8.
Verhef 10, de helft van 20 van het 'losse' (*ledige*) getal, tot de tweede macht, dat geeft 100. Tel hierbij de eerstgenoemde derdemacht (*cubum*) 8, en dat geeft 108. Trek daaruit de wortel en dat is $\sqrt{108}$. Tel daarbij 10 en trek ook 10 af, dan heb je een *binomium*, $\sqrt{108} + 10$, en een *residuum*, $\sqrt{108} - 10$. [1][2] Trek nu de derdegraads wortel van het *residuum,* dat is $\sqrt{3} - 1$ af van de derdemachtswortel van de *binomium,* die is $\sqrt{3} + 1$ [3]. Er resteert 2, de ware oplossing (*geltung radicis*). [4]

> [1] Dit heten tweenamige getallen in het Nederlandse taalgebied in de 17e eeuw.
> [2] Het minteken wordt genoteerd als ∺.
> [3] $\left(\sqrt{3} \pm 1\right)^3 = 6\sqrt{3} \pm 10 = \sqrt{108} \pm 10$. Mooi gekozen getallen dus.[2]
> [4] Een oplossing van een vergelijking wordt vaak 'wortel van een vergelijking' genoemd.
> Met ware oplossing is bedoeld een niet-negatief (en niet-complex) getal.
> De oplossingen $-1 \pm 3i$ 'bestaan' gewoon (nog) niet.

Meer algemeen geeft deze procedure voor $x^3 + bx = c$ met $b, c > 0$:

$$x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} - \frac{c}{2}}.$$ Zie ook bijlage 2.

Omdat $b, c > 0$ worden de derdemachtswortels getrokken uit positieve getallen en is de tweede kleiner dan de eerste.
Dus $x > 0$ en er is blijkbaar altijd één 'ware' oplossing.
Grafisch is dat eenvoudig in te zien met $x^3 = -bx + c$ en $b, c > 0$.



Aanvulling.
Roth schrijft ook nog dat eerst anders begonnen kan worden.
Hij neemt als voorbeeld $x^3 + 400x = 2125$.
Zoek dan naar natuurlijke oplossingen zodat $n(400 + n^2) = 2125$.
Dat geeft een rijtje
$1 \rightarrow 1^2 = 1 \rightarrow 400 + 1 = 401.$
$2 \rightarrow 2^2 = 4 \rightarrow 404.$
…
$5 \rightarrow 5^2 = 25 \rightarrow 425$. En nu geldt: $5 * 425 = 2125$. We hebben dus een oplossing: $x = 5$.

Maar als het niet lukt zo een oplossing te vinden, dan blijven twee tweenamige getallen over. Zie [1] hierboven. En dan, beweert Roth, is de eerste formule van Cardano 'gewoon' te gebruiken en die levert vervolgens altijd een 'ware' oplossing.
Zijn redenering: het *binomium* / *residuum* is van de vorm $\sqrt{p} \pm q$ met rationale getallen en Roth kiest zijn voorbeelden zodat $\sqrt[3]{\sqrt{p} \pm q} = \sqrt{s} \pm t$ (met $t > 0$) dus $\sqrt{s} + t - \left(\sqrt{s} - t\right) = 2t$.
Zo makkelijk gaat het niet altijd. Zie bijvoorbeeld $x^3 + 5x = 11$. Roth geeft daarvan geen voorbeelden maar vermeldt, dat soms ook andere wortels kunnen ontstaan.

---

[2] Zie ook paragraaf '*Bijzondere derdemacht wortels*'.

Type 2: $x^3 = bx + c$

Voorbeeld: $\boldsymbol{x^3 = 6x + 40}$.
Verhef 2, het derde deel van 6, tot de derde macht, dat geeft 8 en trek dat af van 400, het kwadraat van 20, de helft van het 'losse' getal. Er resteert 392.
Tel de wortel hiervan bij 20, dat geeft $20 + \sqrt{392}$. Trek het ook daar van af, dat geeft $20 - \sqrt{392}$.
Neem van deze getallen de derdemachtswortel dus $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}}$ en $\sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$. [1]
Ofwel $2 + \sqrt{2}$ en $2 - \sqrt{2}$. [2] Tel op en ze brengen de oplossing, namelijk 4. [3]

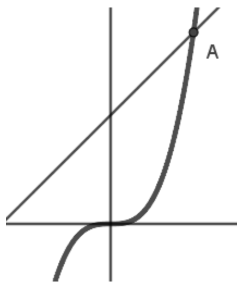
> [1] Hier staat **√v *ce* .** $\mathbf{20 + \sqrt{392}}$, zie het origineel, de toenmalige notatie van de 'derdemachts wortel' met *ce* van cubisch. De punt betekent over het geheel navolgende te nemen.
> [2] $\left(2 \pm \sqrt{2}\right)^3 = 20 \pm 14\sqrt{2} = 20 \pm \sqrt{392}$. Weer mooi gekozen getallen.
> [3] De andere twee oplossingen zijn $-2 \pm i\sqrt{6}$.

Meer algemeen geeft deze procedure voor $x^3 = bx + c$ met $b, c > 0$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$ Er geldt nu $\left(\frac{c}{2}\right)^2 > \left(\frac{b}{3}\right)^3$. (*)

Weer één van de formules van Cardano met de voorwaarde (*).
In dit voorbeeld is b bij $c = 40$ goed gekozen. Er moet gelden: $b < 3\sqrt[3]{400} \approx 22$.
Als aan de voorwaarde wordt voldaan, dan worden de derdemacht wortels getrokken uit positieve getallen en ($\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3} < \frac{c}{2}$). Dus $x > 0$ en er is bijgevolg altijd een ware oplossing.

Grafisch is eenvoudig in te zien dat zo'n vergelijking altijd, onafhankelijk van (*), een positieve oplossing heeft.



Origineel.

1 cᶜ gleich 6 x + 40. Multiplicir 2. den dritten theil der Zahlen radicem cubicè, kompt 8. das subtrahir von 400. alß dem quadrat 20. deß halbē theils der ledigen Zahl / so bleibt 392. dieser Zahl quadratwurtzel addir zu 20. so kompt 20 + √392. subtrahir auch sie davon / so kompt 20 ÷ √392. dieser beyder Zahlen Cubicwurtzel / alß √v cᶜ. 20 + √392. plus √v cᶜ. 20 ÷ √392. oder 2 + √2. vnd 2 ÷ √2. addirt / bringen den werth radicis, nemlich 4.

Aanvulling 1.
Roth schrijft dat eerst anders begonnen kan worden.
Hij neemt als voorbeeld $x^3 = 10x + 639$.
Zoek dan naar natuurlijke oplossingen zodat $n(n^2 - 10) = 639$.
Dan geeft hij een kort rijtje. Het startgetal volgt uit $\sqrt[3]{639} = 8{,}6 \ldots$
$8 \to 8^2 = 64 \to 64 - 10 = 54$.
$9 \to 9^2 = 81 \to 71$. En nu geldt: $9 * 71 = 639$. We hebben dus een oplossing: $x = 9$.

Aanvulling 2.
Er volgt ook een andere zelf gevonden (?) aanpak van vergelijkingen van het type
(**) $x^3 = bx + c$ met $\left(\frac{c}{2}\right)^2 < \left(\frac{b}{3}\right)^3$.
De formule van Cardano kan nu niet gebruikt worden, want dan zou de wortel uit een negatief getal getrokken moet worden. Zie echter ook de opmerking hieronder.
Roth's aanpak in het kort:
Los eerst op: $x^3 + c = bx$. Een vergelijking van type 3.
Noem een oplossing hiervan even y dus $y^3 = by - c$.
dan is $x = \frac{y}{2} + \sqrt{b - 3\left(\frac{y}{2}\right)^2}$ een oplossing van (**).

Een bewijs, dat Roth overigens niet geeft:
$x^3 = bx + c, y^3 = by - c$. Tel de vergelijkingen op. Er volgt:
$x^3 + y^3 = b(x + y)$. Er volgt: $x^2 - xy + y^2 = b$, want $x \neq -y$.
Dus: $x = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4(y^2 - b)}}{2} = \frac{y}{2} + \sqrt{b - 3\left(\frac{y}{2}\right)^2}$. Klaar.

Voorbeeld: $\boldsymbol{x^3 = 110x + 100}$.
Er geldt: $2500 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 < \left(\frac{b}{3}\right)^3 = 49296, \ldots$
Oplossing van $x^3 + 100 = 110x$: $x_1 = 10$.
Oplossing van $x^3 = 110x + 100$: $x = \frac{10}{2} + \sqrt{110 - 3 * \left(\frac{10}{2}\right)^2} = 5 + \sqrt{35}$.

Opmerking.
Men rekende in de 16e en 17e eeuw al wel met 'rare' waarden.
Bijvoorbeeld: $x^3 = 24x + 40$. Nu geldt $20^2 = 400 < 512 = 8^3$.
Dan zou volgen met de formule van Cardano:
$x_1 = \sqrt[3]{20 + \sqrt{-112}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{-112}} = \left(-1 + \sqrt{-7}\right) + \left(-1 - \sqrt{-7}\right) = -2$.
Er werd 'gewoon' doorgerekend met wortels uit negatieve getallen.
De oplossing is overigens geen ware waarde in bovenstaande zin.
De vergelijking heeft evenwel ook een positieve oplossing nl. $x_2 = 1 + \sqrt{21}$.

Cardano noemt dit type getallen overigens al in zijn *Ars Magna*: gezocht zijn twee getallen met som 10 en product 40. Dat zijn de getallen $5 \pm \sqrt{-15}$.
Hij noemt het resultaat 'sofistisch' en subtiel maar verder nutteloos.

Ook Bombelli (1526-1572) werkte al met deze getallen.
Zie https://en.wikipedia.org/wiki/Rafael_Bombelli

Type 3: $x^3 + c = bx$

Voorbeeld: $\boldsymbol{x^3+3=8x}$.
Roth schrijft dat hij nu geen rationaal getal bij de wortels [1] kan vinden en stapt over op de vergelijking: $x^3 = 8x + 3$. (*)
Er volgt een rijtje in het onderzoek naar een oplossing, zie aanvulling 1 bij type 2:
Zoek n zodat $n(n^2 - 8) = 3$.
$1 \to 1^2 = 1 \to\ 1 - 8 = -7$ [2]
$2 \to 4 \to -4$ [2]
$3 \to 9 \to 1$. En nu geldt: $3 * 1 = 3$.
We hebben dus een oplossing: $x = 3$. Van (*).

Een oplossing van de startvergelijking is dan, met $y = 3$:

$$x_1 = \frac{y}{2} - \sqrt{b - 3\left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}.$$

[1] Er zijn twee ware oplossingen.
Zie figuur 1: $x_1 = 0{,}38 \ldots, x_2 = 2{,}61 \ldots$
[2] Roth schrijft hier 7 resp. 4, zonder het minteken.

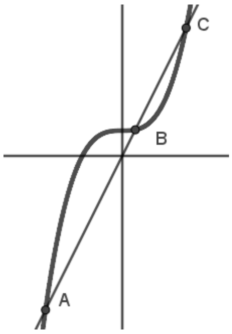

figuur 1

Aanvulling 1.
Ook nu gebruikt Roth een door hem zelf gevonden procedure.
Voorbeeld: $x^3 + 470 = 147x$.
Het zoeken naar een waarde voor n zodat $n(147 - n^2) = 470$.
Dat gaat weer met een rijtje. Waar te beginnen? Hij laat n beginnen onder $\sqrt{147} = 12{,}1 \ldots$
$12 \to 144 \to 147 - 144 = 3$
$11 \to 121 \to 26$
$10 \to 100 \to 47$. En nu geldt: $10 * 47 = 47$. We hebben dus een oplossing: $x_1 = 10$.

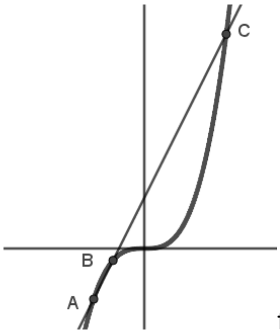
Aanvulling 2.
Roth beweert dat dit type vergelijkingen bij twee ware oplossingen ook één *'gedichte'* oplossing heeft. [1] Als er twee '*gedichte*' (negatieve) oplossingen zijn, dan is er één ware oplossing die gelijk is aan het tegengestelde van de som van die *gedichte* oplossingen. [1]
Gedicht (in het Duits) zou kunnen betekenen 'fictief', 'verzonnen'. Cardano noemt ze 'sofistisch'.
Dit alles geldt onder een voorwaarde. Zie [2].

[1] De bewering wordt niet aangetoond maar is algebraïsch wel goed te begrijpen.
Als x_1, x_2, x_3 oplossingen zijn, dan volgt:
$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ dus: $x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0$.
De x^2-term ontbreekt bij dit type dus $x_3 = -(x_1 + x_2)$.
Als $x_{1,2}$ ware oplossingen zijn, dan is x_3 negatief. Zie figuur 2 hierna voor type 3.
Als $x_{1,2}$ negatieve oplossingen zijn, dan is x_3 positief. Zie figuur 3 hierna voor type 2.
Overigens: als er rare oplossingen zijn, zeg complexe getallen, dan zijn er daarvan twee die geconjugeerd zijn. Hun som is dan weer reëel.

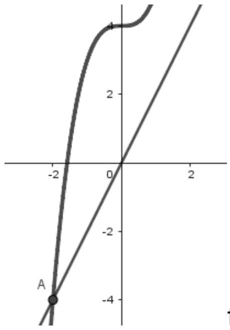
Grafisch ziet dat er zo uit.



figuur 2



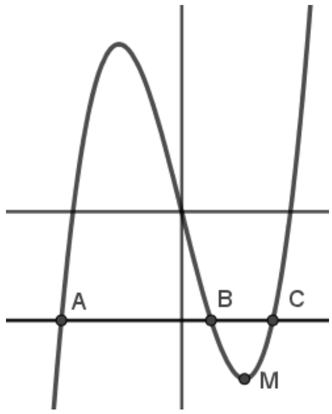
figuur 3



figuur 4

Bij type 3 vergelijkingen zijn er inderdaad niet altijd ware oplossingen. Zie figuur 4.
$x^3 + 4 = 2x$ heeft één negatieve en twee complexe oplossingen: $-2, 1 \pm i$.
Er geldt nu: $\left(\frac{b}{3}\right)^3 < \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Merk op: $-2 = -(1 + i + 1 - i)$.

[2] De voorwaarde voor reële oplossingen is grafisch goed af te leiden.
Neem vergelijking $x^3 + c = bx$ met $b, c > 0$.
Omgeschreven wordt dit: $x(x^2 - b) = -c$.
Zie figuur 5.
De grafiek laat zien wanneer er twee ware waarden zijn.
Punt M heeft coördinaten $(x_M, y_m) = \left(\sqrt{\frac{b}{3}}, -\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}\right)$.
De lijn met vergelijking $y = -c$ heeft twee snijpunten in het 4^e kwadrant, B en C, mits $0 > -c > y_M$.



figuur 5

Dat geeft: $c < \frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}$. Ofwel: $\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$ als voorwaarde.
Een oplossing met multipliciteit 2 ontstaat als het gelijkteken geldt. De lijn raakt dan te M.

Type 4: $x^3 = ax^2 + c$

Roth werkt meteen een voorbeeld uit zonder verklaring van zijn aanpak.
De vergelijking wordt namelijk eerst omgezet naar een vergelijking zonder x^2-term. Er ontstaat dan een vergelijking van type 2. En die is op te lossen.

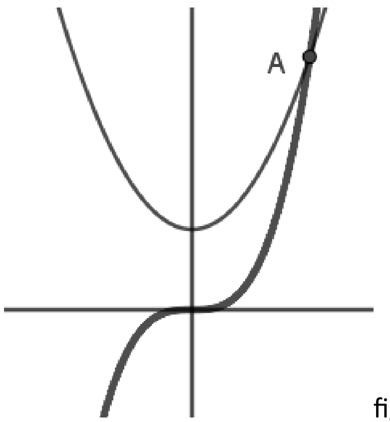
Basisidee.
Substitueer voor x even $y+p$. Dus: $x = y + p$.
Er volgt: $(y+p)^3 = a(y+p)^2 + c$.
En dan: $y^3 + 3py^2 + 3p^2y + p^3 = ay^2 + 2apy + ap^2 + c$.
Ofwel: $y^3 + (3p - a)y^2 = (2ap - 3p^2)y + ap^2 - p^3 + c$.
Neem nu $p = \frac{a}{3}$.
Er resteert: $y^3 = \left(\frac{2a^2}{3} - \frac{3a^2}{9}\right)y + \frac{a^3}{9} - \frac{a^3}{27} + c = \frac{1}{3}a^2y + \frac{2}{27}a^3 + c$.
Zo is vanuit type 4 een vergelijking van type 2 te verkregen.

Voorbeeld: $\boldsymbol{x^3 = 6x^2 + 20.}$
Met $x = y + \frac{6}{3} = y + 2$ volgt de vergelijking: $y^3 = 12y + 36$.
Een oplossing: $y_1 = \sqrt[3]{\frac{36}{2} + \sqrt{\left(\frac{36}{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{36}{2} - \sqrt{\left(\frac{36}{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{3}\right)^3}}$.
Ofwel: $y_1 = \sqrt[3]{18 + \sqrt{260}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{260}}$.

En een oplossing van de oorspronkelijke vergelijking is dan:
$x_1 = \sqrt[3]{18 + \sqrt{260}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{260}} + 2$.

En meer schrijft Roth hier niet bij.

Opmerking.
Bij type 4 is er altijd een 'ware' oplossing.
Zie figuur 1.
De grafieken snijden elkaar in één punt in het 1e kwadrant.



figuur 1

Type 5: $x^3 + ax^2 = c$

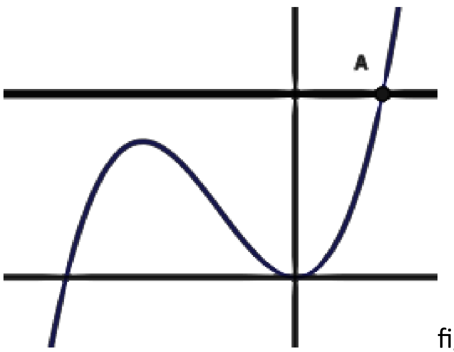
Basisidee.
Substitueer voor x even $y - p$. Dus: $x = y - p$.
Er volgt: $(y-p)^3 + a(y-p)^2 = c$.
En dan: $y^3 - 3py^2 + 3p^2y - p^3 + ay^2 - 2apy + ap^2 = c$.
Ofwel: $y^3 + (a-3p)y^2 + (3p^2 - 2ap)y + ap^2 - p^3 = c$.
Neem nu $p = \frac{a}{3}$.
Er resteert: $y^3 + \left(\frac{3a^2}{9} - \frac{2a^2}{3}\right)y + \frac{a^3}{9} - \frac{a^3}{27} = c$. Ofwel: $y^3 = \frac{1}{3}a^2y + c - 2\left(\frac{a}{3}\right)^3$. (*)
Zo is vanuit type 5 een vergelijking van type 2 verkregen, mits $c > \frac{2}{27}a^3$. (**)
Anders volgt vanuit type 5 een vergelijking van type 3.

Voorbeeld 1: $x^3 + 6x^2 = 16$.
Trek het dubbele van de derdemacht van het derde deel van 6 $\left(2 * \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 16\right)$ af van het losse getal.
Er resteert niets [een speciale situatie]. Neem nu het derde deel van het kwadraat van 6 en dat is 12.
Er resteert dan de gereduceerde vergelijking: $x^2 = 12$. [1]
Nu is een ware oplossing: $\sqrt{12} - \frac{6}{3} = \sqrt{12} - 2$.

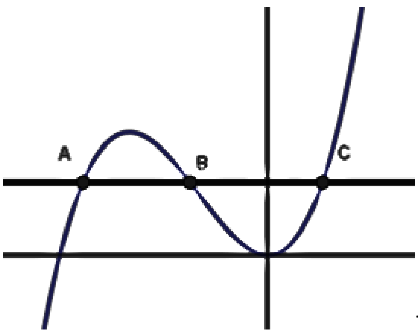
[1] Feitelijk, zie (*): $x^3 = 12x - 0$. Dus: $x = 0 \;\; of \;\; x^2 = 12$.

Voorbeeld 2: $x^3 + 6x^2 = 100$.
Nu verkort: met de substitutie $x = y - 2$ volgt, zie (*): $y^3 = 12y + 84$.
Een ware oplossing is: $y_1 = \sqrt{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt{42 - \sqrt{1700}}$.
En van de oorspronkelijke vergelijking: $x_1 = \sqrt{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt{42 - \sqrt{1700}} - 2$.

Roth maakt nog de opmerking dat bij situatie (**) er ook twee fictieve oplossingen zijn.
Er is overigens altijd een ware oplossing. Zie de figuren 1 en 2.
En er geldt verder voor de drie oplossingen: $x_1 + x_2 + x_3 = -a$.



figuur 1



figuur 2

Type 6: $x^3 + c = ax^2$

Basisidee.
Los eerst deze vergelijking op: $y^3 + c = a\sqrt[3]{c} * y$ (!) Dat is een type 3 vergelijking (mits $\sqrt[3]{c} \in \mathbb{N}$).
Als y een oplossing is, dan is $x = \frac{(\sqrt[3]{c})^2}{y}$ een oplossing van $x^3 + c = ax^2$.
Een bewijs, dat Roth overigens niet geeft:
Met $y = \frac{c^{\frac{2}{3}}}{x}$ ingevuld volgt: $\frac{c^2}{x^3} + c = a\, c^{\frac{1}{3}} * \frac{c^{\frac{2}{3}}}{x} = \frac{ac}{x}$.
Vermenigvuldig met $\frac{x^3}{c}$ en er volgt: $c + x^3 = ax^2$. Klaar!

Voorbeeld: $\boldsymbol{x^3 + 64 = 18x^2}$.
Dan volgt eerst de vergelijking: $y^3 + 64 = 18\sqrt[3]{64} * y = 72y$. [1]
Met de methode van Roth, zie aanvulling 1 bij type 3, volgt:
aan $n(72 - n^2) = 64$ met $n^2 < 72$ voldoet $n = 8$.
Dus één ware oplossing is gevonden. Roth geeft ook meteen deze oplossing $\sqrt{24} - 4$. [2]
En oplossingen van de oorspronkelijke vergelijking zijn dan:
$x_1 = \frac{(\sqrt[3]{64})^2}{8} = 2$, $x_2 = \frac{(\sqrt[3]{64})^2}{\sqrt{24}-4} = \frac{16}{\sqrt{24}-4} = \sqrt{96} + 8$.

[1] Roth gebruikt geen nieuwe variabele maar enkel tekst met daarin de getallen.
[2] Dit volgt niet zomaar met zijn aanpak bij type 3. Zie echter aanvulling 2. Er zijn in deze situatie twee ware oplossingen.

Aanvulling 1.
De methode van type 4 en 5, substitutie, volgt ook. Roth verwijst hier naar het 40e hoofdstuk uit boek 10 van Cardano. Voorbeeld: $x^3 + 80 = 9x^2$.
Na substitutie van $x = y + 3$ is op te lossen: $y^3 + 26 = 27y$.
Dat geeft: $y = 1$. En daarmee volgt voor een ware oplossing: $x = 4$.

Aanvulling 2.
Roth beschrijft een methode om bij een ware waarde bij dit type vergelijking een andere ware waarde te vinden, zonder bewijs.
Hij schrijft hier, als x_1 gevonden is: $x_2 = \frac{1}{2}(a - x_1) + \sqrt{(a - x_1)(x_1 + \frac{1}{4}(a - x_1))}$.
Daarmee volgt bij $x^3 + 64 = 18x^2$ en $x_1 = 2$: $x_2 = 8 + \sqrt{16(2 + 4)} = 8 + \sqrt{96}$.

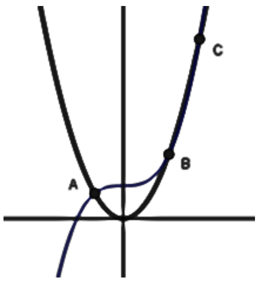
In feite volgt dit uit de ontbinding van de vergelijking.
Als x_1 een oplossing is, dan volgt:
$x^3 - ax^2 + c = (x - x_1)(x^2 + (x_1 - a)x + (x_1 - a)x_1)$.
Een oplossing van de kwadratische vergelijking is nu:
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(-(x_1 - a) + \sqrt{(x_1 - a)^2 - 4x_1(x_1 - a)}\right) = \frac{1}{2}(a - x_1) + \sqrt{(x_1 - a)(\frac{1}{4}(x_1 - a) - x_1)}.$$

De formule van Roth (en Cardano?) is dus een herschrijving van deze formule.

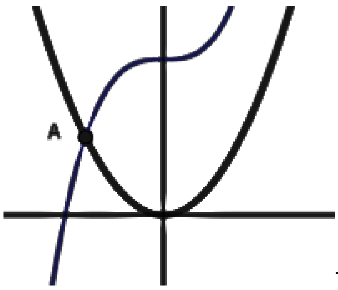
Hier is dus te zien hoe vergelijkingen ontbonden kunnen worden.
Met $x^3 - ax + c = (x - x_1)(x^2 + x_1 x + (x_1^2 - a))$
zou nu volgen dat een oplossing van de kwadratische vergelijking is:
$x_2 = \left(-(\frac{x_1}{2}) + \sqrt{a - 3\left(\frac{x_1}{2}\right)^2}\right).$

Daarmee volgt bij $x^3 + 64 = 72x$ en $x_1 = 8: x_2 = -4 + \sqrt{24}$.
Mogelijk heeft Roth zo snel de tweede ware waarde bij [2] gevonden.

In figuur 1 is te zien dat als er een ware oplossing is, dan is er ook een tweede ware oplossing.
In figuur 2 is te zien dat er niet altijd ware oplossingen zijn. Bijv. $x^3 + 2 = x^2$.



figuur 1



figuur 2

Type 7: $x^3 + ax^2 + bx = c$

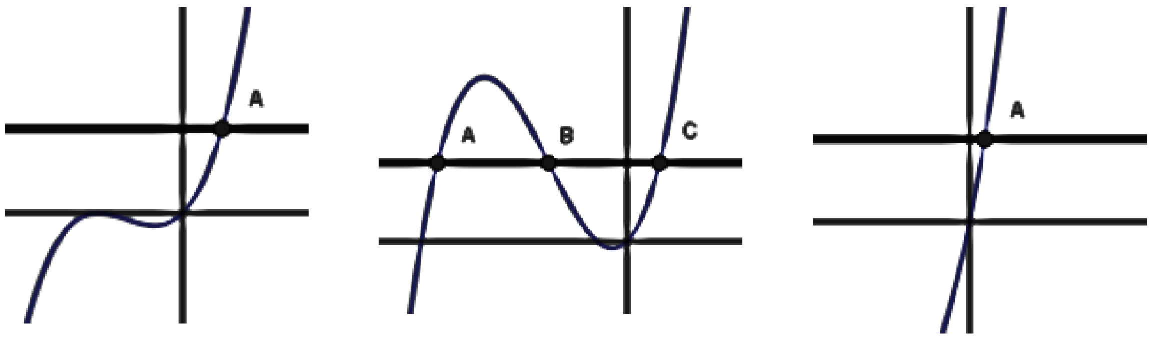
Basisidee.
Substitueer voor x even $y - p$. Dus: $x = y - p$.
Er volgt: $(y-p)^3 + a(y-p)^2 + b(y-p) = c$.
En dan: $y^3 - 3py^2 + 3p^2y - p^3 + ay^2 - 2apy + ap^2 + by - bp = c$.
Ofwel: $y^3 + (a - 3p)y^2 + (3p^2 - 2ap + b)y + ap^2 - p^3 - bp = c$.
Neem nu $p = \frac{a}{3}$.
Er resteert: $y^3 + \left(\frac{3a^2}{9} - \frac{2a^2}{3} + b\right)y + \frac{a^3}{9} - \frac{a^3}{27} - \frac{ba}{3} = c$.
Ofwel: $y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y = c - 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \frac{ab}{3}$.
Afhankelijk van tekens kan hier een type 1, 2 of 3 staan of een bijzonder geval.

Voorbeeld 1: $\boldsymbol{x^3 + 6x^2 + 12x = 22}$.
Met $x = y - 2$ volgt de vergelijking: $y^3 = 30$. Dus $y_1 = \sqrt[3]{30}$ en $x_1 = \sqrt[3]{30} - 2$.
Roth noemt dit de eerste wijze (van aanpak). Een bijzonder geval dus: zonder y -term.

Voorbeeld 2: $\boldsymbol{x^3 + 3x^2 + 9x = 171}$.
Weer met het basisidee en $x = y - 1$ volgt nu: $y^3 + 6y = 178$. Dit is een vergelijking van type 1.
Een oplossing: $y_1 = \sqrt[3]{\sqrt{7929} + 89} - \sqrt[3]{\sqrt{7929} - 89}$.
Dat geeft een ware oplossing van de vergelijking $x_1 = y_1 - 1$. [In de tekst staat *minus* **2**].

Voorbeeld 3: $\boldsymbol{x^3 + 6x^2 + x = 14}$.
Weer met het basisidee en $x = y - 2$ volgt nu: $y^3 = 11y$. Een bijzonder geval dus: zonder *ledig* getal. Een oplossing: $y_1 = \sqrt{11}$. En dan $x_1 = \sqrt{11} - 2$.

Er is altijd een ware oplossing bij type 7. Zie de grafieken behorend bij de drie voorbeelden.



Type 8: $x^3 + bx = ax^2 + c$

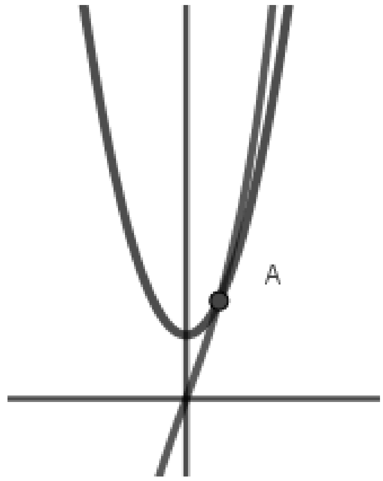
Basisidee.
Zoals bij vorige typen wordt ook nu gesubstitueerd: $x = y + \frac{a}{3}$.

Er volgt de vergelijking: $y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y = c + 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}ab$.

Noteer even: $y^3 + Py = Q$. Roth gaat de gevallen na met P / Q zijnde positief / negatief / nul.

Voorbeeld 1: $x^3 + 12x = 6x^2 + 25$.
Met $x = y + 2$ volgt: $y^3 = 17$. $[P = 0, Q > 0]$
Een bijzonder geval: $x_1 = \sqrt[3]{17} + 2$.

Er is altijd zeker één ware oplossing.
Zie de grafiek.



Voorbeeld 2: $x^3 + 15x = 6x^2 + 24$.
Met $x = y + 2$ volgt: $y^3 + 3y = 10$. $[P > 0, Q > 0]$
Een type 1 vergelijking en er volgt één ware oplossing.

Voorbeeld 3: $x^3 + 10x = 6x^2 + 4$.
Met $x = y + 2$ volgt: $y^3 = 2y$. $[P < 0, Q = 0]$
Weer een apart geval: $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.

Voorbeeld 4: $x^3 + 21x = 9x^2 + 5$.
Met $x = y + 3$ volgt: $y^3 + 4 = 6y$. $[P < 0, Q < 0]$
Een type 3 vergelijking en er volgen drie ware oplossingen:
$x_1 = 5, x_2 = 2 + \sqrt{3}, x_3 = 2 - \sqrt{3}$.

Roth geeft nog meer voorbeelden.

Aanvulling:
Roth geeft ook een aanpak en noemt daarbij Ludovico de Ferrari (1522-1565). Deze wiskundige is bekend van een oplossingsformule met radicalen van een vierdegraads vergelijking.

Feitelijk begint Ferrari bij de situatie $b = \frac{1}{3}a^2$.

Er volgt met bovenstaand basisidee: $y^3 = c - \left(\frac{a}{3}\right)^3$. En dan: $x_1 = \frac{1}{3}a + \sqrt[3]{c - \left(\frac{a}{3}\right)^3}$.

Voorbeelden:

$x^3 + 12x = 6x^2 + 8$. Er geldt: $c = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ dus $x_1 = 2$ is een oplossing.

$x^3 + 12x = 6x^2 + 9$. Er geldt: $c > \left(\frac{a}{3}\right)^3$ dus $x_1 = 2 + 1 = 3$ is een oplossing.

$x^3 + 12x = 6x^2 + 7$. Er geldt: $c < \left(\frac{a}{3}\right)^3$ dus $x_1 = 2 - 1 = 1$ is een oplossing.

Als $b \neq \frac{1}{3}a^2$ dan komen soortgelijke situaties als in de voorbeelden 1, 2,… voorbij.

Type 9: $x^3 + ax^2 = bx + c$

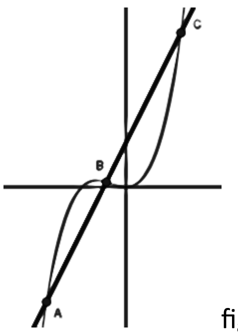
Basisidee:
Werk nu met $x = y - \frac{a}{3}$.
Er volgt: $y^3 = \left(b + \frac{1}{3}a^2\right)y + c - 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - b\left(\frac{a}{3}\right)$.

Voorbeeld: $\boldsymbol{x^3 + 6x^2 = 20x + 56}$.
Met $x = y - 2$ volgt: $y^3 = 32y$. En dan: $y^2 = 32$. [1] Een ware oplossing is dus: $x_1 = \sqrt{32} - 2$.

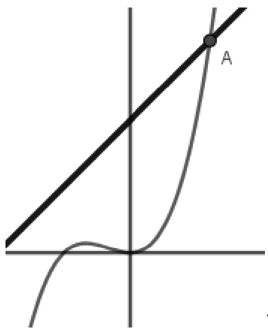
[1] Feitelijk ook $y = 0$. Andere oplossingen zijn: $x_2 = -2, x_3 = -\sqrt{32} - 2$.

Dit voorbeeld is een speciaal geval. Er kan ook een type 2 of 3 ontstaan.

Dit zijn voorkomende situaties bij type 9. Er is altijd een ware oplossing. Zie de grafieken.
De grafiek in figuur 1 past bij het voorbeeld.



figuur 1



figuur 2

Bij het voorbeeld $x^3 + 6x^2 = 20x + 21$ schrijft Roth de drie oplossingen wel op:
$x_1 = 3, x_2 = -4\frac{1}{2} + \sqrt{13\frac{1}{4}}, x_3 = -4\frac{1}{2} - \sqrt{13\frac{1}{4}}$.
Hij noemt de laatste twee fictief, maar constateert: $x_1 = -a - (x_2 + x_3)$.
Zie bij type 5 waar hij dit ook constateert.

Opmerking:
Mogelijk brengt dit hem op de volgende stelling, die bij niet bewijst maar aantoont met een voorbeeld. Het bewijs volgt overigens simpel door invulling.
Als x_1 een ware / fictieve oplossing is van $x^3 + c = ax^2 + bx$ (type 11)
dan is $-x_1$ een fictieve / ware oplossing van $x^3 + ax^2 = bx + c$ (type 9).

Voorbeeld: $x^3 + 4 = 3x^2 + 5x$ heeft twee ware en één fictieve oplossingen:
$x_1 = 4, x_2 = \sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}, x_3 = -\left(\sqrt{1\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)$.
De vergelijking $x^3 + 3x^2 = 5x + 4$ heeft dan twee fictieve en één ware oplossingen:
$x_1 = -4, x_2 = -\left(\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right), x_3 = \frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$.

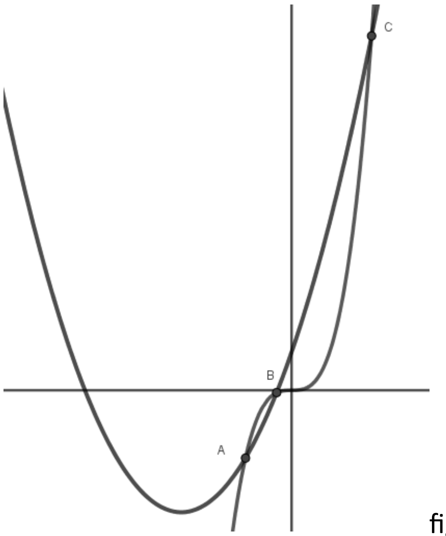
Type 10: $x^3 = ax^2 + bx + c$

Voorbeeld: $\boldsymbol{x^3 = 6x^2 + 72x + 729}$.
Substitutie van $x = y + \frac{a}{3} = y + 2$ geeft nu
$y^3 = \left(b + \frac{1}{3}a^2\right)y + c + 2\,\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \frac{1}{3}ab = 84y + 889$. (*)

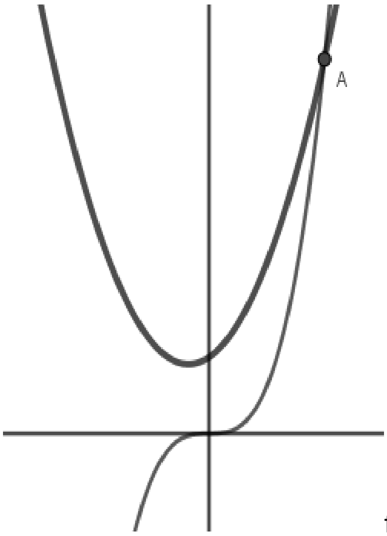
En er volgt één ware oplossing: $x_1 = \sqrt[3]{444\frac{1}{2} + \sqrt{175628\frac{1}{4}}} + \sqrt[3]{444\frac{1}{2} - \sqrt{175628\frac{1}{4}}} + 2$.

Door bovenstaande substitutie ontstaat altijd bij (*) een type 2 vergelijking met één ware oplossing.

Dat is ook te zien met de onderstaande grafieken. De grafiek in figuur 2 past bij het voorbeeld.



figuur 1



figuur 2

Type 11: $x^3 + c = ax^2 + bx$

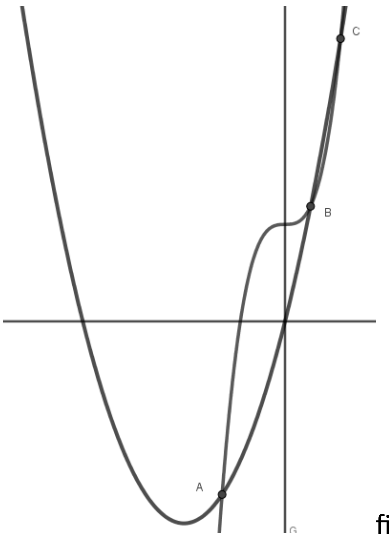
Voorbeeld: $\boldsymbol{x^3 + 128 = 6x^2 + 24x}$.
Substitutie van $x = y + \frac{a}{3} = y + 2$ geeft nu:
$y^3 = \left(b + \frac{1}{3}a^2\right)y + 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \frac{1}{3}ab - c = 36y - 64$. (*)
Dat geeft een vergelijking van type 3: $y^3 + 64 = 36y$.

De oplossingen zijn: $y_1 = 2, y_2 = \sqrt{33} - 1, y_3 = -(1 + \sqrt{33})$.

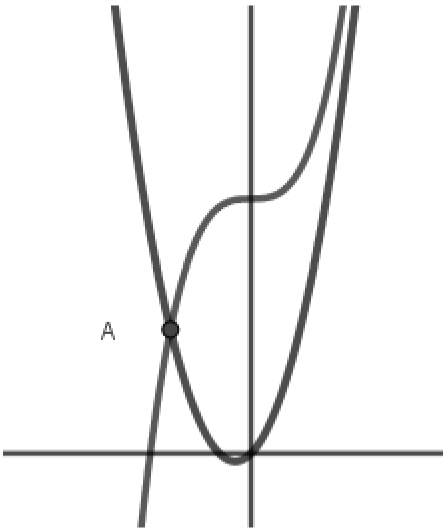
Ware oplossingen van de startvergelijking zijn: $x_1 = 4, x_2 = \sqrt{33} + 1$.

Mocht $2\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \frac{1}{3}ab - c > 0$ dan ontstaat bij (*) een vergelijking van type 2.

Aan de onderstaande grafieken is te zien dat er ook situaties zijn zonder een ware oplossing.
De grafiek in figuur 1 past bij het voorbeeld.
De grafiek in figuur 2 bij de vergelijking: $x^3 + 4 = 2x^2 + x$.



figuur 1



figuur 2

Zie ook de opmerking bij type 9:
een oplossing x_1 van $x^3 + c = ax^2 + bx$ (type 11) geeft
een oplossing $-x_1$ van $x^3 + ax^2 = bx + c$ (type 9).

Type 12: $x^3 + bx + c = ax^2$

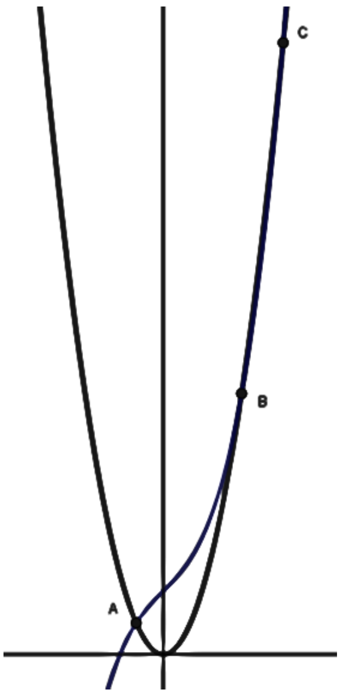
Basisidee:
Zoals bij vorige typen wordt ook nu gesubstitueerd: $x = y + \frac{a}{3}$
Er volgt de vergelijking: $y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}ab - c$.

Voorbeeld: $\boldsymbol{x^3 + 4x + 8 = 6x^2}$.
Dat geeft met $x = y + 2$ en omdat $\left(b - \frac{1}{3}a^2\right) < 0$
$y^3 = 8y$. (*)

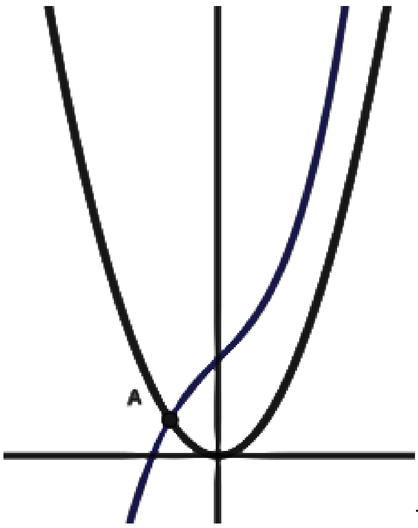
Een ware oplossing van de startvergelijking is dus: $x_1 = y_1 + 2 = \sqrt{8} + 2$.

Aanvulling:
Roth constateert dat bij de vergelijking (*) iets gemist wordt.
Hij schrijft dat er nog twee (fictieve) waarden zijn: $y_2 = -\sqrt{8}, y_3 = -0$ (!)
Dat geeft voor de startvergelijking:
$x_2 = 2 - \sqrt{8}$, een fictieve oplossing, en $x_3 = 2$. En daarmee is er dus nog een ware oplossing.

Er kunnen dus twee ware oplossingen zijn, zie figuur 1, maar soms ook geen, zie figuur 2.



figuur 1



figuur 2

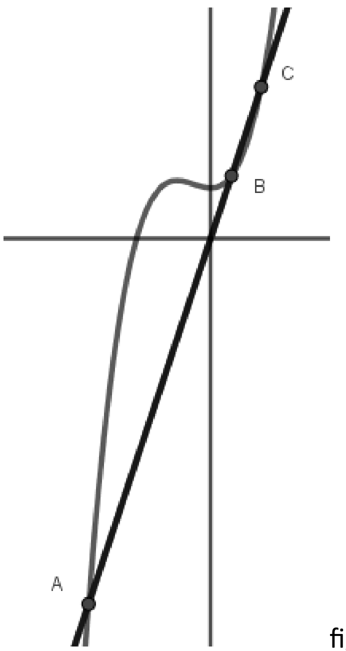
Type 13: $x^3 + ax^2 + c = bx$

Basisidee:
Werk nu met $x = y - \frac{a}{3}$.
Er volgt: $y^3 + c + 2\left(\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(\frac{a}{3}\right) = \left(b + \frac{1}{3}a^2\right)y$.
Dit is altijd een type 3 vergelijking.

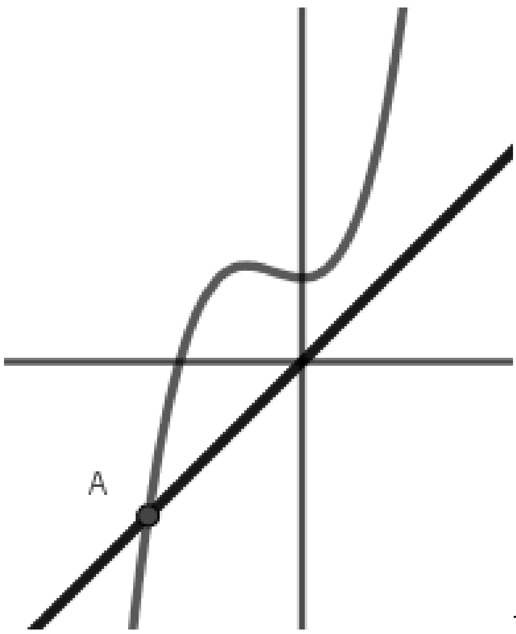
Voorbeeld: $\boldsymbol{x^3 + 6x^2 + 12 = 31x}$.
Met $x = y - 2$ volgt:
$y^3 + 90 = 43y$. Met $y_1 = 5, y_2 = \sqrt{24\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{2}$ en $y_3 = -\left(\sqrt{24\frac{1}{4}} + 2\frac{1}{2}\right)$.

Dat geeft twee ware waarden voor de startvergelijking: $x_1 = 3, x_2 = \sqrt{24\frac{1}{4}} - 4\frac{1}{2}$.

Er kunnen dus twee ware oplossingen zijn, zie de grafiek in figuur 1, passend bij het voorbeeld, maar ook geen, zie figuur 2.



figuur 1



figuur 2

Einde eerste deel.

De ‘*cubicossische*’ tuin van plezier

Roth schrijft dat hij nu in dit deel van deze kunstige rekenkunde alle vraagstukken zal gaan behandelen uit de *Arithmetischer Cubicossischer Lustgarten* van Johann Faulhaber (1580-1635), rekenmeester uit Ulm.
In de volgende tekst wordt een kwart van de 160 vraagstukken besproken.

NB1: In de vraagstukken staat vaak dit muntsymbool:  Dat is nu vrij vertaald in florijnen.
NB2: De veel voorkomende ‘*centner*’ is een oude Nederlandse en Duitse gewichtsmaat: 100 pond.
NB3: In de vraagstukken wordt telkens opnieuw x gebruikt bij een volgende vergelijking. Dat is de *radix*, het te zoeken getal. Om verwarring te voorkomen wordt nu echter steeds een nieuwe variabele ingevoerd als een nieuwe vergelijking in dezelfde vraag ontstaat.

Vrg 1 [3]. Een kapitein heeft een aantal soldaten onder een vaandel: 194 Duitsers, 123 Engelsen en 148 Italianen. Hij betaalt ze in totaal per maand 2035 florijnen.
Onder een ander vaandel vallen 166 Duitsers, 177 Engelsen en 116 Italianen, die hij per maand samen 2007 florijnen betaalt. Onder het derde vaandel vallen 178 Duitsers, 141 Engelsen en 124 Italianen, die hij per maand samen 1939 florijnen betaalt.
Wat krijgt een Duitse, een Engelse en een Italiaanse soldaat per maand betaald?

➔ Veronderstel dat zij per maand respectievelijk x, A, B florijnen krijgen.
Uitgeschreven wordt dat dan:
$194x + 123A + 148B = 2035$
$166x + 177A + 116B = 2007$
$178x + 141A + 124B = 1939.$
Roth lost dit stelsel op door een substitutiemethode.
Er volgt: $B = \frac{2035-194x-123A}{148}$ maar ook: $B = \frac{2007-166x-177A}{116}$.
Die zijn dus gelijk en daarmee volgt: $A = \frac{7622-258x}{1491}$.
En dan: $B = \frac{2035-194x-123A}{148} = \frac{2035-194x}{148} - \frac{123}{148}A = \frac{25859041-3176080x}{2721572}$.
Tenslotte: $178x + 141\left(\frac{7622-258x}{1491}\right) + 124\left(\frac{25859041-3176080x}{2721572}\right) = 1939.$

Dat wordt uiteindelijk en Roth werkt dit allemaal zeer uitvoerig uit op drie pagina’s:
$6050980x = 27229410$ ofwel: $x = 4\frac{1}{2}$.
Invullen in de uitdrukkingen voor A en B geeft: $A = 4\frac{1}{3}, B = 4\frac{1}{4}$.
Waarna Roth nog opmerkt: En dit klopt, dat mag je proberen (te bewijzen of te controleren?).

Vrg 5. Gegeven is een meetkundige rij van zes termen met reden 3. Vermenigvuldig de kwadraten van alle termen met met elkaar en verdeel dat in twee gelijke delen. Tel bij het ene deel 8 op en trek bij het andere deel 8 af. Vermenigvuldig deze getallen nu en er komt

3 De nummering is die van het boek van Roth met Romeinse notatie aldaar.

$N = 177801404718372423264819198352687040$ [36 cijfers!].
Wat is die meetkundige rij?

➔ Noem het product $2x$.
Er volgt: $(x+8)(x-8) = N$.
Dus: $2x = 2 * \sqrt{N+64} = 843330077059682304$. (*)
Die meetkundige rij is $y, 3y, 9y, 27y, 81y, 243y$. [standaard: $a, ar, ar^2, \ldots$]
Het product van de kwadraten is
$y^2 * 9y^2 * 81y^2 * 729y^2 * 6561y^2 * 59049y^2 = 205891132094649y^{12} = 2x$. Zie (*).
Ofwel: $y^{12} = 4096$. $y = \sqrt[12]{4096} = 2$.
Dus de rij is $2, 6, 18, 54, 162, 486$.
Waarna Roth nog opmerkt: Dat mag je proberen (te bewijzen of te controleren?).

Vrg 8. Een *trideca-, tetradeca-, heptodeca-* en *octodeca-gonaal* getal van gelijke *terminis* opgeteld zijn samen 58562. Wat zijn deze polygonale getallen?

➔ Zie paragraaf *Polygonale getallen*.
Bedoeld met *terminis* is hier dat de laatste laag, de 'basis' van de piramiden wordt bekeken bij de getallen. Roth schrijft dat elke *quadrat*-wortel gesteld wordt op x. Er volgt:

Trideca	*Tetradeca*	*Heptodeca*	*Octodeca*
$= 13 = v + 2$.	$= 14 = v + 2$.	$= 17 = v + 2$.	$= 18 = v + 2$.
Laatste laag: $(xv - (v-1))$ dus $(11x - 10)$.	Laatste laag: $(xv - (v-1))$ dus $(12x - 11)$.	Laatste laag: $(xv - (v-1))$ dus $(15x - 14)$.	Laatste laag: $(xv - (v-1))$ dus $(16x - 15)$.
Plus eerste laag 1 met aantal lagen x geeft: $11x^2 - 9x$.	Plus eerste laag 1 met aantal lagen x geeft: $12x^2 - 10x$.	Plus eerste laag 1 met aantal lagen x geeft: $15x^2 - 13x$.	Plus eerste laag 1 met aantal lagen x geeft: $16x^2 - 14x$.

Elk van deze getallen wordt gedeeld door 2. Het zijn de getallen $B(x) = \frac{1}{2}x(2 + (x-1)v)$.
Er volgt: $\frac{1}{2}(54x^2 - 46x) = 58562$.
Ofwel: $27x^2 = 23x + 58562$. $[27x^2 - 23x - 58562 = 0 \quad is \quad ax^2 - bx - c = 0]$
En dan: $x_1 = \frac{\left(\sqrt{(4ac+b^2)}+b\right)}{2a} = \frac{\sqrt{6325225}+23}{54} = \frac{2515+23}{54} = 47$.

Roth laat ook nog drie ietwat andere routes zien om aan de vierkantsvergelijking te komen.

En de getallen zijn:
Trideca: $= \frac{11*47^2-9*47}{2} = 11938$.
Tetradeca: $= \frac{12*47^2-10*47}{2} = 13019$.
Heptodeca: $= \frac{15*47^2-13*47}{2} = 16262$.
Octodeca: $= \frac{16*47^2-14*47}{2} = 17343$.

Roth eindigt met de opmerking dat hij hier nu vier bewerkingen heeft laten zien om aan de vergelijking te komen, zodat men kan zien, hoe men ook in navolgende vragen op meer dan een manier de oplossing kan vinden. Maar men moet weten dat ik [Roth] voortaan in zulke voorbeelden niet meer dan één aanpak laat zien, namelijk de nu getoonde omdat die de kortste en snelste is.

Vrg 10. Gegeven is $x^{12}+36x^3+7=28x^6$. [1]
De vraag is nu of dit door gewone berekening is op te oplossen.

➔ Roth noemt dit een echt kunstige vraag die bij de x^4-coss-rekening hoort. In de uitwerking toont hij aan, dat een echte berekening (met wortelvormen) mogelijk is. Dat kost zeven pagina's…
Begin met de derde macht terzijde te leggen. Ofwel substitueer: $y=x^3$. (*)
Er volgt: $y^4+36y+7=28y^2$.
Voeg nu aan beide zijden iets toe, zodat aan beide kanten de wortel kan worden getrokken. [2]
Dat wordt dan: $y^4+2ty^2+t^2=2ty^2+t^2+28y^2-36y-7$. (**)
Rechts staat nu: $(2t+28)y^2-36y+t^2-7$. [3]
Er volgt meteen: $36^2=4(2t+28)(t^2-7)$ ofwel: $520=2t^3+28t^2-14t$.
Herschreven: $t^3+14t^2=260+7t$. Dat is een type 9 vergelijking [4]. (***)

Er volgt met substitutie $t=z-\frac{14}{3}$: $z^3=72\frac{1}{3}z+24\frac{2}{27}$.
Roth herschrijft naar $27z^3=651z+650$. (****)
En met $w=3z$ volgt: $w^3=651w+650$. Een type 2 vergelijking.
Oplossingen zijn: $w_1=26, w_2=-25, w_3=-1$.
Oplossingen van (****) zijn: $z_1=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}, z_2=-8\frac{1}{3}, z_3=-\frac{1}{3}$.

Oplossingen van (***) zijn dus: $t_1=8\frac{2}{3}-4\frac{2}{3}=4, t_2=-13, t_3=-5$.
Alle drie de situaties worden nagelopen.
Eerst $t_1=4$.
Dat geeft bij (**): $y^4+8y^2+16=36y^2-36y+9$.
Ofwel: $(y^2+4)^2=(6y-3)^2$ dus: $y^2+4=6y-3\ of\ 3-6y$.
De tweedegraads vergelijkingen hebben als oplossingen: $y_{1,2}=3\pm\sqrt{2}, y_{3,4}=-3\pm 2\sqrt{2}$.
Dan: $t_2=-13$.
Dat geeft bij (**): $y^4-26y^2+169=2y^2-36y+162$.
Ofwel: $(y^2-13)^2=\left(\sqrt{2}y-\sqrt{162}\right)^2$ dus: $y^2-13=\pm(\sqrt{2}y-\sqrt{162})$.
Deze tweedegraads vergelijkingen hebben dezelfde oplossingen als hierboven.
Dan: $t_3=-5$.
Dat geeft bij (**): $y^4-10y^2+25=18y^2-36y+18$.
Ofwel: $(y^2-5)^2=\left(\sqrt{18}y-\sqrt{18}\right)^2$ dus: $y^2-5=\pm(\sqrt{18}y-\sqrt{18})$.
Deze tweedegraads vergelijkingen hebben dezelfde oplossingen als hierboven.

Met de ware oplossingen $y_{1,2}$ volgen twee ware oplossingen van de startvergelijking. [4]
Zie (*): $x_1=\sqrt[3]{3+\sqrt{2}}, x_2=\sqrt[3]{3-\sqrt{2}}$.

[1] In de tekst staat $1.\mathfrak{z}\mathfrak{z}.\,Cub.\,pl.\,36+\cdots$ Dat is te lezen als $1(x^2x^2)^3+36+$…
[2] Het basisidee van Ferrari. Verander zodat er staat: $(y^2+t)^2=(py+q)^2$.
[3] Dit moet zoiets worden als $(py+q)^2$ en dat lukt als discriminant $=0$.
De discriminant staat in de volgende regel in de tekst. Die uitleg staat er niet bij.

[4] Aan type-vermelding doet Roth zelden. In deze tekst gebeurt dat wel.

[4] De start vergelijking heeft in totaal 12 oplossingen: nog twee negatieve en acht complexe.
De negatieve zijn: $x_3 = -\sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}$, $x_4 = -\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}$.

Vrg 14. Er zijn twee getallen met verschil 8. Als het kwadraat van het kleinste getal opgeteld wordt bij de derdemacht van het grootste, dan is die som 52. Om welke getallen gaat het?

➔ Stel het grootste getal is x. Dan is het kleinste $(x - 8)$. Of het grootste is $(x + 8)$ en het kleinste x. Of het grootste $(x + 4\ )$ en het kleinste $(x - 4)$. Maar wij blijven bij de eerste aanname.
Er volgt:
$x^3 + (x - 8)^2 = 52$. Ofwel: $x^3 = 16x - x^2 - 12$. (*)
Deze vergelijking wordt om te beginnen herschreven door een regel van Cardano, beschreven in het eerste deel van zijn boek in hoofdstuk 13. Die aanpak staat bij type 13.

Met $x = y - \frac{1}{3}$ volgt: $y^3 + 17\frac{11}{27} = 16\frac{1}{3}y$.
Alles keer 27 en dan met $z = 3y$ volgt: $z^3 + 470 = 147z$. (**) Een type 3 vergelijking.

Roth schrijft dat hij dit nu wel met de 10e regel van Cardano kan oplossen en dat heeft hij zich ook voorgenomen, maar hij laat toch zijn aanpak zien, zoals getoond bij type 2 en 3.

Zoek n zodat $(147 - n^2)n = 470$.
Omdat alles positief moet blijven, begint hij bij 12.
$12 \to n^2 = 144 \to 147 - n^2 = 3$.
$11 \to 121 \to 26$.
$10 \to 100 \to 47$. En nu geldt: $10 * 47 = 470$. Dus een oplossing: $n = 10$.

Een ware oplossing van (**) is dus: $z_1 = 10$.
Nu gaat hij op zoek naar de andere ware en fictieve oplossingen.
Zie paragraaf *Ontbinding in factoren?*

Er volgt meteen: $z_{2,3} = -\left(\frac{z_1}{2}\right) \pm \sqrt{b - 3\left(\frac{z_1}{2}\right)^2} = -5 \pm \sqrt{72}$.
Dus de twee ware oplossingen van (**) zijn: $z_1 = 10, z_2 = \sqrt{72} - 5$.
De fictieve oplossing is: $z_3 = -\sqrt{72} - 5$.

Dat geeft voor (*) als oplossingen:
$x_1 = y_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}z_1 - \frac{1}{3} = 3, x_2 = \sqrt{8} - 2, x_3 = -\sqrt{8} - 2$.

Het gaat dus om de getallen $3\ en - 5$ of $\left(\sqrt{8} - 2\right)\ en\ (\sqrt{8} - 10)$ of $\left(-\sqrt{8} - 2\right)\ en\ (-\sqrt{8} - 10)$.

Vrg 15. Iemand verkoopt een aantal centner vet. Een deel daarvan, 10%, is onbruikbaar: tarra.
Voor de hoeveelheid vet krijgt hij drie keer de wortel uit die hoeveelheid minus $\frac{1}{8}$ [florijn] kosten in florijnen betaald. [1] In totaal krijgt hij 171 florijnen.
Hoeveel centner vet heeft hij verkocht?

➔ Stel dat hij x^2 centner vet verkoopt.
Dat levert de verkoper op per centner: $3x - \frac{1}{8}$ florijnen.
Bij $10x^2$ zou er netto aan vet zijn $9x^2$.

Totaal verdiend dus: $9x^2\left(3x-\frac{1}{8}\right)*\frac{1}{10}=171$.
Dat geeft de vergelijking: $216x^3-9x^2=13680$.
En met $y=6x$ (*) volgt: $y^3=\frac{1}{4}y^2+13680$.
Dit is een type 4 vergelijking, maar niet met gehele getallen.

Vemenigvuldig met 64 en substitueer: $z=4y$. (**)
Er volgt: $64y^3=16y^2+875520$ en dan: $z^3=z^2+875520$.
Nu is het een type 4 vergelijking met gehele getallen.
Dat geeft, na veel rekenwerk door Roth, de ware oplossing $z_1=96$.

Roth past ook zijn eigen methode toe:
Het zoeken is naar een waarde voor n zodat $n^2(n-1)=875520$.
Dat gaat weer met een rijtje. Merk op: $\sqrt[3]{875520}=95{,}6\ldots$
$95 \rightarrow n-1=94 \rightarrow n^2=9025$
$96 \rightarrow 95 \rightarrow 9216$. En nu geldt: $9216*95=875520$. We hebben dus een oplossing: $n=96$.

En met $z_1=96$ volgt (**) $y_1=\frac{96}{4}=24$ en (*) $x_1=4$.
Dus er zijn $4^2=16$ centner vet verkocht.

[1] De tekst is lastig te lezen en is nu vrijer vertaald.

Bijzondere derdemacht wortels

Roth weet dat sommige derdemachtswortels uit tweenamige getallen 'mooi' te schrijven zijn als andere tweenamige getallen. Hij adviseert de lezer daarom eerst het navolgende te lezen.

Zijn voorbeeld: $\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}$ en $\sqrt[3]{45-\sqrt{1682}}$.
Trek de derdemachts-wortel uit $\left(45^2-\left(\sqrt{1682}\right)^2\right)=343$. Dat is: 7.
Zoekt nu getallen zodat $x^2=7+y$. Dat geeft: $y=2, x=3$.
Die '2' volgt uit het feit dat $\sqrt{1682}=29\sqrt{2}$. (*)
En nu geldt: $\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}=3+\sqrt{2}$ en $\sqrt[3]{45-\sqrt{1682}}=3-\sqrt{2}$.

Het idee hierachter is, wat Roth overigens niet opschrijft:
Als $\sqrt[3]{p+\sqrt{q}}=x+\sqrt{y}$, dan volgt: $\sqrt[3]{p-\sqrt{q}}=x-\sqrt{y}$, (eenvoudig te bewijzen)
en dus: $\sqrt[3]{p^2-q}=x^2-y$.
Om dit een geheel getal te laten zijn, moet (p^2-q) een derdemacht zijn.
Verder geldt: $\left(x+\sqrt{y}\right)^3=(x^3+3xy)+(3x^2+y)\sqrt{y}$.
Uit (*) volgt dat dit gelijk is aan $\left(45+29\sqrt{2}\right)$ dus concludeert Roth nu snel: $y=2$ en $x=3$.

Dat is in het algemeen niet zo snel te zeggen.
Er geldt namelijk: $\left(x+\sqrt{y}\right)^3=\left(x+t\sqrt{s}\right)^3=(x^3+3xt^2s)+(3x^2t+t^3s)\sqrt{s}$. (**)
Waarbij getal s geen kwadraat meer bevat.
Als dit gelijk moet zijn aan $\left(45+29\sqrt{2}\right)$ volgt nu wel: $s=2$.
Dus met (**) $(x^3+6xt^2)=45$ en $(3x^2t+2t^3)=29$ volgt inderdaad: $t=1, x=3$.

Soortgelijk laat Roth zien: $\sqrt{18252}\pm 135=78\sqrt{3}\pm 135=\left(2\sqrt{3}\pm 3\right)^3=\left(\sqrt{12}\pm 3\right)^3$.

En ook: $\sqrt[3]{\sqrt{1350}\pm\sqrt{1323}}=\sqrt[3]{15\sqrt{6}\pm 21\sqrt{3}}=\sqrt{6}\pm\sqrt{3}$.
Via: $\sqrt[3]{\sqrt{1350}\pm\sqrt{1323}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$.
$\sqrt[3]{1350-1323}=\sqrt[3]{27}=3=x-y$. En dan: $x=6, y=3$.

Dit staat gewoon even in vraagstuk 11 vermeld.

Bij een type 2 vergelijking $x^3=bx+c$ is een oplossing volgens Cardano:

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}}=\sqrt[3]{p+\sqrt{q}}+\sqrt[3]{p-\sqrt{q}}.$$

Dus: $\sqrt[3]{p^2-q}=\sqrt[3]{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3\right)}=\sqrt[3]{\left(\frac{b}{3}\right)^3}=\frac{b}{3}$.

Maar zelfs als hier een natuurlijk getal staat, hoeft het niet zo mooi als boven te gaan!

Voorbeeld: $x^3=6x+8$.
Oplossing: $x_1=\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

Zoek nu (rationale) getallen zodat geldt: $\sqrt[3]{4 \pm \sqrt{8}} = \sqrt[3]{4 \pm 2\sqrt{2}} = x \pm \sqrt{y} = x \pm t\sqrt{2}$.
Zie (**): de vergelijkingen $x^3 + 6xt^2 = 4 \;\; en \;\; 3x^2t + 2t^3 = 2$
hebben echter geen rationale oplossingen!
Een herschrijving van de oplossing $x_1 = \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}}$,
zoals boven bedoeld, is dus niet mogelijk.

In het boek grossiert Roth in zulke herschrijvingen en hij zal ze niet bij toeval gevonden hebben.

Voor welke waarden van b en c is zo'n herschrijving eigenlijk mogelijk?
Dat bekijken we voor vergelijkingen van het type 2.

Dus: $x^3 = bx + c$ met $b, c \in \mathbb{N}$.

Als zo'n herschrijving er is, dan volgt:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} = v + \sqrt{w} + v - \sqrt{w} = 2v.$$

Als nu gewenst is dat $x_1 \in \mathbb{N}$ dan volgt dat bij een keuze van b moet gelden: $c = x_1^3 - b * x_1$.

Dat geeft bij $b = 6$ bijvoorbeeld
$(x_1 = 4 \rightarrow c = 40 \rightarrow)\; x^3 = 6x + 40 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \cdots} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4.$ [1]
$(x_1 = 6 \rightarrow c = 180 \rightarrow)\; x^3 = 6x + 180 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{90 + \sqrt{8092}} + \sqrt[3]{90 - \cdots} = 3 + \sqrt{7} + 3 - \sqrt{7} = 6.$

[1] Dit is het voorbeeld dat bij type 2 door Roth bekeken wordt.

Of bij $b = 3$ bijvoorbeeld
$(x_1 = 3 \rightarrow c = 18 \rightarrow)\; x^3 = 3x + 18 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \cdots} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 3.$
$(x_1 = 4 \rightarrow c = 52 \rightarrow)\; x^3 = 3x + 52 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{26 + \sqrt{675}} + \sqrt[3]{26 - \cdots} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4.$
$(x_1 = 6 \rightarrow c = 198 \rightarrow)\; x^3 = 3x + 198 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{99 + \sqrt{9800}} + \sqrt[3]{99 - \cdots} = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6.$

En zo zijn natuurlijk hele lijsten te maken…

Opmerking.
Als zo'n vergelijking als boven een natuurlijk getal als oplossing heeft, dan hoeft het zoeken van zulke getallen v en w eigenlijk niet. Zijn eigen aanpak met $n(n^2 - b) = c$ werkt dan zeker ook!

Vrg 17. Twee mensen [A en B] hebben geld en de eerste heeft 18 florijnen meer dan de tweede. Als de eerste zijn geld kwadrateert en de ander [zijn geld] tot de derdemacht verheft, dan hebben zij evenveel. Hoeveel heeft eenieder?

➔ Stel: A heeft $(x + 18)$ florijnen. Dan heeft B x florijnen.
Er volgt: $(x + 18)^2 = x^3$.
Dus: $x^3 = x^2 + 36x + 324$. (*) Een type 10 vergelijking.

Met $x = y + \frac{1}{3}$ volgt: $y^3 = 36\frac{1}{3}y + 336\frac{2}{27}$.

Alle keer 27 en met $z = 3y$ volgt:
$z^3 = 327z + 9074$. Een type 2 vergelijking.

Dat geeft $z_1 = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \cdots} = \sqrt[3]{4537 + \sqrt{19289340}} + \sqrt[3]{4537 - \cdots}$.

Zie paragraaf *Bijzondere derdemacht wortels*.
Er volgt zonder uitleg erbij: $4537 \pm \sqrt{19289340} = \left(13 \pm 2\sqrt{15}\right)^3$.
Roth geeft meteen: $z_1 = 13 + \sqrt{60} + 13 - \sqrt{60} = 26$.

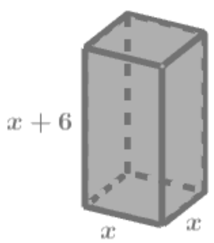
Of zoek deze oplossing met mijn regel bij de andere typen, schrijft Roth.
Dus zoek n zodat $n(n^2 - 327) = 9074$. Begin in de buurt van $\sqrt[3]{9074} = 20{,}8$ ...
$20 \rightarrow n^2 = 400 \rightarrow n^2 - 327 = 73$.
$21 \rightarrow 441 \rightarrow 114$.
...
$26 \rightarrow 676 \rightarrow 349$. En nu geldt: $26 * 349 = 9074$.
Dus zo is ook te vinden: $z_1 = 26$.

Dat geeft als oplossing voor de vergelijking (*):
$x_1 = y_1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 9$. A resp. B heeft dus 27 resp. 9 florijnen.

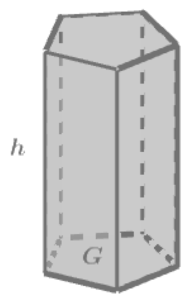
Vrg 20. Een metselaar krijgt de opdracht twee zuilen te maken. De eerste zuil moet vierhoekig en gelijkzijdig worden: 6 voet hoger dan zijn breedte. De andere zuil is vijfzijdig: onder $3\frac{8}{9}$ vierkante voet vlak en $2\frac{4}{7}$ keer zo hoog als de breedte van de eerste zuil.
Hij krijgt voor een vierkante voet 1 *Ort.*[1] Hij zal daardoor voor de eerste zuil 30 florijnen meer krijgen dan voor de tweede zuil.
Vraag: De hoogte van elke zuil en wat gaat dit kosten?

➔ Zie de figuren.
Die staan niet in het boek!
$G = 3\frac{8}{9}$.
$h = 2\frac{4}{7} * x$.

[Erg gekunsteld dus.]



zuil 1



zuil 2

Er volgt [2] zuil 2 t.o.v. zuil 1 in florijnen: $G * h = 3\frac{8}{9} * 2\frac{4}{7}x = (x+6) * x^2 - 30 * 4$. [zie 1].
Ofwel: $x^3 + 6x^2 = 10x + 120$. Dit is een type 9 vergelijking.(*)

Daar gaan berekeningen aan vooraf.
Bijvoorbeeld: $3\frac{8}{9} * 2\frac{4}{7} = \left(3 + \frac{8}{9}\right)\left(2 + \frac{4}{7}\right) = 6 + 1\frac{5}{7} + 1\frac{7}{9} + \frac{32}{63} = 8 + \frac{45}{63} + \frac{49}{63} + \frac{32}{63} = 8 + \frac{126}{63} = 10$.

Met substitutie $x = y - 2$ volgt: $y^3 = 22y + 84$. [3]

En dan met zijn methode:
Zoek naar natuurlijke oplossingen zodat $n(n^2 - 22) = 84$.
Dan volgt een kort rijtje. Het startgetal volgt uit $\sqrt[3]{84} = 4{,}3 \ldots$ [of $n^2 > 22$].
$5 \to 5^2 = 25 \to 25 - 22 = 3$.
$6 \to 6^2 = 36 \to 14$. En nu geldt: $6 * 14 = 84$. We hebben dus een oplossing: $y = 6$.

Oplossing van (*) is dan: $x_1 = 4$.

Dus de eerste zuil is in voeten: $4\ breed, 4\ lang, 10\ hoog$ en kost: $160\ Ort = 40$ florijnen.
De tweede zuil is $2\frac{4}{7} * 4 = 10\frac{2}{7}$ voet hoog en kost 10 florijnen.

[1] Een *Ort*: de waarde blijkt een kwart florijn te zijn. Er staat: 30 florijnen is 120 *Orter*.
Een ‘oortje’ was in Nederland een geldstuk ter waarde van een kwart florijn.
Bron: Wikipedia.
Overigens lijkt het meer om inhoud te gaan: kubieke voet dus…
[2] Een reconstructie. De tekst is moeilijk leesbaar.
[3] De berekeningen bij $y^3 = \left(b + \frac{1}{3}a^2\right)y + c - 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - b\left(\frac{a}{3}\right)$ worden uitvoerig getoond.

Vrg 22. Er zijn twee lichamen van dezelfde materie. Het eerste is vierhoekig en gelijkzijdig en 6 duim (*Zoll*) langer dan het breed is. Het andere is zevenhoekig en met een basis van $34\frac{2}{7}$ vierkante duim. De lengte is $2\frac{1}{3}$ keer zo lang als de eerste breed is. Een kubieke duim [materie] kost 1 *B.* [1]
Het tweede lichaam kost 3 florijnen 3 *B* meer dan het eerste.
Wat is de waarde van elk lichaam apart?

➔ Bedoeld zijn waarschijnlijk prisma’s.
Stel de breedte van het eerste lichaam is x duim.
Dan neemt Roth voor de hoogte ook x duim [2].
Er volgt voor de inhoud: $Inh(I) = x^2 * (x+6) = x^3 + 6x^2$.
En: $Inh(II) = 34\frac{2}{7} * 2\frac{1}{3}x = 80x$.
En in geld uitgedrukt: $x^3 + 6x^2 = 80x - 48$. Een type 13 vergelijking.

Met $x = y - 2$ volgt: $y^3 + 224 = 92y$. (*) Een type 3.
Met $n(92 - n^2) = 224$ en start onder $\sqrt{92} = 9{,}5 \ldots$ want $n^2 < 92$.
$9 \to 81 \to 92 - n^2 = 11$.
$8 \to 64 \to 28$. En er volgt: $8 * 28 = 224$.
Een ware waarde is gevonden: $y_1 = 8$.

Zoek nu verder naar de andere ware en fictieve waarde.

Zie paragraaf *Ontbinding in factoren?*

Er volgt meteen: $y_{2,3} = -\left(\frac{y_1}{2}\right) \pm \sqrt{b - 3\left(\frac{y_1}{2}\right)^2} = -4 \pm \sqrt{44}.$

De twee ware oplossingen van (*) zijn dus: $y_1 = 8, y_2 = \sqrt{44} - 4.$
De fictieve oplossing is: $y_3 = -.\left(\sqrt{44} + 4\right) = -\sqrt{44} - 4.$ [3]

De oplossingen van de startvergelijking zijn dan:
$x_1 = 6, x_2 = \sqrt{44} - 6, x_3 = -\sqrt{44} - 6.$

Het eerste lichaam is dus $6\ bij\ 6\ bij\ 12\ duim$ met inhoud: 432 [kubieke duim].
Het tweede is $6 * 2\frac{1}{3} = 14\ duim$ lang met inhoud: $14 * 34\frac{2}{7} = 480$ [kubieke duim].
Of…
Het eerste lichaam is $\sqrt{44} - 6\ bij\ \sqrt{44} - 6\ bij\ \sqrt{44}\ duim$
met inhoud: $(\sqrt{281600} - 528)$ [kubieke duim] en kost ook zoveel *Baßen*.
Het tweede is $(\sqrt{44} - 6) * 2\frac{1}{3} = (\sqrt{239\frac{5}{9}} - 14)\ duim$ lang
met inhoud: $(\sqrt{239\frac{5}{9}} - 14) * 34\frac{2}{7} = (\sqrt{281600} - 480)$ [kubieke duim] en kost zoveel *Baßen.*

Roth merkt nog op:
Deze en ook voorgaande vraagstukken had men ook met de zesde bijzondere regel van Cardano uit zijn hoofdstuk 25 van zijn zevende boek kunnen oplossen, maar dat heb ik willen ‘nalaten’.

[1] In de tekst staat *Baßen.* Een onbekende muntsoort: 1 florijn is 15 *Baßen*.
3 florijnen 3 *B* is dus 48 *Baßen.*
[2] Vierhoekig gelijkzijdig suggereert een blok eventueel een kubus. Kubus valt af want het object is langer dan de breedte. Dan past gelijkzijdig niet meer in de tekst!
[3] In de tekst ontbreekt $-$. De punt betekent voor het geheel navolgende.

Vrg 25. Twee mensen, A en B, hebben geld. De eerste heeft driemaal zoveel als de tweede. De eerste koopt van zijn geld *Bitschlüt* [1]: voor elke florijn evenveel pond als $\frac{1}{8}$ deel van zijn geld. Dat verkoopt hij weer: voor 1 centner minus 4 pond krijgt hij $\frac{1}{6}$ zoveel florijnen van wat hij had geïnvesteerd. De ander koopt vet: voor elke florijn evenveel pond als $\frac{1}{3}$ deel van zijn geld. Ook hij verkoopt het weer: voor $6\frac{6}{7}$ pond krijgt hij één florijn. Als nu eenieder zijn geld verheft tot de derdemacht, dan hebben ze samen 553393 florijnen.
[Hoe gekunsteld wil je het hebben!] Vraag: Hoeveel hebben ze verdiend?

➔ Stel nu dat A $72x$ florijnen heeft en B $24x$ florijnen. Roth schrijft deze keuze te maken zodat allerlei breuken vermeden worden. En die zouden optreden als ik [Roth] kleinere getallen had gesteld.
A koopt $72x * (\frac{1}{8} * 72x) = 648x^2$ pond.
B koopt $24x * (\frac{1}{3} * 24x) = 192x^2$ pond.
De verkoop door A levert voor 96 pond dus $\frac{1}{6} * 72x = 12x$ florijnen op: $1x$ florijnen per 8 pond.
Dat geeft voor $648x^2$ dus in totaal: $\frac{648x^2}{8} * x = 81x^3$ florijnen. (*)

De verkoop door B levert voor $6\frac{6}{7}$ pond één florijn: 48 pond leveren 7 florijnen op.

Dat geeft voor $192x^2$ dus in totaal: $\frac{192x^2}{48} * 7 = 28x^2$ florijnen. (*)

(*) tot de derdemacht en opgeteld geeft: $531441x^9 + 21952x^6 = 553393$.
Leg nu x^3 ter zijde ofwel substitueer $y = x^3$ en er volgt:

$531441y^3 + 21952y^2 = 553393$. (**)

Roth schrijft dat deze vergelijking nu door de *Regel van Johann Jungen* [2] eenvoudig is op te lossen. Hij gaat als volgt verder.

Vermenigvuldig het losse getal met het kwadraat van het getal voor y^3.
Er komt: $531441^3y^3 + 21952 * 531441^2y^2 = 156294528481830033$. [3]

En met $531441y = z$ volgt:

$z^3 + 21952z^2 = 156294528481830033$. (***)
Dit is een type 5 vergelijking.
Met substitutie $z = t - \frac{21952}{3}$ volgt:
$t^3 = 160630101\frac{1}{3}t + 156293744892500150\frac{25}{27}$.
Vermenigvuldiging met 27 geeft:
$(3t)^3 = 1445670912(3t) + 4219931112097504075$.
Met substitutie $w = 3t$ volgt:

$w^3 = 1445670912w + 4219931112097504075$. (****)
Dit is een type 2 vergelijking.

Roth pakt die aan met zijn eigen methode.
Zoek een n zodat geldt: $n(n^2 - 1445670912) = 4219931112097504075 = N$.
Begin bij $\sqrt[3]{N} = 1615976{,}7\ldots$
In het rijtje komt er telkens 100 bij.
$1615976 \rightarrow (\ldots)^2 = 2611378432576 \rightarrow (-144\ldots) = 2609932761664$
$1616076 \rightarrow 2611701637776 \rightarrow 2610255966864$
$1616176 \rightarrow 2612024862976 \rightarrow 2610579192064$
$1616276 \rightarrow 2612348108176 \rightarrow 2610902437264$.
Het eerste en laatste getal vermenigvuldigen geeft $4219938947691308864 = M$.
M is volgens Roth een beetje meer dan N. [4]
Daarom probeert hij nu met een getal vlak daaronder:
$1616275 \rightarrow 2612344875625 \rightarrow 2610899204713$.
Het eerste en laatste getal vermenigvuldigen geeft nu wel N.

Een oplossing van (****) is gevonden: $w_1 = 1616275$.
Via t volgt een oplossing van (***): $z_1 = \frac{w_1}{3} - \frac{21952}{3} = 531441$.
Dus een oplossing van (**): $y_1 = 1$ en dan $x_1 = 1$.

Conclusie: A begint met 72 florijnen en B met 24 florijnen.
Ze verdienen respectievelijk (zie *) 81 en 28 florijnen.
Hun gezamenlijke winst is dus: $109 - 96 = 13$ florijnen.

[1] Een Nederlands woord hiervoor is mij onbekend.
[2] Dit is waarschijnlijk Johann Faulhaber.
[3] Die berekening wordt uitvoerig getoond. Het resultaat heeft 18 cijfers.
Bedenk dat Roth alle berekeningen handmatig doet! Hij schrijft dat
... *vanwege de grote getallen dit zeker moeizaam en zwaar is...*
[4] Relatief bekeken: $\frac{M-N}{N} * 100\% = 0{,}00018 \ldots \%$

Vrg 30. Drie getallen hebben een continue verhouding d.w.z. met a, b, c geldt: $a * c = b^2$. [1]
Opgeteld zijn ze samen 20. Wat zijn die getallen?

➔ Er volgt in het boek een uitwerking van zeven pagina's!
Roth begint met de aanpak van Cardano.
Stel het middelste getal is x. Dus is de som van de andere twee: $20 - x$.
(Roth meldt nog even dat wat Faulhaber stelt 'dus' fout is ...)
Nu is het grootste van de twee $10 - \frac{1}{2}x + A$ en de kleinste $10 - \frac{1}{2}x - A$. [2]
Roth verwijst nu naar de Elementen. [3]
[*Euclides,* propositie 16 boek 5, stelt: als $a : b = c : d$ dan ook $a : c = b : d$.]
Er volgt:
$\left(10 - \frac{1}{2}x - A\right) * \left(10 - \frac{1}{2}x + A\right) = x^2$.
Ofwel: $100 - 10x + \frac{1}{4}x^2 - A * A = 1x^2$.
En dan: $100 - 10x - \frac{3}{4}x^2 = A * A$.
Trek de wortel en er volgt: $A = \sqrt{100 - 10x - \frac{3}{4}x^2}$.
De getallen zijn: $10 - \frac{1}{2}x - \sqrt{100 - 10x - \frac{3}{4}x^2}; x; 10 - \frac{1}{2}x + \sqrt{100 - 10x - \frac{3}{4}x^2}, (= a; b; c)$.(*)
$a + c = 20 - b = 20 - x$. [4]
En: $\sqrt{a} * \sqrt{c} = b$. $\sqrt{a * c} = \sqrt{x^2} = x$. Dan wordt gerekend met de getallen a en c:
Met $a = \sqrt{P - \sqrt{Q}}$ en $c = \sqrt{P + \sqrt{Q}}$ [5] volgt:
$a^2 + c^2 = 2P = 20 - x; (a + c)^2 = 2P + 2\sqrt{P^2 - Q} = 20 - x + 2x = 20 + x$.
Met Propositie 4 uit boek 2 van *Euclides*:
$(a + c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac$, concludeert Roth nu [6]:

$\sqrt{20 + x} = x$ ofwel: $20 + x = x^2$. Dus: $x = 5$.
Gevolg (*): $a = 7\frac{1}{2} - \sqrt{31\frac{1}{4}}; b = 5; c = 7\frac{1}{2} + \sqrt{31\frac{1}{4}}$.

Er volgt een soortgelijke aanpak met $(a, b, c) = (x - A, 20 - 2x, x + A)$.
Er volgt dan: $x^2 - A * A = 400 - 80x + 4x^2$.
$A = \sqrt{80x - 400 - 3x^2}$. Etc.

En binnen deze aanpak komt een variant die Roth zelf 'ongemakkelijk' noemt.

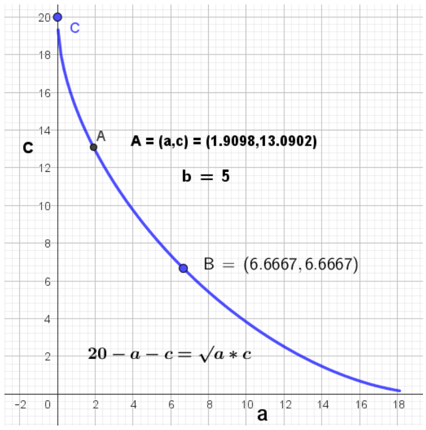
[1] Getal b is het meetkundig gemiddelde van a en c.
b heet ook wel de middelevenredige tussen a en c.

[2] Deze veronderstelling is ok. Elk tweetal getallen is van de vorm $p \pm q$.
[3] Dit gaat over **vier** lengtes (getallen) in verhouding. Doel van de verwijzing is onduidelijk.
[4] Er wordt verondersteld: $0 < a < b < c$.
[5] Verkorte schrijfwijze door schrijvers dezes.
[6] Hoe dit volgt uit die propositie is onduidelijk. Roth brengt soms een minteken in.
Zie ook de opmerking hierna.

Opmerking.
Het gaat hier over positieve getallen met oplopende grootte: $0 < a < b < c$.
De twee startgegevens leiden naar twee vergelijkingen met drie onbekenden. Er zijn dus meer oplossingen tenzij ergens een gegeven gemist is. Mogelijk verwijst [3] daar naar.
Maar anders gaat het dus om twee vergelijkingen:
$a + b + c = 20; b = \sqrt{a * c}$.
Daaruit volgt: $3a < 20, a < 6\frac{2}{3}$. En: $20 - a - c = \sqrt{a * c}$.
Zie de figuur.

De kromme is een deel van een ellips met vergelijking:
$40a + 40c - a^2 - ac - c^2 - 400 = 0$.

Bij het getekende punt A hoort:
$a = 7\frac{1}{2} - \sqrt{31\frac{1}{4}} = 1{,}9098\ldots$
$b = 5$.
$c = 7\frac{1}{2} + \sqrt{31\frac{1}{4}} = 13{,}0902\ldots$
Dat is de oplossing van Roth.
Andere oplossingen geven punten op die kromme tussen de punten B en C.



Bijvoorbeeld zou nu ook voldoen: $(a, b, c) = (1, \sqrt{19\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}, 19\frac{1}{2} - \sqrt{19\frac{1}{4}})$.

Vrg 31. Deel 10 in twee delen. Als men nu van het grootste deel het dubbele van zijn eigen kwadraatwortel aftrekt, dan is de rest gelijk aan de som van het kleinste deel en het dubbele van zijn kwadraatwortel. Het verschil van de twee delen is gelijk aan de som van het dubbele van de kwadraatwortels van de delen. Wat zijn die delen?

➔ Roth begint met op te merken dat de voorlaatste zin overbodig is bij Faulhaber. De andere zinnen zijn genoeg. En dat klopt: hier staat geen nieuwe informatie in.

Stel de twee delen zijn $(5 + x)\ en\ (5 - x)$.
Er volgt: $5 + x - 2\sqrt{5 + x} = 5 - x + 2\sqrt{5 - x}$.
Roth laat nu alle stappen zien.
Eerst: $2x - \sqrt{20 + 4x} = \sqrt{20 - 4x}$.
Dan: $4x^2 + 20 + 4x - \sqrt{320x^2 + 64x^3} = 20 - 4x$.
Ofwel: $4x^2 + 8x = \sqrt{320x^2 + 64x^3}$.
Deel alles door $4x$. $[x \neq 0]$

Er volgt: $x + 2 = \sqrt{20 + 4x}$.
Dan: $x^2 + 4x + 4 = 20 + 4x$.
Dus: $x^2 = 16$. En dan: $x = 4$.
Het grootste deel is dus $5 + x = 9$, het kleinste deel is dan $5 - x = 1$.

Roth merkt nog op dat men ook anders had kunnen werken door voor de grootste of kleinste x te stellen en dan het andere getal $10 - x$.

Vrg 35. Een vorst laat een tempel bouwen die in totaal 400 kubieke el moet inhouden.
De lengte is 6 el meer dan de breedte en de breedte is 3 el meer dan de hoogte.
Wat zijn de lengte, breedte en hoogte?

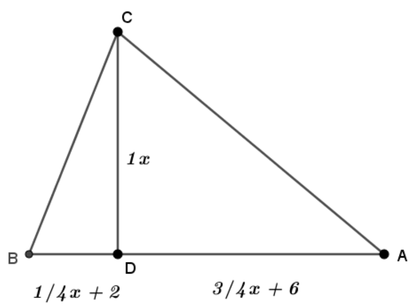
➔ Stel de hoogte op x el. Dan is de breedte $(x + 3)$ el en de lengte $(x + 9)$ el.
Je zou ook de lengte x el kunnen stellen, de breedte $(x - 3)$ el en de hoogte $(x - 9)$ el.
Maar, schrijft Roth, we blijven bij de eerste veronderstelling.

Er volgt:
Inhoud = $(x + 3)(x + 9)x = x^3 + 12x^2 + 27x = 400$. Een type 7 vergelijking.
Met $x = y - \frac{12}{3} = y - 4$ volgt: $y^3 = 21y + 380$. Een type 2 vergelijking.
Een ware oplossing: $y_1 = \sqrt[3]{190 + \sqrt{190^2 - 7^3}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{190^2 - 7^3}}$.

Dat geeft voor de hoogte: $x_1 = \sqrt[3]{190 + \sqrt{35757}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{35757}} - 4$ $[= 4{,}20 \ldots el]$.
De breedte: $\sqrt[3]{190 + \sqrt{35757}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{35757}} - 1$ $[= 7{,}20 \ldots el]$.
De lengte: $\sqrt[3]{190 + \sqrt{35757}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{35757}} + 5$ $[= 13{,}20 \ldots el]$. [1]

[1] Met de Bijbelse maat $1\ el \approx 45\ cm$ (Bron: Wikipedia) zou die tempel dus zijn, ongeveer: $1{,}89m\ hoog$; $3{,}24m\ breed$; $5{,}94m\ lang$.

Vrg 41. Van een driehoek ABC met ongelijke zijden is gegeven: zijde AB is 8 punten meer dan de loodlijn CD.
[1] Zie de figuur. Dus: $|AB| = |CD| + 8$. [2]
En: $|AD| = 3 * |BD|$; $|BC|^2 + |BC| = 182$.
Vraag: $|CD|, |BD|, |AD|$.



➔ Roth schrijft dat Cardano in hoofdstuk 33 van zijn tiende boek een oplossing geeft, die wat moeizaam is en hij daarom hier een andere aanpak toont.

Stel: $|CD| = x$. Dan volgt: $|AB| = x + 8$.
En dus: $|BD| = \frac{1}{4}x + 2, |AD| = \frac{3}{4}x + 6$.
Stel nu: $|BC| = A$.
Dan volgt: $A * A + A = 182$. En dan: $A = 13$.
Verder geldt: $|BD|^2 + |CD|^2 = |BC|^2$.

Daarmee volgt: $\frac{1}{16}x^2 + x + 4 + x^2 = 169$. Ofwel: $1\frac{1}{16}x^2 + x = 165; x = 12$.
En dan: $|BD| = \sqrt{|BC|^2 - |CD|^2} = \sqrt{25} = 5$.
En: $|AD| = 3 * |BD| = 15$.

[1] Er staat *cathetus* CD (Gr. $\kappa\alpha\theta\varepsilon\tau o\varsigma$): lijn bij de rechte hoek.
[2] Notatie van de lengte van lijnstuk AB in deze tekst is $|AB|$.

Vrg 45. Er zijn twee getallen en hun product is gelijk aan hun som. De som van hun kwadraten samen met hun som is 20.
Wat zijn die getallen?

➔ Stel het kleinste getal is $x - A$ en het grootste getal is $x + A$.
Er volgt:
$(x + A)^2 + (x - A)^2 + (x - A) + (x + A) = 20$. En: $(x - A)(x + A) = 2x$.
$2x^2 + 2AA + 2x = 20$.

Dus: $x^2 + AA + x = 20$. Maar ook nog: $x^2 - AA = 2x$. (*)
Tel deze twee op en er volgt:
$2x^2 + x = 20 + 2x$.
Dus: $x^2 = \frac{1}{2}x + 5$.
En: $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + 20} = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 2\frac{1}{2}$.

En nu opnieuw met (*): $\left(2\frac{1}{2}\right)^2 - AA = 5$ dus: $A = \sqrt{1\frac{1}{4}}$.
De getallen zijn: $2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$ en $2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$.

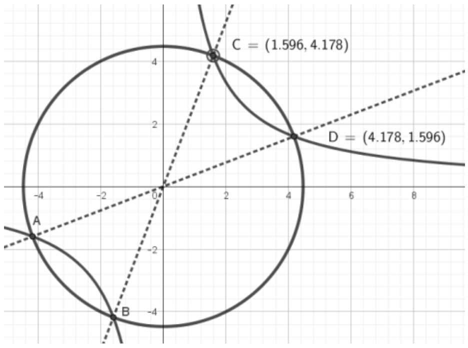
Vrg 47. Er zijn twee getallen waarvan de som van hun kwadraten 20 is. Hun product is gelijk aan het kwadraat van hun verschil. Wat zijn die getallen?

➔Roth schrijft: Cardano lost dit op door hun som te stellen op x.
Wij willen dit echter anders doen, namelijk door te stellen dat de getallen zijn: $x + A$ en $x - A$.
Er volgt: $(x + A)^2 + (x - A)^2 = 20$.
Ofwel: $x^2 + A^2 = 10$. (*)
En verder: $(x + A) * (x - A) = (2A)^2$.
Er volgt: $x^2 - A^2 = 4A^2$. (**)
Uit (*) minus (**) volgt:
$2A^2 = 10 - 4A^2$.
Dus: $A^2 = \frac{10}{6}$ en $A = \sqrt{1\frac{2}{3}}$.

Met (**) volgt nu: $x^2 = 5 * 1\frac{2}{3} = 8\frac{2}{3}$ en $x = \sqrt{8\frac{2}{3}}$.

Het grootste getal is dan: $x + A = \sqrt{8\frac{2}{3}} + \sqrt{1\frac{2}{3}}$. Het kleinste: $\sqrt{8\frac{2}{3}} - \sqrt{1\frac{2}{3}}$.

Aanvulling.
Roth gebruikt hier alleen positieve getallen.
Grafisch is e.e.a. te zien in de figuur.
Noem die getallen $x\ en\ y$**.**
Dan volgt:
$x^2 + y^2 = 20$. Vergelijking van een cirkel.
En uit: $xy = (x - y)^2$
volgt: $y = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)x$. Twee lijnen.
Ook geldt: $3xy = 20$. Een hyperbool.



Vrg 51. Drie getallen hebben een continue verhouding d.w.z. met a, b, c geldt: $a : b = b : c$.
Een van die getallen is 10. En er geldt: $\left(\frac{1}{20}(a + b + c)\right)^2 = 7 * 10$.
Wat zijn die getallen?

➔ Stel: $a + b + c = 20x$. [1]
Er volgt: $x^2 = 70$. Dus: $x = \sqrt{70}$. En dan: $20x = \sqrt{28000} = a + b + c$. (*)

Nu stel ik verder voor het kleinste getal (a): $y - A$.[5]
Het middelste getal (b) is nu 10 [2] en het grootste getal (c) is dan $y + A$.
Er volgt: $y^2 - AA = 100$. [3]
E dan: $A = \sqrt{y^2 - 100}$. Met (*) volgt nu: $2y + 10 = \sqrt{28000}$. En dus: $y = \sqrt{7000} - 5$.
En voor A volgt: $A = \sqrt{\left(\sqrt{7000} - 5\right)^2 - 100} = \sqrt{6925 - \sqrt{700000}}$.
De drie getallen zijn:
$a = \sqrt{7000} - 5 - \sqrt{6925 - \sqrt{700000}}$; $b = 10$; $c = \sqrt{7000} - 5 + \sqrt{6925 - \sqrt{700000}}$. [4]

Roth geeft ook nog een andere aanpak door verder te werken met $(a + c) = \sqrt{28000} - 10$.
En vervolgens één van de getallen a of c op x te stellen.

[1] Letters voor de getallen nemen gebeurt **niet** door Roth.
[2] Roth stelt dat hier voor het middelste getal.
[3] Volgt uit $a : b = b : c$ en $0 < a < b < c$.
[4] Even voor het beeld: $(a; b; c) = (0{,}638\ldots; 10; 156{,}693\ldots)$.

Opmerking.
Waarom Roth hierboven stelt dat het middelste getal gelijk 10 zou zijn, is onduidelijk.
Als er gesteld wordt, dat het kleinste getal (a) gelijk is aan 10, dan wordt het verhaal anders.

Er volgt dan:
$b + c = \sqrt{28000} - 10$ en $b^2 = 10c$.
En dan: $b^2 + 10b - 10\left(\sqrt{28000} - 10\right) = 0$.

[5] Roth neemt hier weer variabele x, maar om verwarring te voorkomen gebeurt dat nu niet.

Dus: $b = \sqrt{\sqrt{2800000} - 75} - 5 = 34{,}979 \ldots.$
En: $c = \frac{1}{10}b^2 = 122{,}353 \ldots$

NB: Omdat $a < b < c$ kan het grootste getal niet gelijk zijn aan 10.
Dan zou volgen: $\frac{1}{20}(a + b + c) < \frac{30}{20} = 1{,}5 < \sqrt{70}$.

Vrg 56. Verdeel 8 in twee delen/getallen (a en b) zodat $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = 8128$.
Wat zijn die getallen?

➔ Stel: die getallen zijn $4 - x$ en $4 + x$.
Er volgt: $((4 - x)^2 + (4 + x)^2)((4 - x)^3 + (4 + x)^3) = 8128$.
Uitgewerkt wordt dit: $48x^4 + 1024x^2 + 4096 = 8128$.
Er volgt:
$3x^4 + 64x^2 = 252$.

En de bruikbare oplossing hiervan is: $x_1 = \sqrt{\sqrt{197\frac{7}{9}} - 10\frac{2}{3}}$. [1]

Dus de getallen zijn: $4 \pm \sqrt{\sqrt{197\frac{7}{9}} - 10\frac{2}{3}}$. [2]

[1] Daarnaast: $x_2 = -x_1$ en twee complexe oplossingen.
[2] Dat zijn de getallen 2,117 … en 5,882 …

Vrg 60. Verdeel 14 in drie in continue verhouding staande delen $(a < b < c)$ zodat er geldt:
$2c + 3b = 7a$. [1] Wat zijn die drie delen/getallen?

➔ Stel het grootste deel (c) is x, het middelste deel (b) is A. Dan volgt: $a = 14 - x - A$.
Er volgt: $2x + 3A = 98 - 7x - 7A$.
En dan: $A = \frac{98-9x}{10}$. [2] Dit is dus het middelste deel (b).
$b + c = \frac{98-9x}{10} + x = \frac{98+x}{10}$. En dus dan: $a = 14 - \left(\frac{98+x}{10}\right) = \frac{42-x}{10}$.

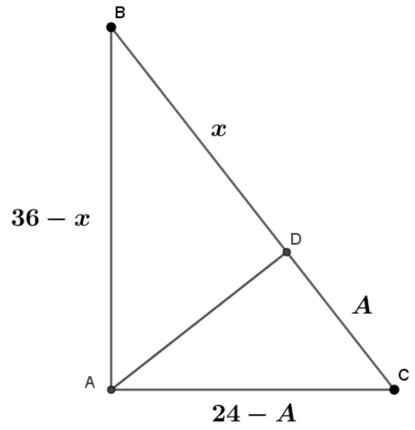
Nu volgt met $b^2 = a * c$: $\left(\frac{98-9x}{10}\right)^2 = x * (\frac{42-x}{10})$.
Uitgewerkt geeft dit: $91x^2 + 9604 = 2184x$.

Roth maakt hier eerst van: $13x^2 + 1372 = 312x$.

En dan vindt de berekening plaats: $x_{1,2} = 12 \pm \sqrt{38\frac{6}{13}}$. [= 5,79 … ; 18,20 …]
Roth schrijft nu dat alleen de kleinste waarde passend is bij de opgave.
Dus: $c = 12 - \sqrt{38\frac{6}{13}}$; $b = \frac{98-9x_1}{10} = \sqrt{31\frac{2}{13}} - 1$; $a = 3 + \sqrt{\frac{5}{13}}$. [3]

[1] Letters voor de getallen nemen gebeurt **niet** door Roth.
De uitdrukking staat in zijn tekst met woorden, niet als formule.
[2] Zetfout in het boek. Daar staat voor het middelste getal: $\frac{\mathbf{89}-9x}{10}$.
[3] Voor het beeld: $(a; b; c) = (3{,}62 \ldots;\ 4{,}58 \ldots;\ 5{,}79 \ldots)$

Vrg 63. Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met ongelijke zijden met daarin de loodlijn AD.
Er geldt: $|AB| + |BD| = 36$ en $|AC| + |CD| = 24$.
Wat is de lengte van alle zijden en de oppervlakte van de driehoek? [1]



➔ Zie de figuur.
Stel: $|BD| = x$ en $|CD| = A$.
Dan volgt:
$|AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2$ dus
$|AD|^2 = 1296 - 72x$.

Maar ook:
$|AD|^2 = (24 - A)^2 - AA = 576 - 48A$.
Dus:
$1296 - 72x = 576 - 48A$.
Er volgt: $A = 1\frac{1}{2}x - 15$.

En dan in de gehele driehoek:
$\left(24 - \left(1\frac{1}{2}x - 15\right)\right)^2 + (36 - x)^2 = \left(2\frac{1}{2}x - 15\right)^2$.
Uitgewerkt wordt dit:
$864 = x^2 + 38x$.
Er volgt: $|BD| = x = 16$, $|CD| = A = 9$.
Dus: $|AB| = 20, |AC| = 15, |AD| = 12, Opp = 150$.

[1] Roth spreekt bij lengte over … *Puncten.* Oppervlakte wordt *Inhalt* en *Area* genoemd én wordt ook in *Puncten* uitgedrukt!

Vrg 65. Er is een getal (x) waarvoor geldt: $x^4 + 4x = 10x^2 - 8$. [1] Welk getal is dat?

➔ Roth schrijft: Deze vraag hoort ook bij de x^4-coss-rekening en zou wel op 12 of meer (!) manieren opgelost kunnen worden. Maar ik zal er maar drie laten zien en de andere aanbevelen aan de ‘verstandigen’ om die kunsten te zoeken. Want hoewel ik dat ook zou willen, zou het boek echter te groot worden en daarom heb ik dat noodzakelijkerwijze achterwege moeten laten.

[In deze tekst wordt van die drie manieren er één getoond.]
Stel het getal is x.
Dan volgt: $x^4 = 10x^2 - 4x - 8$.

En dan volgt: $x^4 + 2x^2t + t^2 = 10x^2 - 4x - 8 + 2x^2t + t^2$. [2]
Meteen wordt verder gegaan met de discriminant van het rechter deel.
$4^2 - 4(10 + 2t)(t^2 - 8) = 0$.
Ofwel: $t^3 + 5t^2 = 8t + 42$. Een type 9 vergelijking. (*)
Met substitutie $t = y - \frac{5}{3}$ volgt:
$y^3 = 16\frac{1}{3}y + 19\frac{11}{27}$. (**) Een type 2 vergelijking maar zonder gehele getallen.
De breuken zijn niet handig dus alles keer 27 geeft:
$(3y)^3 = 147 * (3y) + 524$.

Met substitutie $z = 3y$ volgt:
$z^3 = 147z + 524$. Nu wel een echt type 2 vergelijking.(***)

Er volgt nu eenzelfde aanpak als bij type 3 vermeldt.
Zoek eerst een oplossing voor $v^3 + 524 = 147v$. (****)
Dat gebeurt met een rijtje.
Zoek n zodat $n(147 - n^2) = 524$.
$1 \to 1^2 = 1 \to \ 147 - 1 = 146$
$2 \to 4 \to 143$
$3 \to 9 \to 138$
$4 \to 16 \to 131$ En nu geldt: $4 * 131 = 524$. We hebben dus een oplossing: $v_1 = 4$.

Dan volgt een andere oplossing van (****): $v_2 = -\left(\frac{v_1}{2}\right) + \sqrt{147 - 3\left(\frac{v_1}{2}\right)^2} = -2 + \sqrt{135}$. [3]
En ook nog: $v_3 = -2 - \sqrt{135}$ [4], een fictieve oplossing.

Een ware oplossing van (***) is dan, met $v_1 = 4$: $z_1 = \frac{v_1}{2} + \sqrt{b - 3\left(\frac{v_1}{2}\right)^2} = 2 + \sqrt{135}$.
En een ware oplossing van (**): $y_1 = \frac{1}{3}z_1 = \frac{2}{3} + \sqrt{15}$.
Analoog twee fictieve oplossingen: $y_2 = -\frac{4}{3}; y_3 = \frac{2}{3} - \sqrt{15}$.

Zo volgt een ware oplossing van (*): $t_1 = y_1 - \frac{5}{3} = \sqrt{15} - 1$.
De andere twee oplossingen zijn: $t_2 = -3; t_3 = -\sqrt{15} - 1$.
Roth schrijft nu dat je kunt kiezen wat je wilt en hij kiest $t = -3$ omdat dat een rationaal getal is.

Er volgt dan na invulling voor de vierdegraads vergelijking: $x^4 - 6x^2 + 9 = 4x^2 - 4x + 1$.
Trek aan beide zijden de wortel: $(x^2 - 3) = 2x - 1 \ of \ 1 - 2x$.
De eerste keuze: $x^2 - 3 = 2x - 1$
Dus: $x^2 - 2x - 2 = 0$. Met oplossingen: $x_1 = 1 - \sqrt{3}; x_2 = 1 + \sqrt{3}$, de ware…
De tweede keuze: $x^2 - 3 = 1 - 2x$
Dus: $x^2 + 2x - 4 = 0$. Met oplossingen: $x_3 = -1 - \sqrt{5}; x_4 = -1 + \sqrt{5}$, de ware…

[1] In het boek in woorden, **niet** als formule!
[2] Het basisidee van Ferrari. Verander zodat er staat: $(x^2 + t)^2 = (px + q)^2$.
[3] Reconstructie van de redenering, zie hierna.
[4] Notatie in het boek $-.(\sqrt{135} + 2)$: de punt betekent voor het geheel navolgende.

Ontbinding in factoren?

Vanuit één oplossing van een derdegraads-vergelijking (x_1) zijn de andere oplossingen ook te vinden.
Maar hoe doet Roth dat?
Het ontbinden in factoren is tot nu toe niet genoemd maar mogelijk is dit de redenering.

Stel de vergelijking is van type 3: $x^3 + c = bx$.
En: $x_1^3 - bx_1 + c = 0$. (*)

Met $x^3 - bx + c = (x - x_1)(x^2 + px + q) = x^3 + (p - x_1)x^2 + (q - px_1)x - qx_1$
volgt: $p = x_1,\ q - px_1 = q - x_1^2 = -b$ dus $q = x_1^2 - b$.
En natuurlijk ook: $-qx_1 = -(x_1^2 - b)x_1 = -x_1^3 + bx_1 = c$ vanwege (*).

Dus de tweedegraads vergelijking is: $x^2 + x_1 x + (x_1^2 - b) = 0$.

Oplossingen hiervan zijn: $x_{2,3} = -(\frac{x_1}{2}) \pm \sqrt{b - 3\left(\frac{x_1}{2}\right)^2}$. (**)

Met x_1 een ware oplossing heeft x_1^2 betekenis.

Als $(b - 3\left(\frac{x_1}{2}\right)^2) > 0$ dan kan er nog een ware oplossing zijn.

In vraag 65 past Roth dit wellicht toe, want dat zou een verklaring kunnen zijn voor het gebruik van de formule (**).

Neem nu een vergelijking van type 1: $x^3 + bx = c$.
Er is altijd een ware oplossing x_1.
De tweedegraads vergelijking is: $x^2 + x_1 x + (x_1^2 + b) = 0$

Oplossingen hiervan zijn: $x_{2,3} = -(\frac{x_1}{2}) \pm \sqrt{-b - 3\left(\frac{x_1}{2}\right)^2}$.

Deze oplossingen zijn fictief.
Dus een type 1 vergelijking heeft één ware oplossing.

Neem nu een vergelijking van type 2: $x^3 = bx + c$.
Er is altijd een ware oplossing x_1.
De tweedegraads vergelijking is: $x^2 + x_1 x + (x_1^2 - b) = 0$

Oplossingen hiervan zijn: $x_{2,3} = -(\frac{x_1}{2}) \pm \sqrt{b - 3\left(\frac{x_1}{2}\right)^2}$.

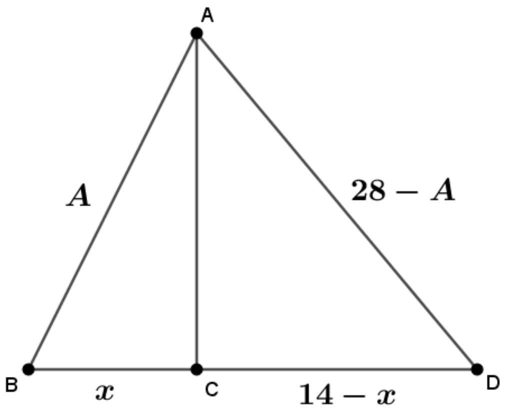
Als x_1 een ware oplossing is én $(b - 3\left(\frac{x_1}{2}\right)^2) > 0$ dan is er toch géén andere ware oplossing!

Want: als $x_2 = -\left(\frac{x_1}{2}\right) + \sqrt{b - 3\left(\frac{x_1}{2}\right)^2} > 0$ dan volgt: $b > x_1^2$.

En dan: $x_1^3 = bx_1 + c > x_1^3 + c$. Gevolg: $c < 0$. Tegenspraak.
Dus een type 2 vergelijking heeft één ware oplossing.

Wat Roth doet in vraag 65 bij een type 3 vergelijking zie je niet terug bij andere typen.

Vrg 71. Gegeven is een driehoek ABD met ongelijke zijden. De loodlijn $|AC| = 12$. En er geldt: $|BD| = 14, |AB| + |AD| = 28$. Wat is de lengte van alle zijden?



➔ Ik stel dat deze driehoek een vorm heeft zoals hiernaast gegeven. [1]
Stel: $|AB| = A$. [2]
Dan volgt: $|AD| = 28 - A$.
En dan:
Enerzijds: $(|AC|^2 =)A^2 - x^2$
Anderzijds:
$(|AC|^2 =)(28 - A)^2 - (14 - x)^2$.
Dus:
$588 + 28x = 56A$.
En dan: $A = \frac{21+x}{2}$.

[En met de stelling van Pythagoras volgt:]
$\frac{(21+x)^2}{4} = x^2 + 144$. Ofwel: $42x = 3x^2 + 135$.
Dus: $x^2 + 45 = 14x$.
De oplossingen zijn: $x_{1,2} = 7 \pm 2, x_1 = 5, x_2 = 9$.
En, zie [1] met 5 als $|BC|$ volgt: $|CD| = 9$.
En: $|AB| = \frac{21+5}{2} = 13, |AD| = 15$.

[1] Dus met $|BC| < |CD|$.
[2] Dat lijkt zo geschreven vrij verwarrend, maar is dat in het boek van Roth niet.
Het lijnstuk wordt daar aangeduid in Frakturschrift. Er staat: laat zijde $\mathfrak{AB}$ zijn $1A$.

Vrg 75. Gezocht zijn twee getallen, a en b, waarvoor geldt:
$(a - b)(a^2 - b^2) = 792$ en $(a + b)(a^2 + b^2) = 5720$. Wat zijn die getallen?

➔ Stel hun som $a + b = 2A$. De grootste $a = A + x$, de kleinste $b = A - x$.
Er volgt: $2x((A + x)^2 - (A - x)^2) = 8Ax^2 = 792$.
Dus: $Ax^2 = 99$. (*)
En ook: $2A((A + x)^2 + (A - x)^2) = 4AAA + 4Ax^2 = 5720$.
Dus: $AAA + Ax^2 = 1430$.
Met (*) volgt: $AAA = 1331$ dus: $A = \sqrt[3]{1331} = 11$.

De twee getallen zijn dus: $11 + x$ en $11 - x$.
En hiermee is de opgave te herhalen.
$2x(121 + 22x + x^2 - 121 + 22x - x^2) = 88x^2 = 792$.
Met $x^2 = 9$ volgt: $x = 3$.
De getallen zijn dus 14 en 8.

Vrg 80. Voor vier getallen $a < b < c < d$ in een continue verhouding [1] geldt:
$a * b * c * d = 5184$ en $a + b = 9$. Wat zijn die getallen?

➔ Roth begint te stellen dat geldt: $\sqrt{a * b * c * d} = a * d = b * c$. [2]
Er volgt: $\sqrt{a * b * c * d} = \sqrt{5184} = 72$

Stel het eerste getal $x(= a)$.
Dus: $b = 9 - x$.
Dan volgt: $(9 - x)^2 = x * c$, dus: $c = \frac{81-18x+x^2}{x}$
En dan: $72 = (9 - x) * (\frac{81-18x+x^2}{x})$.
Dus: $72x = 729 - 243x + 27x^2 - x^3$.
Dat geeft: $x^3 + 315x = 27x^2 + 729$. Een type 8 vergelijking. (*)

Dat zou herschreven kunnen worden met $x = y + \frac{27}{3} = y + 9$. Zie bij type 8. [3]
Maar er wordt nu gebruikt: $x = 9 - y$. (**)

Er volgt: $y^3 + 72y = 648$. Een type 1 vergelijking.

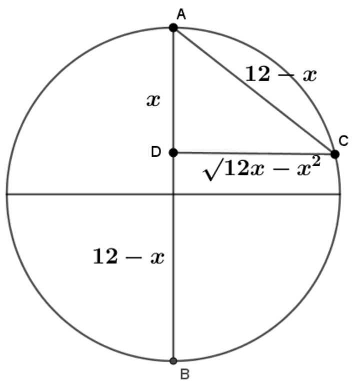
Een oplossing: $y_1 = \sqrt[3]{\sqrt{24^3 + 324^2} + 324} - \sqrt[3]{\sqrt{24^3 + 324^2} - 324}$.
Ofwel: $y_1 = \sqrt[3]{\sqrt{118800} + 324} - \sqrt[3]{\sqrt{118800} - 324}$. [4]
En met $\sqrt{118800} \pm 324 = 60\sqrt{33} \pm 324 = \left(\sqrt{33} \pm 3\right)^3$
vindt Roth: $y_1 = \sqrt{33} + 3 - \left(\sqrt{33} - 3\right) = 6$.

En met (**) volgt als oplossing van vergelijking (*): $x_1 = 3$.
De vier getallen zijn dan: $3, 6, 12, 24$.

De type 1 vergelijking lost Roth ook nog op met zijn eigen methode.
Zoek n zodat $n^2(n + 72) = 648$ en begin in de buurt van $\sqrt[3]{648} = 8{,}6$ …
$8 \to 64 \to 136$
$7 \to 49 \to 121$
$6 \to 36 \to 108$ en nu volgt: $6 * 108 = 648$. Dus een oplossing is: $n = 6$.

[1] Dat betekent hier: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ ofwel: $b^2 = ac, c^2 = bd$.
[2] Dat volgt uit [1]: $\sqrt{abcd} = \sqrt{ac * bd} = \sqrt{b^2c^2} = bc$.
Er volgt ook uit [1]: $a * d = b * c$.
[3] Dit zou leiden naar: $y^3 + 72y = -648$.
[4] Zie paragraaf '*Bijzondere derdemacht wortels*': $118800 - 324^2 = 24^3$.
Zoek nu getallen v, w zodat: $24 = v - w^2$: $(v, w) = (33{,}3)$.

Vrg 81. Gegeven is een cirkel met diameter 12. In een kwadrant staat een zo groot mogelijke rechthoekige driehoek, met de zijden in een continue verhouding (*). Hoeveel zijn de zijden?



➔ Stel $|AD| = x$.
Dan volgt met propositie 13 uit boek 6 van Euclides: [1]
$|CD|$ de middelevenredige van $|AD|$ en $|BD|$.
Dus: $|AD| : |CD| = |CD| : |BD|$.
Er volgt: $|CD| = \sqrt{x(12 - x)}$.

En dan (Pythagoras): $|AC| = \sqrt{x^2 + 12x - x^2} = \sqrt{12x}$.

Er geldt ook (*): $|AD| : |CD| = |CD| : |AC|$
Dus: $|AC| * x = (12x - x^2)$.

Bij elkaar geeft dat: $|AC| = 12 - x = \sqrt{12x}$. [Dus $x < 12$]
Dus: $144 - 24x + x^2 = 12x$.

Ofwel: $144 + x^2 = 36x$.
Omdat de diameter slechts 12 (*Puncten*) is, is de kleinste oplossing de geldige.
Er volgt: $x_1 = 18 - \sqrt{180}$.

Gevolg: $|AD| = 18 - \sqrt{180}, |BD| = |AC| = \sqrt{180} - 6$
En: $|CD| = \sqrt{(18 - \sqrt{180})(\sqrt{180} - 6)} = \sqrt{\sqrt{103680} - 288}$.

[1] Boek 6 prop. 13: *Hoe een middelevenredige te vinden bij twee gegeven lijnstukken*.

Vrg 85. Twee vierdemachts-getallen zijn samen 3026. Hun vierdemachts-wortels [1] zijn samen 12. Wat zijn die getallen?

➔ Stel de vierdemachts-wortels zijn $6 + x$ en $6 - x$.
Er volgt: $(6 + x)^4 + (6 - x)^4 = 3026$.
Uitgewerkt: $2592 + 432x^2 + 2x^4 = 3026$.
Dus: $x^4 + 216x^2 = 217$.
Gevolg: $x^2 = 1$ en $x_1 = 1$.
De vierdemachts-wortels zijn dus 7 en 5 en
het gaat dus om de getallen $7^4 = 2401$ en $5^4 = 625$.

[1] Er staat 'hun wortels zijn…' en uit het verhaal blijkt $\sqrt[4]{\ldots}$

Vrg 89. Een koopman komt bij drie Joden [Zie opm. 1]. De eerste leent hem 1000 florijnen met rente op rente 5 jaar lang. Alle rentebedragen per jaar vermenigvuldigd geeft 25937424601. [1]
De tweede geeft hem 1024 florijnen, ook met rente [2] op rente 5 jaar lang. Al de rentebedragen opgeteld geeft in totaal $821\frac{9}{32}$ florijnen. De derde leent hem een som geld in florijnen, ook 5 jaar lang, met rente [3] op rente. Al deze bedragen met de hoofdsom samen is 2000 florijnen.
Bij de laatste is de rente per 100 florijnen $1\ fl\ 23\ m\ 2\frac{1}{3}n$ [4] minder dan bij de tweede geldlener.
De vraag is wat de eerste en tweede geldleners aan percentages rente rekenen en wat is bij de laatste geldlener geleend.

➔ Er volgen in het boek bijna vijf pagina's uitwerking.
Roth begint met te melden dat in deze en soortgelijke vragen de rentebedragen feitelijk in continue verhouding staan. [5] Bij 5 jaar zal de rente (van de eerste belening) in het derde jaar nl. de middelste van die in continue verhouding staande getallen 121 florijnen zijn en dat is $\sqrt[5]{product}$ [Zie opm. 2].

Er volgt een procedure om zo'n wortel uit het product te vinden.
Het zoeken is dus een getal ABC met $ABC^5 = 25937424601$.
Dat $A = 1$ is meteen te zien.
Er volgt snel $B = 2$ [6] en dan volgt: $(12C)^5 = \cdots$.
Uitgewerkt staat er, modern geschreven:
$1036900000 * C + 17280000 * C^2 + 144000 * C^3 + 600 * C^4 + C^5 = 1054224601$.
Ofwel: $Honderdvoud + C^5 = 1054224600 + 1$. Het getal eindigt op 1 en dus $C = 1$.
Gevonden is: $\sqrt[5]{product} = 121$. (*)

Stel nu dat de **eerste** geldlener voor 10 florijnen een rente vraagt van x florijnen.
Dan volgen voor de rentes grote vergelijkingen, zegt Roth. [7] Hij gaat daarom iets anders te werk.
Eerste jaar is de rente $100x$ (florijnen). De schuld is nu: $1000 + 100x$.
Tweede jaar rente: $(100 + 10x) * x = 100x + 10x^2$. De schuld is nu: $1000 + 200x + 10x^2$
Derde jaar rente: $(100 + 20x + x^2) * x = 121$. Uit (*).

De vergelijking wordt dan: $x^3 + 20x^2 + 100x = 121$. Een type 7. (**)
Met $x = y - \frac{20}{3}$ volgt: $y^3 = 33\frac{1}{3}y + 195\frac{2}{27}$. Een type 2 vergelijking met rationale getallen.
Vermenigvuldig nu met 27 en zet $z = 3y$.
Er volgt: $z^3 = 300z + 5267$. Een type 2 vergelijking.
Roth lost die op met zijn methode.
Zoek n met $n(n^2 - 300) = 5267$ en begin vanaf $\sqrt[3]{5267} = 17{,}3$ ...
$18 \rightarrow 18^2 = 324 \rightarrow 324 - 300 = 24$
$19 \rightarrow 361 \rightarrow 61$
$20 \rightarrow 400 \rightarrow 100$
$21 \rightarrow 441 \rightarrow 141$
$22 \rightarrow 484 \rightarrow 184$
$23 \rightarrow 529 \rightarrow 229$ en er volgt: $23 * 229 = 5267$. $n = 23$ voldoet.
Een oplossing van (**) is dan:
$x_1 = y_1 - 6\frac{2}{3} = \frac{1}{3}z_1 - 6\frac{2}{3} = \frac{1}{3} * 23 - 6\frac{2}{3} = 1.$
Dus voor 10 florijnen vraagt de eerste geldlener aan rente 1 florijn. [10% dus]

Dan de **tweede** lening. Roth schrijft nu de eenvoudigste en kortste weg te gaan volgen.
Hoofdbedrag plus alle rentes bij elkaar is $1845\frac{9}{32}$ florijnen.
De breuk is onhandig dus eerst die even wegwerken.
Bij het hoofdbedrag: $1024 * 32 = 32768$.
Bij het hoofdbedrag plus alle rentes: $1845\frac{9}{32} * 32 = 59049$.
Neem uit beide getallen $\sqrt[5]{\ldots}$. Dat geeft 8 resp. 9.
Nu is de bewering:
Zoals deze twee getallen zich verhouden zo verhouden zich ook het hoofdbedrag met de schuld na één jaar [Zie opm. 3]. Gevolg: bij hoofdbedrag van 8 florijnen is de schuld na één jaar 9 florijnen.
Het gerekende rentebedrag is dus per 8 florijnen 1 st. Ofwel per 100 florijnen $12\frac{1}{2}$ st. [$12\frac{1}{2}$% dus]

Ga nu op zoek naar het hoofdbedrag van de **derde** geldlening.
Het gerekende rentebedrag per 100 florijnen is dus nu: $12\ fl\ 30\ m$ minus $1\ fl\ 23\ m\ 2\frac{1}{3}n$ en dat is $11\ fl\ 6\ m\ 4\frac{2}{3}\ n$. [8]
Dit is $\left(11 + \frac{6}{60} + \frac{4\frac{2}{3}}{420}\right) = 11\frac{1}{9}$ florijnen. Dus samen met het hoofdbedrag: $111\frac{1}{9}$ florijnen.
En ook nu [zie opm. 3] volgt, met wegwerking van de breuk:
Hoofdbedrag: $100 * 9 = 900$. Samen met de rente: $111\frac{1}{9} * 9 = 1000$.
Dus bij 900 florijnen een winst van 100 florijnen. [$11\frac{1}{9}$% dus]
Er volgt: $winst\ (per\ jaar) = \frac{1}{9} * hoofdbedrag\ (begin\ jaar)$.
Er volgt een berekening met alle winsten per jaar [zie opmerking 3]:
Totale schuld, hoofdsom plus rentes na jaar 5: $S(5) = 2000 = a\left(1 + \frac{1}{9}\right)^5$.

Totale schuld na jaar 4: $S(4) = a\left(1+\frac{1}{9}\right)^4; \frac{S(5)}{S(4)} = \frac{10}{9}; S(4) = 2000 * \frac{9}{10} = 1800.$

Totale schuld na jaar 3: $S(3) = a\left(1+\frac{1}{9}\right)^3; \frac{S(4)}{S(3)} = \frac{10}{9}; S(3) = 1800 * \frac{9}{10} = 1620.$

Totale schuld na jaar 2: $S(2) = a\left(1+\frac{1}{9}\right)^2; \frac{S(3)}{S(2)} = \frac{10}{9}; S(2) = 1620 * \frac{9}{10} = 1458.$

Totale schuld na jaar 1: $S(1) = a\left(1+\frac{1}{9}\right); \frac{S(2)}{S(1)} = \frac{10}{9}; S(1) = 1458 * \frac{9}{10} = 1312\frac{1}{5}.$

Hoofdsom in het begin: $a = 1312\frac{1}{5} * \frac{9}{10} = 1180\frac{49}{50}$..

[Sneller zou gaan: $a\left(1+\frac{1}{9}\right)^5 = 2000$. Dus: $a = 2000 * \frac{59049}{100000} = 1180\frac{49}{50}$.]

De derde geldlener gaf dus $1180\frac{49}{50}$ florijnen.

En de rij winsten $R(1) \ldots R(5)$: $131\frac{11}{50}$, $145\frac{4}{5}$, $162, 180, 200$. Samen: $819\frac{1}{50}$ florijnen! [9]

[1] In de tekst staat hier florijnen achter, maar florijnen maal florijnen is ???
[2] In de tekst staat *Wucher*: woekerrente. Typische naamgeving?
[3] In de tekst staat *Gewin*: winst voor de geldgever.
[4] Onbekende muntsoorten: stuiver (*m*)? penning (*n*): *Schwarze Münz*?
[5] Met rente $R(i)$ in jaar $i \rightarrow R(2) : R(1) = R(3) : R(2) = R(4) : R(3) = etc.$
[6] Hoe is lastig te zien:
$(A+2)^5 - A^5 = 5 * 2A^4 + 10 * 2^2A^3 + 10 * 2^3A^2 + 5 * 2^4A + 2^5.$
Met $A = 10$ staat rechts te lezen en in de tekst:
$10 * 10^4 + 40 * 10^3 + 80 * 10^2 + 80 * 10 + 32 = 148832.$
[7] Mogelijk bedoelt hij zoiets als in opmerking 2.
[8] Interpretatie van schrijver dezes: $1\,fl = \ 60\,m = 420\,n.$
[9] Woekerwinsten? Aan de drie geldleners moet rente betaald worden en in 5 jaar is dit opgelopen tot resp. $61\%, 80\%, 69\%$ van het geleende bedrag!

Opmerking 1.
Joden zijn geldverstrekkers. Dat was niet ongebruikelijk in die tijd. In de christelijke middeleeuwse wereld was geld lenen met rente verboden door de Katholieke kerk. In de islamitische wereld is dit trouwens nog steeds het geval. Daardoor was het lastig om een bedrijf op te starten of andere financiële risico's aan te gaan. Een middeleeuwse ondernemer kon soms geld lenen van een goedgezinde edelman of bisschop. Ook Joden, die niet aan de Katholieke bepalingen gebonden waren, leenden geld uit tegen rente – iets wat hen veel vijanden bezorgde.
Bron: https://historischeuitgeverij.com/geld-lenen-door-de-eeuwen-heen/

Opmerking 2.
Want:
$\frac{R(2)}{R(1)} = \frac{R(3)}{R(2)} = \frac{R(4)}{R(3)} = \frac{R(5)}{R(4)}$ dus: $\boldsymbol{R(1)}R(2)R(3)R(4)\boldsymbol{R(5)} = R(2)^2R(4)^2R(3) = (R(3)^2)^2R(3).$
Of bij een rente van $p\%$ per jaar en met rente op rente volgt bij lening van bedrag a: $(r = \frac{p}{100})$
rente jaar 1,2,...: $R(1) = ar; R(2) = ar(1+r); R(3) = ar(1+r)^2; \ldots R(i) = ar(1+r)^{1-i}.$
$\prod_{i=1}^{5} R(i) = a^5r^5(1+r)^{10}$. En dan volgt: $\sqrt[5]{product} = ar(1+r)^2 = R(3).$

Opmerking 3.
Zie bij opmerking 2: $\sum_{i=1}^{5} R(i) = ar(1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^4) = a(1+r)^5 - a.$
Dus samen met de hoofdsom: $a(1+r)^5$.
En dan: $\sqrt[5]{32 * a(1+r)^5} = 2(1+r)\sqrt[5]{a}.$

En ook: $\sqrt[5]{32 * a} = 2\sqrt[5]{a}$. Verhouding hier tussen is $(1 + r) : 1$.
Verhouding tussen eerste schuld en de hoofdsom is $(a + ar) : a = (1 + r) : 1$.
Verhouding tussen totale schulden in opeenvolgende jaren is $(1 + r) : 1$.

Vrg 94. Ik heb een vaatje wijn. Daaruit haal ik drie maat [1] en vul het weer aan met water. Na vermenging haal ik er wederom drie maat uit en vul weer met water aan. Dit doe ik nog een derde, een vierde en een vijfde keer. Uiteindelijk zit er 31 keer zoveel water als wijn in het vaatje. Hoeveel maat wijn zat er in het begin in dit vaatje?

➔ Roth springt nu meteen naar een redenering die voorkennis vraagt.
Daarom nu, afwijkend, die voorkennis eerst.
Stel dat in het vaatje zit in het begin x maat wijn en 0 maat water.

	wijn	**water**	
In vaatje	x	0	
Eruit schep 1 met	3	0	Dat gaat weg en wordt vervangen door water.
In vaatje resteert	$x - 3$	3	Blijkbaar $x > 3$.
Eruit schep 2 met	$3\frac{x-3}{x}$	$3 - \cdots$	
In vaatje resteert	$\frac{(x-3)^2}{x}$	$x - \cdots$	
Eruit schep 3 met	$\frac{3(x-3)^2}{x^2}$	$3 - \cdots$	
In vaatje resteert	$\frac{(x-3)^3}{x^2}$	$x - \cdots$	
Na schep 4 resteert in vaatje	$\frac{(x-3)^4}{x^3}$	$x - \cdots$	
Na schep 5 resteert in vaatje	$\frac{(x-3)^5}{x^4}$	$x - \cdots$	$wijn : water = 1 : 31$

En dan volgt: $\frac{(x-3)^5}{x^4} : \left(x - \frac{(x-3)^5}{x^4}\right) = 1 : 31$.
Blijkbaar geldt:
$31(x-3)^5 = x^5 - (x-3)^5$.
$32(x-3)^5 = x^5$.
$2(x-3) = x$.
$x = 6$.
Dus in het begin zat 6 maat wijn in het vaatje.

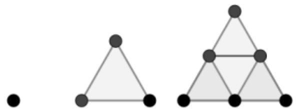
Aanpak van Roth: stel dat er eerst 32 maat wijn in het vaatje zit.
De verhouding van de wijnmaten in het vaatje na een schep is: $\frac{wijn_{nieuw}}{wijn_{oud}} = \frac{x-3}{x}$.
En na vijf keer resteert: $\frac{1}{32} = \left(\frac{x-3}{x}\right)^5$. [2] Dus $\frac{x-3}{x} = \frac{1}{2}, x = 6$.

[1] Blijkbaar een eenheid van volume.
[2] Roth spreekt hier over als de *4^e^ media proportio.*
De aanpak hierboven past volgens Roth bij een verhaal over cossische vergelijkingen.

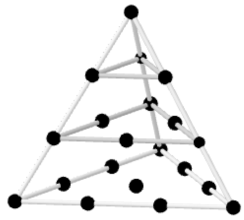
Polygonale getallen.

In het boek van Roth volgen nu vraagstukken over polygonale getallen.
Polygonaal betekent ‘veelhoekig’, ‘naar vele hoeken lopend’.

Zie figuur 1. Daar staan driehoeksgetallen.
De rij 1,3,6,10, … is het aantal stippen $S(n)$ van opeenvolgende gelijkzijdige driehoeken.
$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.
De som dus van een rekenkundige rij.
Zulke getallen S(n) heten driehoeksgetallen (***trigonal***).
Een aantal lagen vormen tetraëders, piramides, en hun som geeft *piramidegetallen:* $1, 4, 10, 20, 35, \ldots$
Zie figuur 2.
De som van een aantal driehoeksgetallen:
$T(n) = \sum_{i=1}^{n} S(i) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

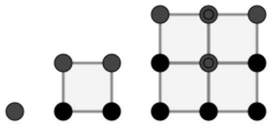


figuur 1



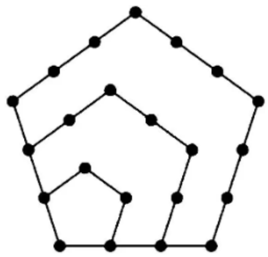
figuur 2

Dan de vierhoeksgetallen (***tetragonal***), zie figuur 3.
De rij 1,4,9, … hoort bij vierkanten: een rij van kwadraten.
Roth neemt weer de som van vierhoeksgetallen.
$K(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
Dat geeft de puntenrij $1, 5, 14, 30, \ldots$



figuur 3

Dan de vijfhoeksgetallen (***pentagonal***), zie figuur 4.
Dat geeft de rij: $1, 5, 12, \ldots$
Vijfhoeksgetal $V(n) = \frac{1}{2}n(3n-1)$.
De som van een aantal vijfhoeksgetallen geeft
$P(n) = \sum_{i=1}^{n} V(i) = \frac{1}{2}(n+1)n^2$.
Dat geeft de puntenrij $1, 6, 18, 40, \ldots$



figuur 4

In het boek staat een tabel bij vraag 121 met de somformules, niet met n maar met x genoteerd.
Een paar rijen daaruit:

trigonal	$\frac{1}{6}(1x^3 + 3x^2 + 2x)$	**decagonal**	$\frac{1}{6}(8x^3 + 3x^2 - 5x)$
tetragonal	$\frac{1}{6}(2x^3 + 3x^2 + 1x)$	**dodecagonal**	$\frac{1}{6}(10x^3 + 3x^2 - 7x)$
pentagonal	$\frac{1}{6}(3x^3 + 3x^2 + \mathbf{0x})$	**tetradecagonal**	$\frac{1}{6}(12x^3 + 3x^2 - 9x)$
hexagonal	$\frac{1}{6}(4x^3 + 3x^2 - 1x)$	**hexadecagonal**	$\frac{1}{6}(14x^3 + 3x^2 - 11x)$
octogonal	$\frac{1}{6}(6x^3 + 3x^2 - 3x)$	**icosigonal**	$\frac{1}{6}(18x^3 + 3x^2 - 15x)$

Onder de lijst met 88(!) rijen staat nog ‘en zo voort zonder einde kan deze tabel gemaakt worden’.

Wat stelt die lijst voor?

Roth schrijft dat bijvoorbeeld bij de vijfhoeken de laatste in de rij (*lezten terminum*) een pentagonaal getal is en daarboven worden gezet vijfhoeken met afnemende pentagonaal getallen tot 1. Dat is de top van een vijfzijdige piramide. De ‘inhoud’ van die piramide is dan de som van deze getallen en dat is die somformule, hieronder in kolom A. Die getallen heten ook wel piramidegetallen.
Tabellen met concrete getallen:

Trigonal
$A(x) = \frac{1}{6}(1x^3 + 3x^2 + 2x)$.

x =	A =	B	C	D
1	1	1	1	
2	4	3	2	1
3	10	6	3	1
4	20	10	4	1
5	35	15	5	1
6	56	21	6	1
7	84	28	7	1
8	120	36	8	1
9	165	45	9	1
10	220	55	10	1

Tetragonal
$A(x) = \frac{1}{6}(2x^3 + 3x^2 + 1x)$.

x =	A =	B	C	D
1	1	1	1	
2	5	4	3	2
3	14	9	5	2
4	30	16	7	2
5	55	25	9	2
6	91	36	11	2
7	140	49	13	2
8	204	64	15	2
9	285	81	17	2
10	385	100	19	2

Pentagonal
$A(x) = \frac{1}{6}(3x^3 + 3x^2)$.

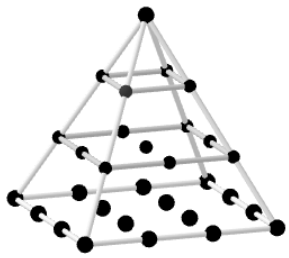
x =	A =	B	C	D
1	1	1	1	
2	6	5	4	3
3	18	12	7	3
4	40	22	10	3
5	75	35	13	3
6	126	51	16	3
7	196	70	19	3
8	288	92	22	3
9	405	117	25	3
10	550	145	28	3

Kolom B is een verschilrij van kolom A.
B bevat dus rijen van resp. driehoeksgetallen, vierhoeks-getallen (kwadraten) en vijfhoeksgetallen.
Kolom C is een verschilrij van kolom B. Dat is een rekenkundige rij.
Kolom D is een verschilrij van kolom C. Dat is altijd een rij van constanten, de rij met verschil v.

Na drie keer een verschilrij maken ontstaat dus een rij van constanten.
In de tabel: $D(x) = v;\ (x = 2,3, \dots)$.
In de tabel: $C(x) = 1 + (x - 1)v;\ (x = 1,2,3, \dots)$.
In de tabel: $B(x) = 1 + (1 + v) + \cdots + (1 + (x - 1)v) = \frac{1}{2}x(2 + (x - 1)v)$.
En dan in de tabel: $A(x) = \frac{1}{6}x(x + 1)(xv + 3 - v) = \frac{1}{6}(vx^3 + 3x^2 + (3 - v)x)$.
Bij v hoort een $(v + 2)$-hoeksgetal.

De kolom B bevat de polygonale getallen.
Getal x is het aantal ‘lagen’ (*stett*) van de piramide.
Zie figuur 5 voor vier lagen vierhoeksgetallen.

Mogelijk omdat $B(x)$ altijd kwadratisch in x is, noemt Roth de waarde van x de *Quadrat-wurzel*.


figuur 5

De volgende vragen gaan over polygonale getallen. Voor uitleg, zie de vorige twee pagina's.
In het boek gaan tientallen vraagstukken over dit type getallen.

Vrg 100. Een *hexagonaal* [1] getal is een drievoud van een *icosigonaal* [1] getal. Als men de *quadrat* wortels van beide getallen optelt komt er 50. Wat zijn die getallen?

➔ Stel x voor de *quadrat*-wortel van het *icosigonale* getal.
Dan volgt: $p = 50 - x$.
Er volgt voor het *icosigonaal* getal: $I(x) = \frac{1}{2}x(2 + (x-1)18) = 9x^2 - 8x$. [2]
En voor het *hexagonale* getal: $H(p) = \frac{1}{2}p(2 + (p-1)4) = p(2p-1)$. [2]
Alles ingevuld geeft:
$3 * (9x^2 - 8x) = 2(50 - x)^2 - (50 - x)$.
Ofwel: $27x^2 - 24x = 4950 - 199x + 2x^2$.
En dan resteert: $x^2 + 7x = 198$.
En dan $x_1 = 11$. En $p = 39$.
Het gaat dus om het *icosigonale* getal $I(11) = 1001$.
En het *hexagonale* getal: $H(39) = 3003$.

[1] Zeshoeksgetal resp. 20-hoeksgetal.
[2] Eerst $v = 18$ en dan $v = 4$ bij het 6-hoeksgetal.

Vrg 105. Een kubisch getal is gelijk aan een *hecatoennenicondoctagonaal* getal. [1] Hun wortels zijn gelijk. Wat is dat getal?

➔ Stel de kubische wortel is x.
Het kubische getal is dan x^3 en het *heca*… getal is $\left(\frac{196x-195+1}{2}\right) * x$. [2]
Dan volgt: $x^3 = 98x^2 - 97x$.
Ofwel: $x^2 = 98x - 97$.

En dan: $x_1 = 97, x_2 = 1$.
Deze vraag heeft dus twee oplossingen.
Met 97 volgt dat het gaat om $97^3 = 912673$.
En het *heca…* getal $\left(\frac{196*97-195+1}{2}\right) * 97 = 912673$.

[1] Dit gaat over een 198-hoeksgetal en hier dus $v = 196$.
[2] Zoals het hier staat doet Roth de berekening. Dit is gelijk aan $\frac{1}{2}x(2 + (x-1)v)$.

Vrg 110. Er zijn twee opeenvolgende *hexodecagonale* getallen. [1] Het product van het *hexo…*-getal, zijn *hexo…l*-wortel [2] en de *quadrat*-wortel van het ene getal afgetrokken van het product van het andere getal is 21601671. Wat zijn die getallen?

➔ Noem de twee *quadrat*-wortels x en $x + 1$.
De kleinste *hexo…*-wortel is $14x - (14 - 1) = 14x - 13$. [2]
Het kleinste *hexo…*getal is dan $\frac{1}{2}x(14x - 13 + 1) = 7x^2 - 6x$.
En het product is dan: $(7x^2 - 6x)(14x - 13)x = 98x^4 - 171x^3 + 78x^2$. (*)
De grootste *hexo…*wortel is $(14(x + 1) - (14 - 1) = 14x + 1$.

Het grootste *hexo-…* getal is dan $7(x+1)^2 - 6(x+1) = 7x^2 + 8x + 1$.
En het grootste product is dan
$(7x^2 + 8x + 1)(14x + 1)(x + 1) = 98x^4 + 217x^3 + 141x^2 + 23x + 1$. (**)

Dus (**) minus (*) geeft: $392x^3 + 63x^2 + 23x + 1 = 21601671$
Ofwel: $392x^3 + 63x^2 + 23x = 21601670$. (***)
Deze vergelijking oplossen vergt bijna drie pagina's.

Alles keer 392^2 geeft: $(392x)^3 + 63(392x)^2 + 23 * 392(392x) = 3319399018880$. [13 cijfers]

En met $392x = y$ volgt: $y^3 + 63y^2 + 9016y = 3319399018880$. Een type 7 vergelijking.
Met $y = z - \frac{63}{3} = z - 21$ volgt:
$z^3 + 7693z = 3319399189694$. Een type 1 vergelijking.
Dat geeft: $z_1 = 14917$.

Er volgt ook nog een controle:
Zoek n met $n(n^2 + 7693) = 3319399189694$ en $\sqrt[3]{3319399189694} = 14917{,}1 \ldots$
$14917 \rightarrow (14917)^2 = 222516889 \rightarrow 222524582$
en eerste en laatste getal vermenigvuldigen geeft 3319399189694.

Oplossing van vergelijking (***) is dan: $x_1 = \frac{y_1}{392} = \frac{z_1 - 21}{392} = 38$.
Dus de twee *quadrat*-wortels zijn 38 en 39.

En de *hexodecagonale* getallen zijn:
$H(38) = 9880$ en $H(39) = 10413$.

[1] Dat zijn 16-hoeksgetallen: $v = 14$.
[2] Het getal $(vx - (v-1))$: de laatste in de rekenkundige rij $B(x)$.

Vrg 116. Er is een cossisch voorbeeld gegeven met vergelijking *1.cub.AEquat.21.*ʒ*.min.722.* [1] Een oplossing is 19. Wat is de andere oplossing?

➔ De vergelijking is dus: $x^3 = 21x^2 - 722$.
Roth schrijft dat dit op twee manieren kan worden aangepakt.
Ten eerste door de oplossing op een ordentelijke wijze te zoeken zoals men gewoonlijk vergelijkingen oplost en zoals hij nu eerst zal laten zien.
$x^3 + 722 = 21x^2$. Een vergelijking van type 6 . (*)
Met $x = y + \frac{21}{3} = y + 7$ volgt:
$y^3 + (c - 2\left(\frac{a}{3}\right)^3) = a(\frac{a}{3})y$, dus $y^3 + 36 = 147y$. (**) Een type 3 vergelijking.
Met $36 = y(147 - y^2)$ en $y = 12$ volgt: $12(147 - 144) = 36$. Er is een oplossing gevonden.
Dat geeft voor (*): $x_1 = y_1 + 7 = 19$.

Zie nu paragraaf *Ontbinding in factoren?*
Als van vergelijking (**) een oplossing bekend is, dan volgen de andere oplossingen:
$y_{2,3} = -\left(\frac{y_1}{2}\right) \pm \sqrt{b - 3\left(\frac{y_1}{2}\right)^2} = -6 \pm \sqrt{147 - 108} = -6 \pm \sqrt{39}$.
Dus $y_2 = \sqrt{39} - 6$ is de andere ware oplossing.
En $y_3 = -(\sqrt{39} + 6)$ is een fictieve oplossing.

De andere ware oplossing van vergelijking (*): $x_2 = y_2 + 7 = \sqrt{39} + 1$.
En de fictieve oplossing van vergelijking (*): $x_3 = y_3 + 7 = -\sqrt{39} + 1$.

Dan vervolgt Roth:
Of volgens de regel van Cardano vind je de andere oplossing van $x^3 + 722 = 21x^2$ zo…
Zij $x_1 = 19$ de eerste ware oplossing, dan volgt, zie weer paragraaf *Ontbinding in factoren*?
dat $x_{2,3}$ oplossingen zijn van $x^2 + (x_1 - 21)x + x_1(x_1 - 21) = 0$.
Dat geeft: $x_{2,3} = \frac{21-x_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(21-x_1)^2}{4} + x_1(21 - x_1)} = 1 \pm \sqrt{1 + 38} = 1 \pm \sqrt{39}$.
Daarmee is de ware waarde $x_2 = \sqrt{39} + 1$ gevonden.

[1] In het Latijn gesteld: de taal van de wetenschap op dat moment.

Vrg 120. Met de rij $1, 2, 3, \ldots, 225$ wordt gevraagd een rechthoekige tabel te maken zodat zowel horizontaal, verticaal als diagonaal de som 1695 is. [1] De vraag is of zoiets door een standaard berekening te maken is en welke afmetingen die tabel heeft.

➔ Roth: Deze en soortgelijke vragen over ongelijke vierkanten kunnen en mogen op vele manieren beantwoord worden.
Ten eerste, zoek het middelste getal van deze rekenkundige rij getallen.
Dat kan door het eerste en het laatste getal op te tellen en dan te halveren, dus $\frac{1}{2}(1 + 225) = 113$.
Trek nu de wortel uit het laatste getal van de rij dus $\sqrt{225} = 15$. Hiermee is de breedte en de lengte van de tabel bekend. [2]
Ook nu nemen we het midden dus $\frac{1}{2}(1 + 15) = 8$.
Dan volgt dat in het achtste veld [3] nu 113 moet komen te staan.
Dat veld vind je door bijvoorbeeld in een hoek, linksonder, te beginnen en dan acht velden naar rechts te gaan, houd jouw vinger stil (!), en tel dan acht velden omhoog.
Zet nu getal 1 in een veld naast die cel, in dit geval eronder. [Zie de tabel]
Dan moet boven het veld met 113 komen te staan: 225. [4]
Zie de aanvulling.
Ga je bij invulling over de 'onderrand' , ga dan aan de bovenrand in een kolom naar rechts verder.
En zo wordt in elke rij, kolom en diagonaal 15 getallen gezet zodat hun som is: $15 * 113 = 1695$.

[1] Hij gaat dus een Latijns vierkant maken!
[2] Dit alles werkt bij een rij $1, 2, \ldots, oneven^2$.
[3] Zie de tabel als een matrix van 15 bij 15, dan is hier bedoeld cel $C(8{,}8)$.
[4] En dat is de procedure: som van een tweetal $1 + 225 = 2 * 113 = 226$.

Aanvulling.
Zie de tabel rechts: op de diagonaal, beginnend met 1 staat de rij $2, 3, \ldots$ Die komt van linksboven binnen en eindigt dan met 15.
Cel $C(7{,}7) = 113 + 15$ *en* $C(9{,}9) = 113 - 15$. Etc. voor $C(n, n)$.
En $C(7{,}6) = 1 + 15$ *en* $C(9{,}8) = 226 - 15 = 211$. Etc. $C(n + 1, n)$.
Alle diagonalen tellen door: $C(n - 1, n + 1) = \cdots, 112, 113, \ldots$
En: $C(n + 1, n - 1) = \cdots, 128, 129, \ldots$
Etc. etc.

112	225	C(9,9)
15	**113**	C(9,8)
C(7,7)	1	114
C(7,6)	C(8,6)	2

En het resultaat is:

Oben.

106	219	92	205	78	191	64	177	50	163	36	149	22	135	8	
9	107	220	93	206	79	192	65	178	51	164	37	150	23	121	9
122	10	108	221	94	207	80	193	66	179	52	165	38	136	24	122
25	123	11	109	222	95	208	81	194	67	180	53	151	39	137	25
138	26	124	12	110	223	96	209	82	195	68	166	54	152	40	138
41	139	27	125	13	111	224	97	210	83	181	69	167	55	153	41
154	42	140	28	126	14	112	225	98	196	84	182	70	168	56	154
57	155	43	141	29	127	15	113	211	99	197	85	183	71	169	57
170	58	156	44	142	30	128	1	114	212	100	198	86	184	72	170
73	171	59	157	45	143	16	129	2	115	213	101	199	87	185	73
186	74	172	60	158	31	144	17	130	3	116	214	102	200	88	186
89	187	75	173	46	159	32	145	18	131	4	117	215	103	201	89
202	90	188	61	174	47	160	33	146	19	132	5	118	216	104	202
105	203	76	189	62	175	48	161	34	147	20	133	6	119	217	105
218	91	204	77	190	63	176	49	162	35	148	21	134	7	120	218
106.	219.	92.	205.	78.	191.	64.	177.	50.	163.	36.	149.	22.	135.	8.	121

Unten.

Na dit intermezzo gaat Roth weer verder met de polygonale getallen.

Vrg 125. Enige *octogonale* getallen zijn samen 1386. Om hoeveel getallen gaat het?

➔ Uit de tabel, zie de paragraaf *Polygonale getallen*, is de somformule te halen:
$\frac{1}{6}(6x^3 + 3x^2 - 3x) = 1386.$
Ofwel: $6x^3 + 3x^2 - 3x = 8316.$
Dan volgt: $36 * 6x^3 + 3 * 36x^2 - 3 * 6 * 6x = 36 * 8316.$ [1]
En met $6x = y$ volgt: $y^3 + 3y^2 = 299376 + 18y$. Een type 9 vergelijking. [1]

Met $y = z - \frac{a}{3} = z - 1$ volgt: $z^3 = 21z + 299356$. Een type 2.

Er volgt met: $z_1 = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$

$z_1 = \sqrt[3]{149678 + \sqrt{22403503341}} + \sqrt[3]{149678 - \sqrt{22403503341}}.$

Zie nu paragraaf *Bijzondere derdemacht wortels*.
$149678^2 - 22403503341 = 343$. De derdemacht wortel hiervan is 7.
Zoek nu getallen $p\ en\ q$ zodat $p^2 = 7 + q$.

Nu kiest Roth zo: $\sqrt{22403503341} = 4482\sqrt{1115\frac{1}{4}}$ en dan: $q = 1115\frac{1}{4}$.

Gevolg: $p = \sqrt{1122\frac{1}{4}} = 33\frac{1}{2}$. En: $z_1 = p + \sqrt{q} + p - \sqrt{q}$.
Dat geeft: $z_1 = 67$.
Hij laat dit ook nog even zien met zijn eigen methode: $n(n^2 - 21) = 299356$.
$\sqrt[3]{299356} = 66{,}8$ … In de buurt van dit getal moet je zoeken.
$66 \rightarrow 66^2 = 4356 \rightarrow (4356 - 21) = 4335$
$67 \rightarrow 4489 \rightarrow 4468$ en $67 * 4468 = 299356$. Dus $n = 67$ voldoet.

Tenslotte: $x_1 = \frac{1}{6}y_1 = \frac{1}{6}(z_1 - 1) = 11$. Het gaat dus om 11 *octogonale* getallen.

[1] Roth schrijft $x^3 = 299376 + 18x - 3x^2$. De x^2-term rechts!

Vrg 130. Enige *dismyrioenneakischilioheptacosiotessaracontoctogonale* getallen [1] zijn samen 1665804. Om hoeveel getallen gaat dat?

➔ Roth schrijft dat dit type getallen niet in zijn lijst voorkomt, die gaat maar(!) tot 100. Maar door soortgelijk als bij de andere getallen te denken, is de somformule te vinden.
Er volgt: $\frac{1}{6}(29746x^3 + 3x^2 - 29743x) = 1665804$.
Dan keer 6 en vervolgens keer 29746^2 geeft:
$29746^3x^3 + 3 * 29746^2x^2 - 29743 * 29746^2x = 29746^2 * 6 * 1665804$.
Met $y = 29746x$ volgt nu:
$y^3 + 3y^2 = 884735278y + 8843665308305184$. [16 cijfers] Een type 9 vergelijking.
Met $y = z - \frac{a}{3} = z - 1$ volgt nu:
$z^3 = 884735281z + 8843664423569904$. Een type 2 vergelijking.

De formules van Cardano spreken over kwadraten en derdemachten van deze grote getallen en Roth werkt alles handmatig uit. Voor uitkomsten met 32 cijfers schrikt hij niet terug!

Er volgt met $m = 4421832211784952$ en $n = 19552574459834281437734509264783\frac{26}{27}$:
$z_1 = \sqrt[3]{m + \sqrt{n}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{n}}$.
En nu weer met het idee uit paragraaf *Bijzondere derdemacht wortels* volgt:
$\sqrt[3]{m^2 - n} = 294911760\frac{1}{3}$. Zoek nu getallen $p\ en\ q$ zodat $p^2 = 294911760\frac{1}{3} + q$.
Roth vindt: $q = 10544292671\frac{11}{12}$ (!) en $p = \sqrt{10839204432\frac{1}{4}} = 104111\frac{1}{2}$. [2]

Dus: $z_1 = p + \sqrt{q} + \left(p - \sqrt{q}\right) = 208223$.
En dan: $x_1 = \frac{y_1}{29746} = \frac{z_1 - 1}{29746} = \frac{208222}{29746} = 7$.

Er zijn dus 7 *dismy…*getallen bij elkaar geteld.
Roth erkent dat het voorbeeld vrij moeizaam is, maar hij wil de aanpak toch laten zien.

[1] Bij reconstructie blijkt het te gaan over 29748-hoeks getallen. $v = 29746$.
Het woord telt 53 letters, als ik goed geteld heb.
In modern Grieks is 29748: είκοσι εννέα χίλιάδες επτακόσια σαράντα οκτώ
ofwel *eíkosi ennéa chíliádes eptakósia saránta októ.* Volgens een vertaalmachine…
[2] Met *Wolfram-Alpha* is dit alles gecheckt!

Vrg 135. De som van enige *enneagonale* getallen met de som van hun *quadrat*-wortels en de som van hun *polygonale* wortels is 3289. Om hoeveel van zulke getallen gaat het?

➔ Zie paragraaf *Polygonale getallen* voor de somformules. Het gaat hier om 9-hoeksgetallen..
Stel dat het gaat om x *enneagonale* getallen en $v = 7$.
Som van al deze getallen is: $A(x) = \frac{1}{6}(7x^3 + 3x^2 - 4x)$.

Som van hun *polygonale*-wortels: $B(x) = \frac{1}{2}(7x^2 - 5x)$.
Som van alle *quadrat*-wortels: $Q(x) = 1 + 2 + \cdots + x = \frac{1}{2}(x^2 + x)$.
Dit alles bij elkaar geeft: $\frac{1}{6}(7x^3 + 27x^2 - 16x) = 3289$.

Dan keer 6 en dan keer 7^2 geeft:
$7^3x^3 + 27 * 7^2x^2 - 16 * 7 * 7x = 996966$.
Met $y = 7x$ volgt nu:
$y^3 + 27y^2 = 112y + 966966$. Een type 9 vergelijking.
Met $y = z - \frac{27}{3} = z - 9$ volgt nu:
$z^3 = 355z + 964500$. Een type 2 vergelijking.

Met een formule van Cardano volgt nu:
$z_1 = \sqrt[3]{\frac{964500}{2} + \sqrt{\left(\frac{964500}{2}\right)^2 - \left(\frac{355}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\ldots - \sqrt{\ldots}}$. Een som van een *binomium* en een *residuum*.
Met $m = 482250$ en $n = 232563405504\frac{17}{27}$ staat daar dus:
$z_1 = \sqrt[3]{m + \sqrt{n}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{n}}$.

En nu weer met het idee uit paragraaf *Bijzondere derdemacht wortels* volgt:
$\sqrt[3]{m^2 - n} = 118\frac{1}{3}$. Zoek getallen $p\ en\ q$ zodat $p^2 = 118\frac{1}{3} + q$.
Roth vindt: $q = 2381\frac{2}{3}$ en $p = \sqrt{2500} = 50$.

Dus: $z_1 = p + \sqrt{q} + \left(p - \sqrt{q}\right) = 100$.

Of zoek de ware oplossing door de methode: $(n^2 - 355)n = 964500$.
Begin in de buurt van $\sqrt[3]{964500} = 98{,}8 \ldots$
$98 \to 98^2 = 9604 \to 9604 - 355 = 9249$.
$99 \to 9801 \to 9446$.
$100 \to 10000 \to 9645$. En nu geldt: $100 * 9645 = 964500$.
Dus oplossing $z_1 = 100$ is gevonden.

En dan: $x_1 = \frac{y_1}{7} = \frac{z_1 - 9}{7} = \frac{91}{7} = 13$.
Het gaat dus om 13 *enneagonale* getallen.

Vrg 140. Er zijn enige *enneadecagonale* getallen. Trek van hun som de *polygonale* wortels en de *quadrat*-wortels af, dan resteert 3728. Om hoeveel getallen gaat het?

➔ Zie paragraaf *Polygonale getallen* voor de somformules. Het gaat hier om 19-hoeksgetallen.
Stel dat het gaat om x getallen en $v = 17$.
Som van al deze getallen is: $A(x) = \frac{1}{6}(17x^3 + 3x^2 - 14x)$.
Som van hun *polygonale*-wortels: $B(x) = \frac{1}{2}(17x^2 - 15x)$.
Som van alle *quadrat*-wortels: $Q(x) = 1 + 2 + \cdots + x = \frac{1}{2}(x^2 + x)$.
En dan: $A(x) - B(x) - Q(x) = \frac{1}{6}(17x^3 - 51x^2 + 28x) = 3728$.

Via $17^3x^3 - 51 * 17^2x^2 + 28 * 17 * 17x = 6464352$, volgt met $y = 17x$:
$y^3 + 476y = 51y^2 + 6464352$. Een type 8 vergelijking.
Met $y = z + \frac{51}{3} = z + 17$ volgt: $z^3 = 391z + 6466086$. Een type 2 vergelijking.
Zie bij de vorige vraagstukken 130 en 135.
De oplossing ($z_1 = 187$) wordt gevonden zoals hierboven en dan: $x_1 = \frac{y_1}{17} = \frac{z_1+17}{17} = \frac{187+17}{17} = 12$.

Vrg 145. Er zijn enige *tetra-, hexa-, octo-, ennea-* en *icosigonale* getallen in gelijke aantallen. Samen met hun *quadrat*-wortels is de som 4890. Om hoeveel van zulke getallen gaat het?

➔ Zie paragraaf *Polygonale getallen* voor de somformules.
Stel dat het gaat om x getallen van elk type. De sommen zijn dan van alle
tetragonale getallen: $\frac{1}{6}(2x^3 + 3x^2 + x)$.
hexagonale getallen: $\frac{1}{6}(4x^3 + 3x^2 - x)$.
octogonale getallen: $\frac{1}{6}(6x^3 + 3x^2 - 3x)$.
enneagonale getallen: $\frac{1}{6}(7x^3 + 3x^2 - 4x)$.
icosigonale getallen: $\frac{1}{6}(18x^3 + 3x^2 - 15x)$.
quadrat-wortels: $5 * \frac{1}{2}(x^2 + x) = \frac{1}{6}(15x^2 + 15x)$.
Totale som: $\frac{1}{6}(37x^3 + 30x^2 - 7x) = 4890$.

Alles keer 6 en dan keer 37^2 geeft:
$37^3x^3 + 30 * 37^2x^2 - 7 * 37 * 37x = 40166460$.
Met $y = 37x$ volgt: $y^3 + 30y^2 = 259y + 40166460$. Een type 9 vergelijking.
En met $y = z - \frac{a}{3} = z - 10$ volgt: $z^3 = 559z + 40161870$. Een type 2.

Met een formule van Cardano volgt nu:

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{40161870}{2} + \sqrt{\left(\frac{40161870}{2}\right)^2 - \left(\frac{559}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\ldots - \sqrt{\ldots}}\,.$$

Met $m = 20080935$ en $n = 403243944004710\frac{26}{27}$ staat daar dus:
$z_1 = \sqrt[3]{m + \sqrt{n}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{n}}$.

En nu weer met het idee uit paragraaf *Bijzondere derdemacht wortels* volgt:
$\sqrt[3]{m^2 - n} = 186\frac{1}{3}$. Zoek getallen p en q zodat $p^2 = 186\frac{1}{3} + q$.
Roth vindt: $q = 29225\frac{11}{12}$ en $p = 171\frac{1}{2}$.

Dus: $z_1 = p + \sqrt{q} + \left(p - \sqrt{q}\right) = 343$.

Of zoek de ware oplossing met de methode: $n(n^2 - 559) = 40161870$.
Begin in de buurt van $\sqrt[3]{40161870} = 342,4\ldots$
$342 \to 116964 \to 116405$.
$343 \to 117649 \to 117090$. En dan: $343 * 117090 = 40161870$.
Ook zo wordt $z_1 = 343$ gevonden.

En dan: $x_1 = \frac{y_1}{37} = \frac{z_1-10}{37} = \frac{333}{37} = 9$.
Het gaat dus om 9 *polygonale* getallen van elk type.

Vrg 150. Er is een ronde tuin gegeven en op de cirkelrand daarvan zitten twee slakken achter elkaar. Ze kruipen op die tuincirkel. De eerste rechtsom [in klokwijzerrichting] en elke dag een *trigonaal* getal, de eerste dag 1 voet [1], de volgende dag 3, de derde dag 6, en zo voort in natuurlijke volgorde. De andere linksom en elke dag een *pentagonaal* getal, de eerste dag 1 voet, de volgende dag 5, de derde dag 12, en zo voort in natuurlijke volgorde.
Midden in die tuin staat een zeer hoge spar. Als die boom slechts $1\frac{1}{2}$ voet hoger gegroeid zou zijn, dan zou die $1\frac{1}{2}$ keer zo hoog zijn als de halve diameter van de tuin.
Nu wordt op een speciale manier gevonden hoeveel voet de *hypotenusa* van de cirkelrand van de tuin tot aan de top van de spar is. [2] Dat is namelijk een *tetragonaal* getal waarvoor geldt:
dit getal vermenigvuldigd met zijn *quadrat*-wortel plus de *tetragonaal*-wortel geeft 4946.
In hoeveel dagen komen de twee slakken bij elkaar en hoeveel voet hebben zijn gekropen?
[Hoe gekunsteld wil je het hebben…]

➔ De hypotenusa is een *tetragonaal* getal en dat is: $\frac{1}{2}x(2+(x-1)v) = x^2$ en $v = 2$.
De *quadrat*-wortel is x.
De *tetragonaal*-wortel is: $2x - 1$. [3]
En dan volgt: $x^2 * x + 2x - 1 = 4946$.
Ofwel: $x^3 + 2x = 4947$. (*)

Met de methode van Roth volgt nu:
$n^2(n+2) = 4947$ en begin in de buurt van $\sqrt[3]{4947} = 17{,}0\ldots$
$17 \rightarrow 17^2 = 289 \rightarrow 291$. En nu $17 * 291 = 4947$. Dus 17 is een oplossing van (*).

Of, schrijft Roth, zoek de oplossing van (*) met de regel van Cardano:

$$x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{6118202\frac{59}{108}} + 2473\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\ldots} - \cdots}.$$

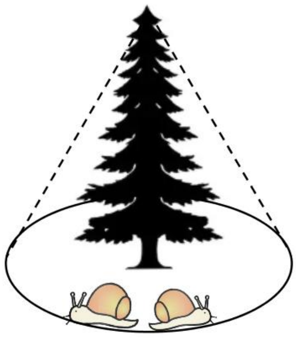
Met $m = 6118202\frac{59}{108}$ en $n = 2473\frac{1}{2}$ staat daar dus:

$$x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{m} + n} - \sqrt[3]{\sqrt{m} - n} = \sqrt{p} + q - (\sqrt{p} - q).$$

En nu weer met het idee uit paragraaf *Bijzondere derdemacht wortels* volgt:
$\sqrt[3]{m - n^2} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$. Zoek getallen p en q zodat $p = \frac{2}{3} + q^2$.
Roth vindt: $q = 72\frac{1}{4} = \frac{289}{4} = \left(\frac{17}{2}\right)^2$ en $p = 72\frac{11}{12}$.

Dus: $x_1 = \sqrt{72\frac{11}{12}} + 8\frac{1}{2} - (\sqrt{72\frac{11}{12}} - 8\frac{1}{2}) = 17$.

Dus de hypotenusa is het *tetragonale* getal $x_1^2 = 289$ voet.



Stel nu de halve diameter van de cirkel is $2x$. [Opnieuw x gebruikt!]
Dan is de hoogte van de boom: $2x * 1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 3x - 1\frac{1}{2}$.
En dan volgt [stelling van Pythagoras]:
$\left(3x - 1\frac{1}{2}\right)^2 + 4x^2 = 289^2$.
En uitgewerkt: $52x^2 - 36x + 9 = 334084$.
Ofwel: $52x^2 = 36x + 334075$.
Dat geeft de ware waarde $x_1 = 80\frac{1}{2}$.
De diameter is dus $4 * x_1 = 322$ voet.
De slakken kruipen op een cirkel met omtrek: $322 * 3\frac{1}{7} = 1012$ voet. [4]

De spar zelf is blijkbaar $3 * 80\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 240$ voet [≈ 74 meter, zeer hoog inderdaad].

De eerste slak kruipt dus dagelijks een *trigonaal* getal in voet en de som daarvan is dan tot het moment dat ze samen komen: $\frac{1}{6}(vx^3 + 3x^2 + (3 - v)x)$ met $v = 1$.
De tweede slak kruipt dagelijks een *pentagonaal* getal in voet en de som daarvan is dan tot het moment dat ze samen komen: $\frac{1}{6}(vx^3 + 3x^2 + (3 - v)x)$ met $v = 3$.

Er geldt dus: $\frac{1}{6}(x^3 + 3x^2 + 2x) + \frac{1}{6}(3x^3 + 3x^2) = 1012$.
Ofwel: $2x^3 + 3x^2 + x = 3036$. (**)
Alles keer 4 en met $2x = y$ volgt dan:
$y^3 + 3y^2 + 2y = 12144$. Een vergelijking van type 7.

Met $y = z - \frac{a}{3} = z - 1$ en omdat $b < \frac{1}{3}a^3$ [zie bij type 7] volgt:
$z^3 = z + 12144$. Een type 2 vergelijking.

Er volgt: $z_1 = \sqrt[3]{6072 + \sqrt{36869183\frac{26}{27}}} + \sqrt[3]{\ldots - \sqrt{\ldots}}$
Met $m = 6072$ en $n = 36869183\frac{26}{27}$ staat daar dus:
$z_1 = \sqrt[3]{m + \sqrt{n}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{n}}$.

En nu weer met het idee uit paragraaf *Bijzondere derdemacht wortels* volgt:
$\sqrt[3]{m^2 - n} = \frac{1}{3}$. Zoek getallen p *en* q zodat $p^2 = \frac{1}{3} + q$.
Roth vindt: $q = 131\frac{11}{12}$ en $p = 11\frac{1}{2}$.

Dus: $z_1 = p + \sqrt{q} + \left(p - \sqrt{q}\right) = 23$.

Of zoek de oplossing als volgt:
$n(n^2 - 1) = 12144$ en in de buurt van $\sqrt[3]{12144} = 22{,}9 \ldots$
$22 \rightarrow 22^2 = 484 \rightarrow 484 - 1 = 483$
$23 \rightarrow 529 \rightarrow 528$ en $23 * 528 = 12144$. Dus een oplossing is: $z_1 = 23$.

Er volgt dan als oplossing van (**): $x_1 = \frac{y_1}{2} = \frac{z_1 - 1}{2} = 11$.
Dus na 11 dagen ontmoeten de twee slakken elkaar…

De eerste slak heeft dan afgelegd: $\frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1^2 + 2x_1) = 286$ voet.
De tweede slak heeft dan afgelegd: $\frac{1}{6}(3x_1^3 + 3x_1^2) = 726$ voet.

[1] *Schuch* is hier vertaald met voet. Een Rijnlandse voet is ongeveer 31 cm.
[2] Bedoeld is de beschrijvende van de kegel met as en cirkel als in het verhaal.
[3] Het getal $(vx - (v-1))$: de laatste in de rekenkundige rij $B(x)$ en nu met $v = 2$.
[4] Hier wordt $\frac{22}{7}$ voor π genomen, zeer gangbaar in die tijd.

Opmerking.
Een leuk maar erg gekunsteld vraagstuk. Een bijzondere 'redactiesom'. Tweemaal wordt eenzelfde oplossingsmethode getoond. Het vraagstuk heeft feitelijk drie subvragen.
In het boek vergt het ruim vier pagina's uitwerking.

Vrg 155. Er zijn 7 optellingen van *hecatogepentagonale* getallen [1] zodanig dat het aantal 'lagen' (*stette*) 3 bij de tweede, 5 bij de derde, 7 bij de vierde, 8 bij de vijfde en 10 bij de zesde en bij de zevende optelling 13 meer is dan bij de eerste optelling. Samen zijn de 7 optellingen 252710.
De vraag is hoeveel polygonale getallen elke optelling heeft?

➔ In dit vraagstuk is de eerste en kleinste optelling: $[v = 103]$ $A(x) = \frac{1}{6}(103x^3 + 3x^2 - 100x)$.
Het gaat hier dan om x getallen ofwel lagen in de piramide.
De volgende optellingen hebben dus resp. $x+3, x+5, x+7, x+8, x+10, x+13$ lagen.
De zes optellingen zijn dus, zie paragraaf *Polygonale getallen*:
$A(x+3) = \frac{1}{6}(x+3)(x+4)\big((x+3)v + 3 - v\big) = \frac{1}{6}(103x^3 + 903x^2 + 2699x + 2508)$.
$A(x+5) = \frac{1}{6}(103x^3 + 1548x^2 + 7655x + 12450)$.
$A(x+7) = \frac{1}{6}(103x^3 + 2166x^2 + 15083x + 34776)$.
$A(x+8) = \frac{1}{6}(103x^3 + 2475x^2 + 19724x + 52128)$.
$A(x+10) = \frac{1}{6}(103x^3 + 30093x^2 + 30860x + 102300)$.
$A(x+13) = \frac{1}{6}(103x^3 + 4020x^2 + 52199x + 225498)$.
Dit allemaal opgeteld dus met $A(x)$ geeft:
$\frac{1}{6}(721x^3 + 14235x^2 + 128120x + 429660) = 252710$. (*) [2]

Alles keer 6 en keer 721^2 geeft:
$721^3x^3 + 14235 * 721^2x^2 + 128120 * 721^2x + 721^2 * 429660 = 252710 * 6 * 721^2$.
En met $721x = y$ volgt:
$y^3 + 14235y^2 + 92374520y = 564859230600$. Een type 7 vergelijking.
En met $y = z - \frac{a}{3} = z - 4745$ volgt:
$z^3 + 24829445z = 789508740750$. Een type 1 vergelijking.

Nu volgt met de aanpak met de regel van Cardano: [3]

$z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{156397953155693274355296\frac{8}{27}} + 394754370375} + \sqrt[3]{\sqrt{\ldots} - \cdots}$ [2]

En dit blijkt te zijn, zie de paragraaf *Bijzondere derdemacht wortels*:
$z_1 = \sqrt{25707106\frac{2}{3}} + 4175 - \left(\sqrt{25707106\frac{2}{3}} - 4175\right) = 8350.$

Dan volgt: $x_1 = \frac{y_1}{721} = \frac{z_1 - 4745}{721} = \frac{3605}{721} =$ 5 als oplossing van vergelijking (*).

Dus:
de eerste optelling had 5, de tweede 8, de derde 10, de vierde 12,
de vijfde 13, de zesde 15 en de zevende 18 polygonale getallen.

[1] Dat zijn 105-hoeks getallen.
[2] Dit vergt veel berekening van Roth en verklaart de ruim zes pagina's met uitwerking.
En… alles handmatig!
[3] Hij past zijn eigen methode $n^2(n + \cdots) = \cdots$ niet toe. Er zou begonnen moeten worden bij $\sqrt[3]{789508740750} = 9242$, … Dan duurt het mogelijk te lang eer je bij 8350 bent.

Het laatste vraagstuk van dit deel is een echte uitsmijter…

Vrg 160. Als men via nette rekenkundige weg wil vinden op welke dag ik [Roth] weer uit deze cubicossische tuin van plezier kwam, zal men eerst het alfabet in natuurlijke volgorde moeten nummeren, dus:

1	2	3	4	5	
a	b	c	d	e	etc.

Daarna moet men van de volgende cossische vergelijking de oplossing door reguliere berekening zoeken: $x^5 = 61\frac{1}{2}x^3 - 85\frac{1}{2} - 225\frac{1}{2}x - 78x^2 - 1\frac{1}{2}x^4$.
Dat zal een *binomium* en een *residuum* [1] geven en de optelling van de twee zal de eerste en vierde letter van de naam van de dag geven.
Het *binomium* minus het *residuum* geeft een rest. Dat in het kwadraat en daarvan een eenheid (*unittet)* afgetrokken, geeft een getal dat de derde letter is.
Het product van *binomium* en *residuum* plus een eenheid geeft de andere letter.
Als men door een bepaalde regel dit getal (116490258898219) krijgt en daar een polygonaal wortel bij vindt, dan zal de *quadrat*-wortel de vijfde letter geven.
Als tenslotte de getallen van de vierde en vijfde letters opgeteld worden en de som van het andere lettergetal daarvan wordt afgetrokken, dan blijft het laatste lettergetal over.
Dus is nu de vraag hoe de bedoelde dag heet.

➔ De vergelijking is: $x^5 + 1\frac{1}{2}x^4 + 78x^2 + 225\frac{1}{2}x + 85\frac{1}{2} = 61\frac{1}{2}x^3$.
Alles keer 32 geeft:
$32x^5 + 3 * 16x^4 + 78 * 8 * 4x^2 + 225\frac{1}{2} * 16 * 2x + 85\frac{1}{2} * 32 = 61\frac{1}{2} * 4 * 8x^3$.
En met $2x = y$ volgt:
$y^5 + 3y^4 + 624y^2 + 3608y + 2736 = 246y^3$. [2]

En nu, heel bijzonder, trek aan beide zijden af $(89544y + 177120)$.
Er resteert:
$y^5 + 3y^4 + 624y^2 - 85936y - 174384 = 246y^3 - 89544y - 177120$. (*)

Deel nu beide zijden door $(y^2 + 20y + 36)$. Er resteert:
$y^3 - 17y^2 + 304y - 4844 = 246y - 4920$. [3]

De deling van deze veeltermen wordt netjes in het boek getoond! Er blijft dus over:
$y^3 + 58y + 76 = 17y^2$. Een type 12 vergelijking. (**)

Roth laat ook nog uitgebreid zien dat dit resultaat te krijgen is door eerst bij (*) alles naar één kant te brengen en dan die veelterm de delen door $(y^2 + 20y + 36)$.

En nu met $y = z + \frac{a}{3} = z + 5\frac{2}{3}$ in (**) volgt:
$27z^3 + 1100 = 345 * 3z$. (***)
En met $v = 3z$ volgt dan weer:
$v^3 + 1100 = 345v$. Een type 3 vergelijking. (****)

Dan stapt Roth over [4] naar de vergelijking:
$w^3 = 345w + 1100$.
En met $n(n^2 - 345) = 1100$ volgt in de buurt van $\sqrt[3]{1100} = 10{,}3$ ...
$19 \to 19^2 = 361 \to 361 - 345 = 16$. [5]
$20 \to 400 \to 55$. Een nu $55 * 20 = 1100$. Een oplossing is dus: $w_1 = 20$.

Hiermee vindt Roth ook twee oplossingen van (****):
$v_{1,2} = \frac{w_1}{2} \pm \sqrt{b - 3\left(\frac{w_1}{2}\right)^2} = 10 \pm \sqrt{345 - 300} = 10 \pm \sqrt{45}$.
De fictieve oplossing van (****) is dan $v_3 = -20$. [6]

Oplossingen van (***) zijn dan: $z_{1,2} = \frac{1}{3}v_{1,2} = 3\frac{1}{3} \pm \sqrt{5}$.
Oplossingen van (**) zijn dan: $y_{1,2} = z_{1,2} + 5\frac{2}{3} = 9 \pm \sqrt{5}$. Zie [2].

En dit geeft als oplossingen van de startvergelijking
$x^5 + 1\frac{1}{2}x^4 + 78x^2 + 225\frac{1}{2}x + 85\frac{1}{2} = 61\frac{1}{2}x^3$:
$x_{1,2} = \frac{1}{2}y_{1,2} = 4\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$.

Het eerste en vierde lettergetal a_1 en a_4 zijn dus: $x_1 + x_2 = 9$. Dat geeft letter ***I** of **J**.* [7]
Het derde lettergetal a_3 is: $(x_1 - x_2)^2 - 1 = 5 - 1 = 4$. Dat geeft letter ***D***.
Het 'andere' lettergetal a_n is: $x_1 * x_2 + 1 = 19 + 1 = 20$. Dat geeft letter ***U.***

Roth schrijft verder:
Nu moet men verder door een bepaalde regel van het getal (116490258898219) de kern en eigenschap vinden, en dat heb ik gedaan, dan blijkt dat het een 681229584202-hoeks getal is. [8]
Daaruit zoek ik nu de *quadrat*-wortel en die stel ik op x.
Er volgt de polygonale wortel, zie paragraaf *Polygonale getallen*, met $v = 681229584200$:
$\frac{1}{2}x(2 + (x - 1) * 681229584200) = 116490258898219$.
Ofwel: $340614792100x^2 - 340614792099x = 116490258898219$.
Een kwadratische vergelijking waarvan je de oplossing zelf mag zoeken. [sic]
De ware waarde is $x_1 = 19$.
Het vijfde lettergetal a_5 is dus 19. Dat geeft letter ***T.***

Het laatste lettergetal $a_6 = a_4 + a_5 - a_n$: $9 + 19 - 20 = 8$. Dat geeft letter ***H.***

Zet ik nu alle gevonden letters bij elkaar dan vind ik dat de bedoelde dag heet: [9]

9	**20**	**4**	**9**	**19**	**8**
I	***U***	***D***	***I***	***T***	***H***
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

[1] Getallen van de vorm $\sqrt{m}+n$ resp. $\sqrt{m}-n$.
[2] Met substitutie $z=y-1$ zou de vergelijking omgezet kunnen worden naar een vergelijking van de vierde graad. Dat gebeurt nu niet.
Heerlijk: *Wolfram-Alpha* geeft meteen de oplossingen $9 \pm \sqrt{5}$ (en drie negatieve).
[3] Een bijzondere manier om van graad 5 naar graad 3 te gaan.
Als $(y^2+20y+36) \neq 0$, dan is dit natuurlijk toegestaan.
[4] Zie de aanpak bij type 3 vergelijkingen.
[5] Roth begint dus nu niet bij $10\ of\ 11$.
[6] Want $v_1+v_2+v_3=0$ dus $v_3=-(v_1+v_2)$.
[7] Bij het hier gebruikte Gotisch alfabet geldt voor hoofdletters: I = J.
Zo komt Roth uit bij I of J als zijnde het 9e getal:
$\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}\ \mathfrak{E}\ \mathfrak{F}\ \mathfrak{G}\ \mathfrak{H}\ \mathfrak{I}\ \mathfrak{K}\ \mathfrak{L}\ \mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{O}\ \mathfrak{P}\ \mathfrak{Q}\ \mathfrak{R}\ \mathfrak{S}\ \mathfrak{T}\ \mathfrak{U}\ \mathfrak{V}\ \mathfrak{W}\ \mathfrak{X}\ \mathfrak{Y}\ \mathfrak{Z}$.
$A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I.J\ K\ L\ M\ N\ O\ P\ Q\ R\ S\ T\ U\ V\ W\ X\ Y\ Z$
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
[8] Hoe Roth dat dan vindt, is onduidelijk.
[9] Als de eerste letter gelezen wordt als J dan staat hier JUDITH.
Waarschijnlijk gaat het om de naamdag van de heilige Judith, een Bijbelse figuur.
Dat is op 5 oktober. Zij staat bekend om haar moed en vastberadenheid.
Bron: Wikipedia.

Einde tweede deel.

Tussenwoord

Roth noteert voor hij begint aan deel drie nog enige overpeinzingen en conclusies.
Zo schrijft hij dat nu oplossingen van *cossiche* vergelijkingen door een bepaalde regel te vinden zijn.
En wat een mooi voortreffelijk kunststuk is dat, waarmee men onzeglijk veel vergelijkingen van de tweede graad, kubisch, vierde graad en ook vijfde graad en voor andere *Cossen* op eenzelfde manier kan oplossen en een rationaal of *surdisch* getal (d.w.z. in wortelvorm) als oplossing vindt.

Daarom wilde hij daarbij enige uitvoerige zaken beschrijven en aan het daglicht brengen van de edele kunst van de *Arithmetica* en *Geometria*. (Mogelijk doelt hij op zijn eigen methoden…)

Als nu iemand de genoemde voorbeelden van de *Cubicossische Tuin van Plezier* van de heer Faulhaber heeft begrepen, dan zal hij mogelijk een vraagstuk niet hebben kunnen oplossen.
Dat wil ik niet zo laten (*nicht ein Stillstand halten*) en heb daarom een derde deel bij dit boek gevoegd, dat over zeer mooie vragen over vierde-, vijfde-, zesde- en zevende-graads vergelijkingen gaat.

Dat derde deel begint overigens weer met een voorwoord van dank aan de heren die hem begunstigen. Ook refereert hij aan mede-rekenmeesters en prijst hen.

En er staat weer een moraalregel in:
Iemand die niet begrijpt of geleerd heeft,
weet niets en kan ook niet met recht spreken of oordelen.

Het derde deel is getekend te Nürnberg, 30 januari 1608, en met dit figuur:

Sid labor est hominum sic transit gloria mundi.

Dit is het werk van mensen, dus vergaat wereldse roem.

Derde deel

Binomi en residui

Er volgt nu een kwart van de 60 vraagstukken van Roth, die hij geeft als oefening zonder uitwerking. De getoonde uitwerkingen zijn van de schrijver dezes, zoveel mogelijk met methoden uit het tweede deel gemaakt. Ze resulteren vaak in getallen van de vorm $a \pm \sqrt{b}$ ofwel tweenamige getallen.

Vrg 1.[6] Om te beginnen $x^4 + 33x^3 + 243x^2 + 524x = 2976$.
Wat is de ware oplossing?
Roth: de oplossing is $\sqrt[3]{151} - 3$.

➔ Als $x^4 + 33x^3 + 243x^2 + 524x - 2976 = 0$,
dan volgt: $(x + 24)(x^3 + 9x^2 + 27x - 124) = 0$. Nu snel met *Wolfram-Alpha*…
Dat geeft meteen één fictieve oplossing: $x_1 = -24$.
En dan: $x^3 + 9x^2 + 27x = 124$. Dit is een type 7 oplossing.

Met $x = y - \frac{9}{3} = y - 3$ volgt: $y^3 - 27 = 124$.
Ofwel: $y^3 = 151$. Met één ware oplossing: $y_1 = \sqrt[3]{151}$.

Een ware oplossing van de startvergelijking is dan: $x_2 = y_1 - 3 = \sqrt[3]{151} - 3$.

Vrg 3. Ik heb een andere vergelijking: $x^4 + 9x^3 + 808x = 212x^2 + 672$.
Wat is de ware oplossing?
Roth: $4 + \sqrt{8}$.

➔ Een herschrijving geeft: $x^4 + 9x^3 - 212x^2 + 808x - 672 = 0$.
Als een geheel getal een oplossing is, dan deelt dat getal 672.
$672 = 2^5 * 3 * 7$. Proberen: $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ voldoen niet, maar 4 wel.
Er volgt: $x^4 + 9x^3 - 212x^2 + 808x - 672 = (x - 4)(x^3 + 13x^2 - 160x + 168)$.
Onderzoek nu: $x^3 + 13x^2 - 160x + 168 = 0$.
$168 = 2^3 * 3 * 7$.
± 8 deelt 168 maar geeft geen oplossing.
Probeer een ontbinding: $x^3 + 13x^2 - 160x + 168 = (x^2 + ax + 8)(x + b)$.
Dat geeft: $a + b = 13, 8 + ab = -160, 8b = 168$.
Er is een geheeltallige oplossing: $b = 21, a = -8$.

Dus de startvergelijking is de schrijven als $(x - 4)(x + 21)(x^2 - 8x + 8) = 0$.

Dat geeft als ware oplossingen: $x_1 = 4, x_2 = 4 + \sqrt{8}, x_3 = 4 - \sqrt{8}$. [1]
En één fictieve: $x_4 = -21$.

[1] Roth geeft één ware oplossing, maar er zijn er dus drie!

[6] De nummering begint opnieuw.

Vrg 5. Gegeven is $x^3 + 2\frac{2}{5}x^3A + 16x^2A + 21\frac{1}{5}xA = 11\frac{7}{10}A$ en $xA = 10$.
Wat zijn x en A? Roth: $x = \sqrt{2} - 1$ en $A = \sqrt{200} + 10$.

➔ Er volgt met substitutie $A = \frac{10}{x}$: $x^3 + 2\frac{2}{5}x^2 * 10 + 16x * 10 + 21\frac{1}{5} * 10 = 11\frac{7}{10} * \frac{10}{x}$.
Dat geeft de vergelijking $x^4 + 24x^3 + 160x^2 + 212x = 117$.
Met $x = y - \frac{24}{4} = y - 6$ volgt: $y^4 - 56y^2 + 20y + 483 = 0$. (*) De y^3-term is weggewerkt.

Zoek nu $t, p\ en\ q$ zodat de vergelijking wordt: $(y^2 + t)^2 = (py - q)^2$. Ferrari's methode.
Uitgewerkt wordt dat: $y^4 + (2t - p^2)y^2 + 2pqy + (t^2 - q^2) = 0$. (**)
Vergelijking met (*) geeft nu: $4(2t + 56)(t^2 - 483) = 400$.
Ofwel: $t^3 + 28t^2 = 483t + 13574$. Een type 9 vergelijking.

Er volgt met substitutie $t = s - \frac{28}{3}$: $27s^3 = 20097s + 200878$.
En dan weer met substitutie: $u = 3s$: $u^3 = 6699u + 200878$. Type 2.

Een ware oplossing is te vinden via $n(n^2 - 6699) = 200878$ en vanaf $\sqrt[3]{200878} = 58{,}5$ ...
Te traag bij $58, 60, 62$. En met sprongen van 10 volgt:
$92 \rightarrow 8464 \rightarrow 1765$.
$93 \rightarrow 8649 \rightarrow 1950$.
$94 \rightarrow 8836 \rightarrow 2137$ en nu: $94 * 2137 = 200878$. Dus gevonden: $u_1 = 94$.

Er volgt: $t_1 = s_1 - \frac{28}{3} = \frac{u_1}{3} - \frac{28}{3} = \frac{66}{3} = 22$.
En dan verder:
$2t_1 - p^2 = -56$ dus $p^2 = 100, p = 10$.
$2pq = 20$ dus $q = 1$.

De vergelijking (*) is dus te schrijven als $(y^2 + 22)^2 = (10y - 1)^2$.
Er volgt:
Of $y^2 + 22 = 10y - 1$ en dat geeft $y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{2}$.
Of $y^2 + 22 = 1 - 10y$ en dat geeft $y_{3.4} = -5 \pm 2$.

Er volgt uiteindelijk:
$x_1 = y_1 - 6 = \left(5 + \sqrt{2}\right) - 6 = \sqrt{2} - 1$. En dan $A_1 = \frac{10}{x_1} = 10\sqrt{2} + 10 = \sqrt{200} + 10$.
$x_2 = y_2 - 6 = \left(5 - \sqrt{2}\right) - 6 = -\sqrt{2} - 1$.
$x_3 = y_3 - 6 = (-5 + 2) - 6 = -9$.
$x_4 = y_4 - 6 = (-5 - 2) - 6 = -13$.

Vrg 6. Er geldt: $x^3 + 8x^4A + 67x^3A = 30x^2A + 1449\frac{1}{4}xA$. En ook: $x^2A = 4$.
Wat is de ware waarde van x en van A?
Roth: $\sqrt{35} - 2$ en $A = \frac{156}{961} + \sqrt{\frac{8960}{923521}}$.

➔ Vermenigvuldig de eerste vergelijking met x. Uit de tweede vergelijking volgt: $x \neq 0$.
Dus: $x^4 + 8x^5A + 67x^4A = 30x^3A + 1449\frac{1}{4}x^2A$.

En dan met $x^2A = 4$ volgt:
$x^4 + 32x^3 + 268x^2 = 120x + 5797$. Een 'gewone' vierdegraads vergelijking.

Met $x = y - \frac{32}{4} = y - 8$ volgt:
$y^4 - 116y^2 - 312y + 27 = 0$. (*)

Zoek nu $t, p\ en\ q$ zodat de vergelijking wordt: $(y^2 + t)^2 = (py + q)^2$. Ferrari's methode.
Uitgewerkt wordt dat: $y^4 + (2t - p^2)y^2 - 2pqy + (t^2 - q^2) = 0$. (**)
Vergelijking met (*) geeft nu: $4(2t + 116)(t^2 - 27) = 312^2$.
Ofwel: $8t^3 + 464t^2 = 216t + 109872$.

Nu verkort: $t = 14, p = 12, q = 13$. Negeer de niet-gehele oplossingen!
Dus (*) is te schrijven als: $(y^2 + 14)^2 = (12y + 13)^2$.
Er volgt:
Of $y^2 + 14 = 12y + 13$ dus $y_{1,2} = 6 \pm \sqrt{35}$.
Of $y^2 + 14 = -12y - 13$ dus $y_3 = -3$ en $y_4 = -9$.

De vraag is naar ware oplossingen dus: $x_1 = y_1 - 8 = \sqrt{35} - 2$. Dit is de enige ware…
$x_2 = -2 - \sqrt{35}, x_3 = -11, x_4 = -17$.
En: $A = \frac{4}{\left(\sqrt{35}-1\right)^2} = \frac{156}{961} + \frac{16}{961}\sqrt{35} = \frac{156}{961} + \sqrt{\frac{8960}{923521}}$.

Vrg 10. Een getal vermenigvuldig ik met 2484 en tel bij dat product 28350 op. Als ik van deze som het getal in het kwadraat maal 471 aftrek, dan resteert een getal dat ook ontstaat als ik bij het gezochte getal 46 optel en deze som met de derde macht van het startgetal vermenigvuldig. Wat is dat startgetal? Roth: $\sqrt{\mathbf{45}}$ is het ware getal. [1]

➔ Stel het gezochte getal is x.
Dan volgt: $2484x + 28350 - 471x^2 = (x + 46)x^3$.
Ofwel: $x^4 + 46x^3 + 471x^2 - 2484x - 28350 = 0$. [1]

Substitueer $x = y - \frac{46}{4} = y - 11\frac{1}{2}$.
Er volgt: $16y^4 - 5160y^2 - 18400y + 160569 = 0$. De y^3-term is weggewerkt.

Substitueer $z = 2y$.
Er volgt: $z^4 - 1290z^2 - 9200z + 160569 = 0$. (*)

Zoek nu $t, p\ en\ q$ zodat de vergelijking wordt: $(z^2 + t)^2 = (pz + q)^2$. Ferrari's methode.
Uitgewerkt wordt dat: $z^4 + (2t - p^2)z^2 - 2pqz + (t^2 - q^2) = 0$. (**)
Vergelijking met (*) geeft nu: $4(2t + 1290)(t^2 - 160569) = 9200^2$.
Ofwel: $t^3 + 645t^2 = 160569t + 114147005$. Een type 9 vergelijking.

Substitueer nu $t = s - \frac{645}{3} = s - 215$.
Er volgt: $s^3 = 299244s + 59747920$. Een type 2 vergelijking. [2]
Een ware oplossing is te vinden via $n(n^2 - 299244) = 59747920$ en vanaf $\sqrt{299244} = 547, \ldots$
In het begin te traag. En met sprongen volgt uiteindelijk:
$626 \to 391876 \to 92632$.
$627 \to 393129 \to 93885$.
$628 \to 394384 \to 95140$ en nu: $628 * 95140 = 59747920$. Dus gevonden: $s_1 = 628$.

Er volgt: $t_1 = s_1 - 215 = 413$.
En bij (**): $p^2 = 2t_1 + 1290, p = \sqrt{2116} = 46; q = \frac{9200}{2*46} = 100$.
De vergelijking (*) is dus te schrijven als $(z^2 + 413)^2 = (46z + 100)^2$.
Er volgt:
Of $z^2 + 413 = 46z + 100$ en dat geeft $z_{1,2} = 23 \pm 6\sqrt{6}$.
Of $z^2 + 413 = -(46z + 100)$. Dat geeft: $z_3 = -27, z_4 = -19$.

Dus: $x_1 = y_1 - 11\frac{1}{2} = \frac{1}{2}z_1 - 11\frac{1}{2} = 3\sqrt{6} = \sqrt{54}$. De ware oplossing. [1]
En: $x_2 = y_2 - 11\frac{1}{2} = \frac{1}{2}z_2 - 11\frac{1}{2} = -3\sqrt{6}; x_3 = -25; x_4 = -21$.

[1] *Wolfram-Alpha* geeft meteen de ontbinding: $(x + 21)(x + 25)(x^2 - 54) = 0$.
Dat geeft als ware oplossing $\sqrt{54}$. Of het antwoord van Roth is fout, een zetfout of… een bewuste fout.
[2] Met de formule van Cardano ontstaan grote getallen in het kwadraat en tot de derde macht. Roth is lekker bezig.

Vrg 13. Zoek twee getallen waarvoor geldt: het grootste getal is gelijk aan het kleinste in het kwadraat minus 79. Maar ook: het kwadraat van het grootste minus de som van 4569 en 134 het kleinere geeft net zoveel als het kleinste getal tot de derde macht. Wat zijn die getallen?
Roth: $8 + \sqrt{26}$ en de grootste is $\sqrt{6656} + 11$.
En hij schrijft dat er ook fictieve oplossingen zijn, maar dat hij die heeft weggelaten.

➔ Noem die getallen a en b met $a > b$.
Er volgt: $a = b^2 - 79$.
En: $a^2 - 4569 - 134b = b^3$.

Dan volgt: $b^4 - b^3 - 158b^2 - 134b + 1672 = 0$.
Met $b = x + \frac{1}{4}$ volgt:
$256x^4 - 40544x^2 - 54560x + 416925 = 0$.
Met $y = 4x$ volgt:
$y^4 - 2534y^2 - 13640y + 416925 = 0$. (*)

Zoek nu t, p en q zodat de vergelijking wordt: $(y^2 + t)^2 = (py + q)^2$. Ferrari's methode.
Uitgewerkt wordt dat: $y^4 + (2t - p^2)y^2 - 2pqy + (t^2 - q^2) = 0$. (**)
Vergelijking met (*) geeft nu: $4(2t + 2534)(t^2 - 416925) = 13640^2$.
Ofwel: $8t^3 + 10136t^2 = 3335400t + 4412001400$.

Nu, verkort: $t = 655, p = 62, q = 110$. Negeer andere niet-gehele oplossingen.
Dus (*) is te schrijven als:
$(y^2 + 655)^2 = (62y + 110)^2$.
Of $y^2 + 655 = 62y + 110$. Er volgt: $y_{1,2} = 31 \pm 4\sqrt{26}$.
Of $y^2 + 655 = -62y - 110$. Er volgt: $y_3 = -45, y_4 = -17$.

En dan: $x_1 = \frac{1}{4}y_1 = 7\frac{3}{4} + \sqrt{26}, x_2 = 7\frac{3}{4} - \sqrt{26}, x_3 = -11\frac{1}{4}, x_4 = -4\frac{1}{4}$.
En dat geeft voor het kleinste getal:

$b_1 = x_1 + \frac{1}{4} = 8 + \sqrt{26}$ of $b_2 = 8 - \sqrt{26}$. De andere oplossingen zijn fictief.
$a_1 = b_1^2 - 79 = 11 + \sqrt{6656}$. $a_2 = b_2^2 - 79 = 11 - \sqrt{6656}$. a_2 zal Roth ook fictief noemen.

Dus het kleinste (positieve) getal is $8 + \sqrt{26}$ en het grootste (positieve) getal is $\sqrt{6656} + 11$.

Vrg 15. Zoek een getal waarvoor geldt dat de som van de vierde macht en een vijfvoud van de derde macht plus 180 gelijk is aan het getal keer 114 plus 30 keer het kwadraat van het gezochte getal. Welk getal is dat? Roth: $3 + \sqrt{3}$ of $3 - \sqrt{3}$.

➔ Stel het gezochte getal is x.
Dan volgt: $x^4 + 5x^3 + 180 = 114x + 30x^2$.
Ofwel: $x^4 + 5x^3 - 30x^2 - 114x + 180 = 0$.

Met $x = y - \frac{5}{4}$ volgt: $256y^4 - 10080y^2 - 5984y + 68685 = 0$.
Met $4y = z$ volgt: $z^4 - 630z^2 - 1496z + 68685 = 0$. (*)
Zoek nu $t, p\ en\ q$ zodat de vergelijking wordt: $(z^2 + t)^2 = (pz + q)^2$. Ferrari's methode.
Uitgewerkt wordt dat: $z^4 + (2t - p^2)z^2 - 2pqz + (t^2 - q^2) = 0$.
Vergelijking met (*) geeft nu: $4(2t + 630)(t^2 - 68685) = 1496^2$.
Ofwel: $t^3 + 315t^2 = 68685t + 21915527$. Een type 9 vergelijking.
Met $t = s - 105$ volgt: $s^3 = 101760s + 12388352$. Een type 2.

Een ware oplossing is te vinden via $n(n^2 - 101760) = 12388352$.
$368 \to 135424 \to 33664$ en nu: $368 * 33664 = 12388352$. Dus: $s_1 = 368$.
Daarmee volgt: $t = 263, p = 34, q = 22$.
Er volgt voor (*) na herschrijving: $(z^2 + 263)^2 = (34z + 22)^2$.

En voor de ware oplossingen volgt: $z^2 + 263 = 34z + 22$.
En dan: $z_{1,2} = 17 \pm 4\sqrt{3}$.
De startvergelijking heeft dus als oplossingen:
$x_{1,2} = y_{1,2} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}z_{1,2} - \frac{5}{4} = \frac{17}{4} - \frac{5}{4} \pm \sqrt{3} = 3 \pm \sqrt{3}$. Twee ware oplossingen.

De startveelterm heeft dus een veeltermfactor $x^2 - 6x + 6$.
Uitdeling geeft: $x^4 + 5x^3 - 30x^2 - 114x + 180 = (x^2 - 6x + 6)(x^2 + 11x + 30)$.
De oplossingen van $x^2 + 11x + 30 = 0$ zijn -5 en -6. Twee fictieve oplossingen.

Vrg 20. Er zijn twee getallen met verschil 1. En verder geldt dat als van het kwadraat van de grotere het kwadraat van de kleinere wordt afgetrokken en de rest met het kwadraat van de kleinere wordt vermenigvuldigd en van het resultaat dan 157 keer het kwadraat van de kleinere en 15 keer dat kleinere getal zelf worden afgetrokken, dan resteert 195. Wat zijn die getallen? [1]

➔ Stel die twee getallen zijn x en a $(x > a)$ met $x - a = 1$.
En verder is gegeven: $(x^2 - a^2)a^2 - (157a^2 + 15a) = 195$.

Dat geeft uitgewerkt: $x^3 - 81x^2 + 151\frac{1}{2}x - 169 = 0$.

Met $x = y + \frac{81}{3} = y + 27$ volgt: $2y^3 = 4071y + 70889$.
Dit keer 4 en met $2y = z$ volgt: $z^3 = 8142z + 283556$. Type 2.

Met Cardano volgt nu: $z_1 = \sqrt[3]{141778 + 2\sqrt{27557735}} + \sqrt[3]{141778 - 2\sqrt{27557735}} \approx 104{,}224$
Een oplossing is dan: $x_1 = y_1 + 27 = \frac{1}{2}z_1 + 27 \approx 79{,}112$ en $a \approx 78{,}112$.

> [1] Roth geeft nu geen antwoord. Zie de uitwerking. Dat zijn geen 'mooie' waarden.
> Een zetfout in de vraag (verkeerde getallen) of heeft Roth zich vergist of…?
> Als 11297 gebruikt was i.p.v. 195, dan was een mooie oplossing geweest: $x_1 = 80$.

Vrg 23. Iemand vraagt hoeveel geld zij, A en B, getweeën hebben. Dan antwoord A: mijn maat (B) heeft 12 florijnen minder dan ik. Als ik mijn geld tot de derdemacht neem en vermenigvuldig met het geld van B en bij dat product 250 keer mijn geld optel, dan is dat net zoveel als dat ik het verschil van ons geld met $62\frac{1}{2}$ vermenigvuldig en dat van 45 keer het kwadraat van mijn geld aftrek.
Hoeveel geld hebben A en B? Roth: A resp. B heeft $\sqrt{75} + 5$ resp. $\sqrt{75} - 7$ florijnen. [1]

➔ Stel dat A x florijnen heeft. Dan heeft B dus $(x - 12)$ florijnen.
Er volgt: $x^3 * (x - 12) + 250x = 45x^2 - 12 * 62\frac{1}{2}$.
Ofwel: $x^4 - 12x^3 - 45x^2 + 250x + 750 = 0$.

Met $x = y + \frac{12}{4} = y + 3$ volgt: $y^4 - 99y^2 - 236y + 852 = 0$. (*)
Zoek nu $t, p\ en\ q$ zodat de vergelijking wordt: $(y^2 + t)^2 = (py + q)^2$. Ferrari's methode.
Uitgewerkt wordt dat: $y^4 + (2t - p^2)y^2 - 2pqy + (t^2 - q^2) = 0$.
Vergelijking met (*) geeft nu: $4(2t + 99)(t^2 - 852) = 236^2$.
Ofwel: $8t^3 + 396t^2 - 6816t - 393088 = 0$.
Met $s = 2t$ volgt: $s^3 + 99s^2 = 3408s + 393088$. Een type 9 vergelijking.
Met $s = z - \frac{99}{3} = z - 33$ volgt: $z^3 = 6675z + 208750$. (*) Een type 2.

Een oplossing met Roth's methode $n(n^2 - 6675) = 208750$ werkt nu niet!
Een oplossing ligt ergens tussen 94 en 95.
En met Cardano volgen wortels uit negatieve getallen.
Alternatief, zie bij type 2:
Los eerst op: $w^3 + 208750 = 6675w$. Een type 3 vergelijking.
Nu wel met de methode van Roth:
$n(6675 - n^2) = 208750$ en zoek in de buurt van $\sqrt[3]{208750} = 59{,}3\ldots$
Dat geeft, nu verkort: $50 \rightarrow 2500 \rightarrow 4175$ en $50 * 4175 = 208750$. Dus $w_1 = 50$.
Dan is een oplossing van (*):
$z_1 = \frac{w_1}{2} + \sqrt{b - 3\left(\frac{w_1}{2}\right)^2} = 25 + \sqrt{4800} \approx 94{,}28\ldots$ Overigens ook: $z_2 = -50$.
En er volgt: $t_1 = \frac{s_1}{2} = \frac{1}{2}(z_1 - 33) = -4 + 20\sqrt{3}$. Etc. Dit geeft (te-)veel rekenarij.
Verder met $z_2 = -50$ volgt: $t_2 = -41\frac{1}{2}$; $p = 4, q = 29\frac{1}{2}$.
En dan: $\left(y^2 - 41\frac{1}{2}\right)^2 = \left(4y + 29\frac{1}{2}\right)^2$.
Dus of $y^2 - 41\frac{1}{2} = 4y + 29\frac{1}{2}$ dus: $y^2 - 4y - 71 = 0$. En dan: $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{75}$

Of $y^2 - 41\frac{1}{2} = -4y - 29\frac{1}{2}$ dus: $y^2 + 4y - 12 = 0$. En dan: $y_3 = 2, y_4 = -6$.

De oplossingen van de startvergelijking zijn:
$x_1 = y_1 + 3 = 5 + \sqrt{75};\ x_2 = 5 - \sqrt{75};\ x_3 = 5, x_4 = -3$.
x_2 en x_4 vallen meteen af. Ook x_3 valt af want $5 - 12 = -7$ als geld van B…

Conclusie: A resp. B heeft $\sqrt{75} + 5$ resp. $\sqrt{75} - 7$ florijnen.

[1] Hoe gekunsteld wil je het hebben? Met een bewerkelijke uitwerking!

Vrg 27. Vier leden van een gezelschap (A,B,C,D) leggen geld in en handelen een jaar lang en winnen daarmee een som geld. Als ik nu bij al dat geld inclusief winst 179 optel, uit de som de derdemachtswortel trek, dat verdubbel, er dan 8 aftrek en dat alles weer deel door $\frac{6}{7} - \sqrt{\frac{8}{49}}$ dan resteert: [1][2]
$\sqrt[4]{4x^3 + 440x^2 + 400x - 28875}$.
En over hun winsten: als A van B, C en D elk $\frac{1}{2}$ van hun inleg bij zijn inleg telt, dan heeft hij zoveel als de (totale) winst is. En als B van A,C en D elk $\frac{1}{3}$ van hun inleg bij zijn inleg telt, C van A,B en D elk $\frac{1}{4}$-deel en D van A,B en C elk $\frac{1}{5}$-deel dan heeft ook elk zoveel al de totale winst is.
Wat zijn hun inleggen en wat is de winst?
Roth: A, B, C, D leggen in 5, 95, 125, 140 florijnen, winst: 185 florijnen.

➔ Stel dat hun inleg is resp. a, b, c, d en de winst is w.
Dan volgt een stelsel lineaire vergelijkingen.
$a + \frac{1}{2}(b + c + d) = w; b + \frac{1}{3}(a + c + d) = w; c + \frac{1}{4}(a + b + d) = w; d + \frac{1}{5}(a + b + c) = w.$
En daarmee: $b = 19a, c = 25a, d = 28a, w = 37a$. En dan: $a + b + c + d + w = 110a$.
Dus: $\frac{2\sqrt[3]{110a+179}-8}{\frac{6}{7}-\sqrt{\frac{8}{49}}} = x$ met $x = \sqrt[4]{4x^3 + 440x^2 + 400x - 28875}$.

Eerst x te vinden, dus: $x^4 - 4x^3 - 440x^2 - 400x + 28875 = 0$ met $x > 0$.

Met $x = y + \frac{4}{4} = y + 1$ volgt: $y^4 - 446y^2 - 1288y + 28032 = 0$.
En dit is, nu verkort: $(y^2 + 169)^2 = (28y + 23)^2$.
Er volgt $y^2 + 169 = 28y + 23$ voor positieve oplossingen: $y_{1,2} = 14 \pm \sqrt{50}$.
Dus: $x_1 = y_1 + 1 = 15 + 5\sqrt{2}, x_2 = 15 - 5\sqrt{2}$.
En met x_1 volgt: $a = 5$. Met x_2 volgt: $a = 0{,}143$ ... Zal niet bedoeld zijn.

Dus de inleggen waren: 5, 95, 125, 140 florijnen en de winst was 185 florijnen.

[1] Hoe gekunsteld is dat?
[2] Hier is bedoeld, na reconstructie: het getal dat je dan hebt is de vierdemachts wortel van die veelterm… met **datzelfde** getal ingevuld!

Vrg 32. Een heer laat een vijver (*weyer*) bouwen. De diepte is de helft van de breedte en de lengte is zeven keer de diepte. Hij betaalt voor elke uitgegraven kubieke vadem [1] 2 florijnen. Nu laat hij ook over die vijver een brug maken met een lengte gelijk aan de breedte van de vijver en zo breed als de diepte daarvan. Hij geeft voor die brug per twee vierkante vadem 192 florijnen meer uit om te bouwen als de breedte in het kwadraat is.
Als ik nu alle onkosten bij elkaar tel, dan is dat 2048 florijnen meer dan de diepte van de vijver vermenigvuldigd met 128. Hoe lang, breed en diep is die vijver?
Roth: lengte $\sqrt{2352} - 28$, breedte $\sqrt{192} - 8$, diepte $\sqrt{48} - 4$ vadem.

➔ Stel de diepte op x vadem.
Voor de vijver: $lengte * breedte * diepte = 7x * 2x * x = 14x^3$. Kosten: $28x^3$ florijnen.
Voor de brug: $lengte * breedte = 2x * x = 2x^2$. Kosten: $x^2(x^2 + 192)$ florijnen.
Er volgt: $28x^3 + x^2(x^2 + 192) = 128x + 2048$.
Ofwel: $x^4 + 28x^3 + 192x^2 - 128x - 2048 = 0$.

Met $x = y - \frac{28}{4} = y - 7$ volgt: $y^4 - 102y^2 - 72y + 1053 = 0$.
En dit is, nu verkort: $(y^2 - 33)^2 = (6y + 6)^2$.
Dus of: $y^2 - 33 = 6y + 6$. Dat geeft: $y_{1,2} = 3 \pm \sqrt{48}$.
Of: $y^2 - 33 = -6y - 6$. Dat geeft: $y_3 = 3, y_4 = -6$.
Er volgt voor de diepte:
$x_1 = y_1 - 7 = 3 + \sqrt{48} - 7 = \sqrt{48} - 4$ vadem.
$x_2 = y_2 - 7 = -\sqrt{48} - 4$. Voldoet niet.
$x_3 = y_3 - 7 = -4$. Voldoet niet.
$x_4 = y_4 - 7 = -13$. Voldoet niet.
Dus: $breedte = 2x_1 = 8\sqrt{3} - 8; lengte = 7x_1 = 28\sqrt{3} - 28$. [2]

[1] Dit geeft een vertaling van *klasstern*. Als dat zo is, dan is dat 6 voet ≈ 1,86 m.
Bron: Wikipedia.
[2] Dit blijven rare maten: $l * b * d = 38{,}1... * 10{,}8 ... * 5{,}4 ...$ in meters.

Vrg 36. Een boer heeft vier weiden, die hij wil verkopen. De eerste is 8 roeden [1] langer dan breed. De andere drie hebben dezelfde **breedte** [2] als de eerste weide, maar zijn elk $9\frac{1}{3}$ roede langer dan hun breedte. Een vierkante roede van de eerste weide kost zoveel florijnen als de **breedte** [2] in het kwadraat. Elke vierkante roede van de andere drie weiden verkoopt hij voor 3 florijnen. Zo krijgt hij voor de eerste weide 288 florijnen meer dan voor de andere drie.
Hoe lang en breed zijn die weiden?
Roth geeft nu geen antwoord.

➔ Stel de eerste weide heeft een breedte van x roeden.
Oppervlakte weide 1: $O(1) = x(x + 8)$. Prijs weide 1: $P(1) = x(x + 8)x^2$.
$O(2) = O(3) = O(4) = x(x + 9\frac{1}{3})$. $P(2) = P(3) = P(4) = 3x(x + 9\frac{1}{3})$.
Er volgt: $P(1) = P(2) + P(3) + P(4) + 288$.

Dat geeft de vergelijking: $x(x + 8)x^2 = 3 * 3x\left(x + 9\frac{1}{3}\right) + 288$.
Ofwel: $x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 84x - 288 = 0$.

Een gehele oplossing deelt $288 = 2^5 * 3^2$.
De getallen $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ voldoen niet, maar 4 wel.
Dus een oplossing is: $x_1 = 4$. De andere oplossingen zijn fictief.

De afmetingen van de weiden zijn dan:
Weide 1: $4\ bij\ 12$ roede en dat is ongeveer $15\ bij\ 45{,}2$ meter.
Andere weiden: $4\ bij\ 13\frac{1}{3}$ roede en dat is ongeveer $15\ bij\ 50{,}2$ meter.

[1] Een roede is een lengtemaat en de meest gebruikte was de Rijnlandse roede.
Rijnlandse roede $= 12\ voet = 3{,}767\ meter$. Bron: Wikipedia.
[2] In de tekst staat lengte maar dan volgen negatieve afmetingen voor weiden.

Vrg 42. Twee personen, A en B, vormen een gezelschap. B legt geld in en wel vier keer zoveel als A per florijn wint -16 florijnen. A wint per (ingelegde) florijn 4 florijnen meer dan de derdegraads wortel van zijn ingelegd geld. B wint per florijn $8\frac{1}{2}$ keer zoveel als A wint per florijn -23 florijnen.
De winst van A is 133 florijnen minder dan die van B.
Vraag: Wat was de inleg van eenieder? Roth: A: $45 \pm \sqrt{1682}, B$: $12 \pm \sqrt{32}$ florijnen ingelegd.

➔ Stel de inleg van A is a en van B is b florijnen.
Noem de winst per ingelegde florijn w_A resp. w_B.
$b = 4 * w_A - 16,\ w_A = \sqrt[3]{a} + 4,\ w_B = 8\frac{1}{2} * w_A - 23, a * w_A = b * w_B - 133.$
Dat geeft een vergelijking in a:
$a * \left(\sqrt[3]{a} + 4\right) = \left(4 * \left(\sqrt[3]{a} + 4\right) - 16\right) * \left(8\frac{1}{2} * \left(\sqrt[3]{a} + 4\right) - 23\right) - 133.$
En met $x = \sqrt[3]{a}$ volgt: (*)
$x^4 + 4x^3 - 34x^2 - 44x + 133 = 0.$

Met $x = y - 1$ volgt: $y^4 - 40y^2 + 32y + 140 = 0$.
Er volgt, nu verkort: $(y^2 + 12)^2 = (8y - 2)^2$.
Dus of: $y^2 + 12 = 8y - 2$. Dat geeft: $y_{1,2} = 4 \pm \sqrt{2}$.
Of: $y^2 + 12 = -8y + 2$. Dat geeft: $y_{3,4} = -4 \pm \sqrt{6}$.
En dan: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}, x_{3,4} = -5 \pm \sqrt{6}$.

Met (*) volgt: $x > 0$ want $a > 0$.
Er volgt: $a_{1,2} = \left(3 \pm \sqrt{2}\right)^3 = 45 \pm 29\sqrt{2} = 45 \pm \sqrt{1682}$. Dat is de inleg van A.
En: $b_{1,2} = 4 * \sqrt[3]{a_{1,2}} = 12 \pm \sqrt{32}$. Dat is de inleg van B.

Vrg 51. Iemand koopt 30 eenheden saffraan en kaneel. Hij betaalt voor één eenheid van de twee, niet onderscheiden, 60 florijnen minder dan $16\frac{2}{5}$ keer de hoeveelheid saffraan. Hij verkoopt de saffraan weer voor 10 florijn per eenheid. Het kaneel verkoopt hij voor evenveel florijnen [per eenheid] als er saffraan is. Als ik nu het inkoopbedrag met het aantal eenheden saffraan vermenigvuldig en vervolgens de inkomsten met het kwadraat van het aantal eenheden saffraan vermenigvuldig, dan is dat eerste product 1188 meer dan het tweede product.

De vraag is hoeveel eenheden van elk gekocht is en wat alles kostte.
Roth: $15 + \sqrt{27}$ eenheden saffraan en $15 - \sqrt{27}$ kaneel.
Kosten: $5580 \pm \sqrt{6535728}$. [1]

➔ Stel de gekochte eenheden saffraan resp. kaneel zijn s resp. k.
En hij betaalt bij aankoop f florijn per eenheid.
Uitgaven: $30f$ florijnen. Inkomsten: $10s + k * s$ florijnen.
Er volgt:
$s + k = 30;\ f = 16\frac{2}{5} * s - 60;\ 30f * s = 1188 + (10s + k * s) * s^2.$
Ofwel:
$30\left(16\frac{2}{5} * s - 60\right)s = 1188 + \big(10s + s(30 - s)\big) * s^2.$
Dat wordt: $s^4 - 40s^3 + 492s^2 - 1800s - 1188 = 0.$

Met $s = x + 10$ volgt: $x^4 - 108x^2 + 40x + 12 = 0.$
En dit is, verkort: $(x^2 - 4)^2 = (10x - 2)^2.$
Dus of: $x^2 - 4 = 10x - 2$. Dat geeft: $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{27}.$
Of: $x^2 - 4 = -10x + 2$. Dat geeft: $x_{3,4} = -5 \pm \sqrt{31}.$ Die voldoen niet.

Er volgt: $s_1 = 15 + \sqrt{27}$ eenheden saffraan en $15 - \sqrt{27}$ eenheden kaneel of omgekeerd.
En dat kostte: $30 * \left(16\frac{2}{5} * s_1 - 60\right) = 5580 + \sqrt{6535728}$ florijnen. [2]

[1] Weer heerlijk absurde uitkomsten van deze redactiesom.
[2] De inkomsten zijn minder. Hij zou dus verlies lijden?

Vrg 58. Twee personen, A en B, hebben geld. De eerste (A) heeft tweemaal zoveel als de tweede.
Maak nu van ieders geld de derdemacht. Vermenigvuldig dan de derdemacht van B met $\frac{1}{2}$ keer het geld van A. Trek hiervan af van $\frac{3}{4}$ keer de derdemacht van A samen met $9\frac{1}{2}$ keer het geld van A.
Nu resteert $7\frac{5}{16}$ florijnen meer dan het achtvoud van het verschil van de bedragen in het kwadraat.
De vraag is hoeveel geld A en B hebben.
Roth: A heeft $\sqrt{62} + 7$ florijnen en B heeft $\sqrt{15\frac{1}{2}} + 3\frac{1}{2}$ florijnen.

➔ Stel A heeft a florijnen en B heeft b florijnen.
Dan volgt: $a = 2b$. En: $\frac{1}{2}b^3a - \frac{3}{4}a^3 - 9\frac{1}{2}a = 7\frac{5}{16} + 8(a - b)^2.$
Dat geeft uitgewerkt: $a^4 - 12a^3 - 32a^2 - 152a - 117 = 0.$

Met $a = x + 3$ volgt: $x^4 - 86x^2 - 560x - 1104 = 0.$ (*)
En als dit gelijk is aan $(x^2 + t)^2 = (px + q)^2$ volgt:
$(2t - p^2 = -86, 2pq = 560, t^2 - q^2 = -1104).$
Er volgt: $4(2t + 86)(t^2 + 1104) = 560^2$.
Ofwel: $t^3 + 43t^2 + 1104t + 8272 = 0.$ Etc.
Er volgt: $t = -11, p = 8, q = 35.$
En dan: $(x^2 - 11)^2 = (8x + 35)^2$ is een ontbinding van (*).

Dus of: $x^2 - 11 = 8x + 35$. Dat geeft: $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{62}$.
Of: $x^2 - 11 = -8x - 35$. Dat geeft complexe oplossingen.

Conclusie: A heeft $x_1 + 3 = 7 + \sqrt{62}$ florijnen en B heeft er $\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{62} = 3\frac{1}{2} + \sqrt{15\frac{1}{2}}$.

Opmerking.
In de gepresenteerde vraagstukken van Roth draait het steeds om vergelijkingen van graad 3 en hoger die met methoden uit deel een en twee altijd zijn op te lossen. Het is dus meer van hetzelfde.
Hij 'verzint' er echter een context bij zodat de lezer, Faulhaber(?), eerst maar eens de vertaling naar de vergelijking moet zien te vinden. Het is waarschijnlijk dat de vraagstukken van achter naar voren zijn geconstrueerd. Dat geeft dan vaak zeer gekunstelde redactiesommen met rare vergelijkingen, die mogelijk in die tijd als uitdagend werden ervaren en waarmee je bewees een echte rekenmeester te zijn. Een spel tussen rekenmeesters volgens prof. Hogendijk.

NB: Vóór de volgende paragraaf staan in het boek van Roth nog vijf vraagstukken over vergelijkingen van graad 4 en 5. Daarvan is nu niets opgenomen.

Vijfde graad en algebra

Er volgt nu een greep uit 30 voorbeelden die Roth vervolgens geeft. In deze serie komen ook weer de polygonale getallen voor, zie deel twee. Vijfde graad/macht is een vertaling van *surdesolid*.

Vrg 1. Zoek een getal waarvoor geldt: dat getal tot de vijfde macht minus 12 keer zijn vierde macht plus 10 keer zijn derdemacht geeft evenveel als dat ik van 423 keer het getal aftrek 248 keer het kwadraat minus 924. Welk getal is dat?
Roth: $6+\sqrt{3}\ of\ 6-\sqrt{3}$.

➔ Noem dat getal x.
Er volgt: $x^5-12x^4+10x^3=423x-(248x^2-924)$. Let op de haakjes!
Ofwel: $x^5-12x^4+10x^3+248x^2-423x-924=0$.

Hoe Roth dit doet is onbekend, maar mogelijk via een ontbinding… vooraf gemaakt(?)
Dat -4 een oplossing is, is via proberen te vinden: het is een deler van 924.
Dus: $x_1=-4$.
$x^5-12x^4+10x^3+248x^2-423x-924=(x+4)(x^4-16x^3+74x^2-48x-231)$.
En: $-231=-7*3*11$
Probeer: $(x^2+ax-7)(x^2+b+33)=x^4-16x^3+74x^2-48x-231$.
Dan volgt: $a=-4, b=-12$.

Dus: $x^2-4x-7=0$ geeft: $x_{2,3}=2\pm\sqrt{11}$.
En: $x^2-12x+33=0$ geeft: $x_{4,5}=6\pm\sqrt{3}$.

Roth geeft alleen de laatste twee oplossingen.

Vrg 2. Vind een getal waarvan het kwadraat plus 722 en de derdemacht plus 3820 met elkaar vermenigvuldigd gelijk is aan 2769560 minus dat getal tot de vierdemacht keer 50 en minus het getal zelf keer 4416. Welk getal is dat? Roth: $\sqrt{10}-2$.

➔ Stel dat getal is x.
Dan volgt: $(x^2+722)(x^3+3820)=2769560-50x^4-4416x$.
Ofwel: $x^5+50x^4+722x^3+3820x^2+4416x-11520=0$.

Hoe Roth dit aanpakt is onbekend en wordt niet besproken in deel twee.
Maar conform graad 3 en 4 is het begin mogelijk hetzelfde.
Met $x=y-\frac{50}{5}=y-10$ volgt: $y^5-278y^3+2160y^2-5384y+4320=0$.

Als nu geprobeerd is met invullen en $y=1$ niet voldoet maar $y=2$ wel (*),
dan volgt, en dit kent Roth wel: $(y-2)(y^4+2y^3-274y^2+1612y-2160)=0$.

En nu verder met $(y^4+2y^3-274y^2+1612y-2160)=0$.
Met $y=z-\frac{1}{2}$ volgt: $16z^4-4408z^2+30192z-48555=0$.

Met $w=2z$ volgt dan: $w^4-1102w^2+15096w-48555=0$.

Nu is dit te schrijven, verkort, als: $(w^2+27)^2 = (34w-222)^2$.
Dus of: $w^2+27 = 34w-222$. Dat geeft: $w_{1,2} = 17 \pm 2\sqrt{10}$.
Of: $w^2+27 = -34w+222$. Dat geeft: $w_3 = 5, w_4 = -39$.

Dus oplossingen van de startvergelijking zijn:
$x_1 = y_1 - 10 = z_1 - 10\frac{1}{2} = \frac{1}{2}w_1 - 10\frac{1}{2} = \sqrt{10} - 2$,
$x_2 = -\sqrt{10} - 2$,; $x_3 = -8$; $x_4 = -30$, En (*) geeft nog: $x_5 = 2 - 10 = -8$.
Roth geeft dus als antwoord $\sqrt{10} - 2$, de enige ware waarde.

Vrg 7. Er zijn twee getallen. Hun som wordt vermenigvuldigd met het verschil van hun *trigonale* getallen.[1] Dit resultaat is gelijk aan de grootste ware vijfdemachts oplossing van $x^5 = x^4 + 60x^3 + 1764 - 116x^2 - 756x$, vermeerderd met [keer] $1122 - \sqrt{157360\frac{1}{2}}$.
Vermenigvuldigd men echter het verschil van die twee getallen met de som van hun *trigonale* getallen en deelt dat resultaat door de kleinste ware vijfdemachts oplossing van de gegeven vergelijking, dan is dat quotiënt $602 + \sqrt{45300\frac{1}{2}}$.
Welke twee getallen zijn dat? Roth: 13 en 20.

➔ Een heerlijk gekunstelde vraag.
Eerst dienen de oplossingen van de vergelijking gevonden te worden.
$x^5 - x^4 - 60x^3 + 116x^2 + 756x - 1764 = 0$.
Hoe Roth dit doet, is onbekend. Mogelijk vindt hij een ontbinding… of begint daarmee!?
$(x+7)(x^2-18)(x^2-8x+14) = 0$.
De twee bedoelde ware oplossingen zijn: $x_1 = 4 + \sqrt{2}, x_2 = 4 - \sqrt{2}$.

Stel de twee gezochte getallen zijn a, b met $a > b$.
Zie nu ook paragraaf *Polygonale getallen*.
Er volgt: $(a+b) * \left(\frac{1}{2}a(2+(a-1)) - \frac{1}{2}b(2+(b-1))\right) = x_1 * \left(1122 - \sqrt{157360\frac{1}{2}}\right)$.
En: $(a-b) * \left(\frac{1}{2}a(2+(a-1)) + \frac{1}{2}b(2+(b-1))\right) = x_2 * \left(602 + \sqrt{45300\frac{1}{2}}\right)$.
Uitgewerkt, met hulp van *Wolfram-Alpha*, wordt dit:
$\frac{1}{2}(a^3 + a^2b + a^2 - b^2 - ab^2 - b^3) = 3927$; $\frac{1}{2}(a^3 - a^2b + a^2 - b^2 + ab^2 - b^3) = 2107$.

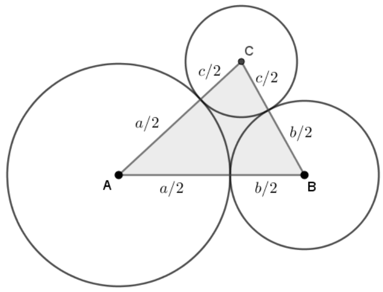
En de vergelijkingen opgeteld geeft: $a^3 + a^2 = 6034 + b^2 + b^3$.
Begin in de buurt van $\sqrt[3]{6034} = 18{,}2$ …
$a = 18 \rightarrow 18^3 + 18^2 = 6156$. Oplossing van $b^3 + b^2 = 6156 - 6034 = 122 \rightarrow b = 4{,}6$ …
$a = 19 \rightarrow 7220$. $b^3 + b^2 = 7220 - 6034 = 1186 \rightarrow b = 10{,}2$ …
$a = 20 \rightarrow 8400$. $b^3 + b^2 = 8400 - 6034 = 2366 \rightarrow b = 13$.

Het begon dus met $a = 20$ en $b = 13$.

[1] Hieruit volgt dat het om natuurlijke getallen gaat.

Vrg 16. Drie ongelijke cirkels raken elkaar. Het product van de grootste diameter met de kleinste is $23\frac{1}{3}$ keer zoveel als hun som. En de som van hun kwadraten gedeeld door $(11 + x_1 * x_2)$ geeft $118\frac{2}{5}$. Waarbij x_1 en x_2 ware oplossingen zijn van $x^5 + 264x^2 + 447x - 3x^4 - 95x^3 - 783$ gelijk aan het *hecatonhexacontagonale* getal. [1]
De driehoek gevormd door de centra van de cirkels heeft een oppervlakte van $\sqrt{607040 + \sqrt{120422400000}}$.
Hoe groot is de derde diameter? Roth: $32 + \sqrt{240}$.

➔ De drie diameters zijn $a > b > c$.
Het laatste gegeven geeft met de formule van Heron
$O = \sqrt{s(s - zijde_1)(s - z_2)(s - z_3)}$:
$O^2 = \frac{1}{16}(a + b + c)(a * b * c)$
$= 607040 + \sqrt{120422400000}$.



Het tweede gegeven geeft: $\frac{a^2+c^2}{11+x_1*x_2} = 118\frac{2}{5}$.

En de vergelijking wordt, zie [1]:
$\frac{1}{2}x(2 + (x - 1)158) = x^5 + 264x^2 + 447x - 3x^4 - 95x^3 - 783$.
Ofwel: $x^5 - 3x^4 - 95x^3 + 185x^2 + 525x - 783 = 0$.
Hoe Roth dit aanpakt is onbekend, maar een ontbinding geeft:
$(x + 9)(x^2 - 13x + 29)(x^2 + x - 3) = 0$.
Oplossingen zijn: $x_{1,2} = \frac{1}{2}(13 \pm \sqrt{53}), x_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{13}),\ x_5 = -9$.

Roth gaat met $x_{1,2}$ verder hoewel $x_3 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{13})$ ook een ware oplossing is.
Er volgt: $x_1 * x_2 = 29$. Dit is positief en zonder wortels en mogelijk is dat de reden.
En dan: $a^2 + c^2 = (11 + 29) * 118\frac{2}{5} = 4736$.

Het eerste gegeven geeft: $a * c = 23\frac{1}{3} * (a + c)$. Ofwel: $3ac = 70(a + c)$.
Er volgt: $9(ac)^2 = 4900(4736 + 2ac)$. En: $ac = 2240$.
Gevolg: $a^2 + \left(\frac{2240}{a}\right)^2 = 4736$. Ofwel: $a^4 - 4736a^2 + 5017600 = 0$.
En dan volgt: $a^2 = 1600\ of\ 3136$. En met $a > b > 0$ volgt: $a = 56, c = 40$.

Verder met de oppervlakte: $\frac{1}{16}(56 + b + 40)(56 * b * 40) = 607040 + \sqrt{120422400000}$.
Dat wordt: $b^2 + 96b - (640\sqrt{15} + 4336) = 0$

Er volgt: $b_1 = -4(32 + \sqrt{15})$. Voldoet niet want dat getal is negatief.
$b_2 = 4(8 + \sqrt{15}) = 32 + \sqrt{240}$. Dit is de diameter van de 'middelste' cirkel.

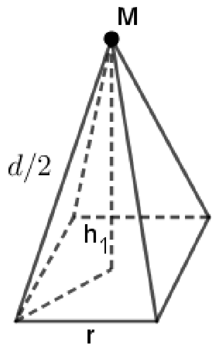
[1] Dit hoort bij een 160-hoek. Dus $v = 158$. Zie paragraaf *Polygonale getallen*. De formulering in de tekst is ingewikkeld en pas na reconstructie is gevonden wat mogelijk bedoeld is.

Vrg 22. Er is een bol waarvan de diameter in voeten gelijk is aan de grootste ware oplossing van de vergelijking van het *pentachilitetracosihexagonale* getal [1] gelijk aan
$x^5 + 3550x^2 - 1817x + 5232 - 4x^4 - 84x^3$.
In die bol wordt een onregelmatig veelvlak geplaatst van 6 vierkanten en 8 regelmatige zeshoeken.
De ordening daarvan is zodanig dat gezet op een vierkant het overstaande vlak ook een vierkant is.
Plaatst men het op een zeshoek dan zijn vlakken evenwijdig aan die zeshoek ook een zeshoek.
De hoekpunten van het veelvlak liggen op de bol. [2]
De vraag is hoeveel voet een ribbe van zo'n 24-hoekig veelvlak is.
Roth: $\sqrt{3\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{1}{5}}$ $[= \frac{1}{5}(\sqrt{5} + 3\sqrt{10})]$.

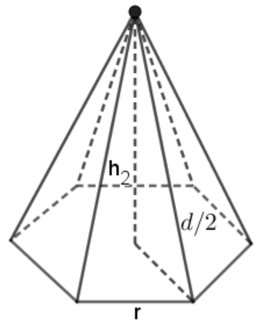
➔ De vergelijking (?) $x^5 + 3550x^2 - 1817x + 5232 - 4x^4 - 84x^3 = \frac{1}{2}x(2 + (x-1)5404)$.
Pentachilitetracosihexa is 5406. Dus $v = 5404$.
De diameter zou moeten worden: $d = 6 + \sqrt{2}$. [1]

De inhoud van het veelvlak is te berekenen via de inhoud van 6 vierzijdige piramides plus de inhoud van 8 zeszijdige piramides. De hoogtes daarvan zijn h_1 resp. h_2 en de grondvlakken hebben ribbe r.
Er volgt, zie [2]: $Inhoud = 8\sqrt{2} * r^3 = 6 * I_4 + 8 * I_6$.

Er geldt verder:
$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = h_1^2 + \frac{1}{2}r^2$, zie figuur 1.
$I_4 = \frac{1}{3}\, h_1 * r^2$.
$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = h_2^2 + r^2$, zie figuur 2.
$I_6 = \frac{1}{3}\, h_2 * \frac{3}{2}\, r^2\sqrt{3}$.



figuur 1



figuur 2

Gevolg: $8r^3\sqrt{2} = 6 * \left(\frac{1}{3}r^2 * \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}r^2}\right) + 8 * \left(\frac{1}{2}\, r^2\sqrt{3} * \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - r^2}\right)$.
Een lastige vergelijking. Een alternatieve aanpak is en ook bekend in die tijd: neem $r = 1$.
Dan volgt:
$8\sqrt{2} = \left(2 * \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}}\right) + \left(4\sqrt{3} * \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - 1}\right)$. Dat geeft: $d = \sqrt{10}$.
En dan volgt met verhoudingen: $r : 1 = (6 + \sqrt{2}) : \sqrt{10}$. Dus: $r = \frac{1}{5}(\sqrt{5} + 3\sqrt{10})$.

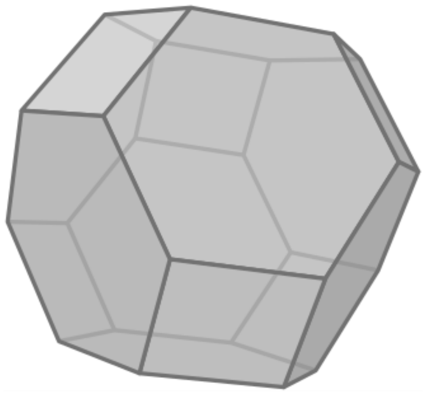
Waarschijnlijk heeft Roth dit op andere wijze gedaan…

[1] Dit hoort bij een 5406-hoek. Zie paragraaf *Polygonale getallen.*
Maar die vergelijking is niet juist of niet juist door mij geformuleerd.
De nu gegeven diameter $6 + \sqrt{2}$ is gevonden via terugrekening.
NB: $x^5 + 3550x^2 - \mathbf{7193}x + \mathbf{10608} - 4x^4 - 84x^3 = \frac{1}{2}x(2 + (x-1)5404)$
heeft als ware oplossingen: $x_1 = 6 + \sqrt{2}\ \ en\ x_2 = 6 - \sqrt{2}$.

[2] Dit is een zogenaamd Archimedisch lichaam. In elk hoekpunt komt één vierkant en twee zeshoeken samen. Er zijn 24 hoekpunten, $6+8$ veelhoeken en 36 ribben. De formule op naam van Euler uit de 18e eeuw was mogelijk al bekend: $P+V-R=2$.

Dit half-regelmatige veelvlak is een afgeknot octaëder. Zie figuur 3. Bron: Wikipedia.

$Inhoud = 8\sqrt{2} * r^3$. Met r de lengte van een ribbe. Dit resultaat is al bekend ten tijde van Archimedes.



figuur 3

Vrg 29. Van een onregelmatig veelvlak is gegeven dat de hoekpunten op een bol liggen. Het bestaat uit 20 gelijkzijdige driehoeken en 12 regelmatige tienhoekige veelhoeken. [1]
Het verschil van de twee ware *tessaracontaoctogonale* [2] wortels uit
$x^5+3x^4+332x^2+2474\frac{1}{16}-99\frac{1}{2}x^3-969\frac{3}{16}x$ is de lengte van de ribben.
Wat is de diameter van die bol? Roth: $\sqrt{1850+\sqrt{2812500}}$.

➔ Zoals het nu in de vraag staat wordt het niet begrepen door mij. Een herschrijving:
De **som** van de twee ware wortels van het *tessaracontaoctogonale* getal [2] gelijk aan $x^5+\cdots$ is de lengte van de ribben.
Dan volgt: $x^5+3x^4+332x^2+2474\frac{1}{16}-99\frac{1}{2}x^3-969\frac{3}{16}x=\frac{1}{2}x(2+(x-1)46)$.

Ofwel: $16x^5+48x^4-1592x^3+4944x^2-15155x+39585=0$.
Ontbinding geeft: $(x+13)(4x^2+35)(4x^2-40x+87)=0$.

Ware oplossingen zijn: $x_{1,2}=5\pm\frac{1}{2}\sqrt{13}$. De overige drie zijn fictief.
Dat geeft voor de lengte van de ribben: $r=x_1+x_2=10$.

Voor de inhoud van het lichaam hebben we de inhouden van piramides nodig.
Met elke ribbe van lengte r, straal bol R en hoogtes van resp. h_1 en h_2 volgt:
$Inhoud(op\ driehoek) = I_3 = \frac{1}{3}h_1 * \frac{1}{4}r^2\sqrt{3}$. Met: $h_1=\sqrt{R^2-\frac{1}{3}r^2}$.
$Inhoud(op\ tienhoek) = I_{10} = \frac{1}{3}h_2 * \frac{5}{2}r^2(\sqrt{5+2\sqrt{5}})$. En: $h_2=\sqrt{R^2-\frac{1}{2}r^2(3+\sqrt{5})}$. [3]

Totale inhoud van dit ruimtelijk lichaam: $20 * I_3 + 12 * I_{10} = \frac{5}{12}\left(99+47\sqrt{5}\right)r^3$. [1]
Alles ingevuld geeft:

$$20 * \frac{r^2}{12}\sqrt{3\left(R^2-\frac{1}{3}r^2\right)} + 12 * \frac{5r^2}{6}\sqrt{\left(5+2\sqrt{5}\right)\left(R^2-\frac{1}{2}r^2\left(3+\sqrt{5}\right)\right)} = \frac{5}{12}\left(99+47\sqrt{5}\right)r^3.$$

En dan met $r=1$ volgt, na herhaald kwadrateren, de vergelijking:

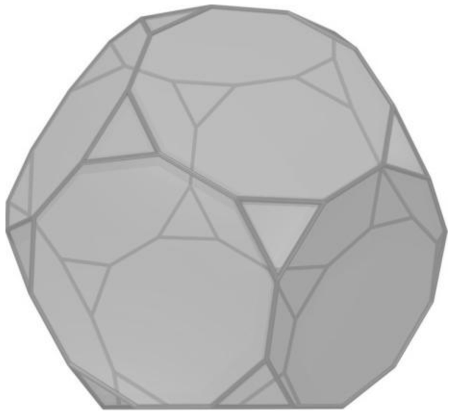
$$\left(14655744+6524928\sqrt{5}\right)R^4-\left(306464832+137020608\sqrt{5}\right)R^2+\left(1565018424+699888024\sqrt{5}\right)=0$$

Een vierkantsvergelijking in R^2.
Dat geeft uiteindelijk(!): $R = \frac{1}{4}\sqrt{74 + 30\sqrt{5}}$.
Er volgt $1 : 10 = \frac{1}{2}\sqrt{74 + 30\sqrt{5}} : d(iameter)$. En dan: $d = \sqrt{1850 + \sqrt{2812500}}$.

[1] Het gaat hier om een half-regelmatig Archimedisch lichaam: een afgeknotte dodecaëder. Zie figuur 1. Bron: Wikipedia.

60 hoekpunten, 32 zijvlakken, 90 ribben.

$Inhoud = \frac{5}{12}\left(99 + 47\sqrt{5}\right) * r^3$.
Met r de lengte van elke ribbe.


figuur 1

[2] Dat gaat over 48-hoeks vlak. Dus: $v = 46$.
[3] Oppervlaktes van regelmatige $4, 5, 6, 8, 10, 12, \ldots$-hoeken zijn gewoon bekend.

Opmerking.
De vraagstukken 18 t/m 30 zijn allemaal van bovenstaand niveau.
Het zal een hele kluif geweest zijn voor Faulhaber, want men vermoedt dat Roth ze maakte om hem uit te dagen. Die uitdaging is er zeker voor de schrijver dezes temeer ook omdat de vraagstelling soms niet goed begrepen is.

Hogere graden

In deze vragen komen vergelijkingen voor die beginnen met $1Bx^5 + \cdots$
Bx^5 geeft aan de tweede na x^5 dus x^7.
Roth presenteert zeven vraagstukken waarvan er hier drie getoond worden.

Vrg 1. Gegeven is: $x^7 + 584x^4 + 17680x^3 + 18416x^2$ is gelijk aan
$7x^6 + 266x^5 + 158688x + 174720$. Eén ware oplossing is ook gegeven: 10.
Wat zijn de andere oplossingen?
Roth: Er zijn drie ware en twee fictieve oplossingen. $10, 10 \pm \sqrt{48}, -4, -7$.

➔ Bij invulling blijkt dat 10 inderdaad een oplossing is.
De vergelijking is van graad 7 en er zijn dus 7 oplossingen. Dat wordt pas in de 19e eeuw bewezen.
Er zijn ofwel oplossingen met multipliciteit 2, als de genoemde oplossingen van Roth de enige zijn ofwel… hij geeft niet alle oplossingen.
Een uitdeling van $(x - 10)$ geeft:
$x^6 + 3x^5 - 236x^4 - 1776x^3 - 80x^2 + 17616x + 17472 = 0$.

Een oplossing deelt $17472 = 2^6 * 3 * 7 * 13$.
Probeersels: $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4$ voldoen niet, maar $x = -4$ wel.
Een uitdeling van $(x + 4)$ geeft:
$x^5 - x^4 - 232x^3 - 848x^2 + 3312x + 4368 = 0$.
Mogelijk is soortgelijk te vinden: $x = -7$.
Er volgt met uitdeling van $(x + 7)$:
$x^4 - 8x^3 - 176x^2 + 384x + 624 = 0$.

Dit is verder bekend terrein.
Met $x = y + \frac{8}{4} = y + 2$ volgt: $y^4 - 200y^2 - 384y + 640 = 0$.
En dit is te schrijven als $(y^2 + t)^2 = (py + q)^2$.
Er moet dan gelden: $2t - p^2 = -200, 2pq = 384,\ t^2 - q^2 = 640$.
Er volgt: $(y^2 + 28)^2 = (16y + 12)^2$.

Dus of $y^2 + 28 = 16y + 12$. Dat geeft: $y_{1,2} = 8 \pm \sqrt{48}$.
Of $y^2 + 28 = -16y - 12$. Dat geeft: $y_{3,4} = -8 \pm \sqrt{24}$.

Dus oplossingen zijn: $x_{1,2} = y_{1,2} + 2 = 10 \pm \sqrt{48}$. Die geeft Roth ook: twee ware waarden.

En: $x_{3,4} = -6 \pm \sqrt{24}$. Twee fictieve oplossingen die Roth niet noemt.
De andere oplossingen zijn dus: $10, -4, -7$.

Vrg 4. Er zijn enige cossische '*quantiteten*' [1] die zeven wortels geven en wel vijf ware $3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3}, 10, 5, 3$ en ook nog twee fictieve namelijk -6 en -11.
De vraag is nu wat die *quantiteten* waren waar deze wortels bij horen.
Antwoord Roth: $x^7-7x^6-133x^5+1141x^4+1188x^3-30359x^2+81522x-59400$.

En Roth schrijft verder:
Er zullen hier veel [mensen] te vinden zijn, die zich afvragen hoe het mogelijk is, dat als men de oplossingen kent, dat men dan daarmee de termen of de vergelijking kan vinden. Die mensen moeten weten dat niet de kunst, maar eerder hun onwetendheid daaraan schuldig is. [sic]
Er is ook een mooie regel waardoor dit gewenste (als alle wortels bekend zijn) volbracht kan worden. Men mag het zelf uitzoeken: net zoals het mogelijk is uit een vergelijking de oplossingen te vinden, zo is het ook omgekeerd mogelijk met alle bekende wortels de vergelijking te vinden. [2]

➔ We weten dat een vergelijking zoals hier bedoeld met bekende wortels te schrijven is als een product van factoren met die wortels.
Er volgt: de vergelijking is te schrijven als
$\left(x-\left(3+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(3-\sqrt{3}\right)\right)(x-10)(x-5)(x-3)(x+6)(x+11)=0.$

Maar uitgewerkt geeft dit de vergelijking:
$x^7-7x^6-133x^5+1141x^4+1188x^3-30\mathbf{558}x^2+81\mathbf{720}x-59400=0.$

In het antwoord van Roth zijn dus twee termen fout. Dat zijn zetfouten of… ? Zie de opmerking.

[1] Termen als $ax^4, bx^2, \ldots$ heten blijkbaar cossische *quantiteten*: kwantiteiten.
[2] Dit sorteert al voor op wat definitief bewezen wordt in de 19e eeuw:
Elk polynoom van graad n over $\mathbb{C}$ is te ontbinden in precies n lineaire factoren.
Roth beweert mogelijk al in deze tekst dat zoiets geldt voor alle polynomen.
Bovendien beweert Roth hier dat het mogelijk is *altijd* een oplossing te vinden van een vergelijking, waarmee hij niet een numerieke methode bedoelt…

Opmerking.
Van prof. Hogendijk ontving ik een artikel van de hand van Kenneth Manders.
Zie https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086005000480

Dat gaat over algebra zoals Roth, Faulhaber en Descartes dat gebruiken.
Daarin wordt gesteld dat er in de druk van sommige problemen van Roth fouten zitten. Bezie je alle fouten dan geeft dat een patroon, zodat het onwaarschijnlijk is dat het zetfouten zijn.
De heer Manders concludeert dat Roth juist zorgvuldig zulke fouten maakt, die daardoor een onderdeel van de vraagstelling worden. Aan de lezer om die fouten te herstellen.

Maar of dat een verklaring is voor het onbegrip van de schrijver dezes bij sommige vragen?

Vrg 6. Gegeven is dat $x^7 + 15x^6 + 16x^5 + 8538x + 1040 + enige\ x^2$ gelijk is aan $574x^4 + 1847x^3$. Een ware oplossing is een tweenamige getal, *binomium* of *residuum*, waarvan alleen het *surdische* deel bekend is, namelijk $\sqrt{3}$. Wat is het rationale deel van dat tweenamige getal?
En wat zijn die $enige\ x^2$ in de vergelijking?
Roth: Het rationale deel is 4 en in de vergelijking staat $2531x^2$.

➔ Van een oplossing x_1 is dus bekend: $x_1 = a + \sqrt{3}\ of\ a - \sqrt{3}$
Invullen in de vergelijking geeft, met voor $enige\ x^2$ geschreven px^2:

$a^7 + 15a^6 + 79a^5 + 101a^4 - 1052a^3 + a^2(p - 8307) + (3p - 7176a - 3721) = 0$ en
$(7a^6 + 90a^5 + 185a^4 - 1396a^3 - 4872a^2 + (2p - 6078)a + 3168)\sqrt{3} = 0$.

Er geldt namelijk: als $v + w\sqrt{3} = 0\ en\ v, w \in \mathbb{Q}$, dan volgt: $v = w = 0$.

Hoe Roth dit heeft aangepakt, is onbekend.
Een probeer-methode: als a ingevuld wordt, dan moeten beide vergelijkingen nul geven.
En daarbij zal de waarde van p in beide vergelijkingen hetzelfde moeten zijn.

Waarde voor a	1e vergelijking voor p	2e vergelijking voor p	Waarden p gelijk?
1	5105	4448	nee
2	7783,5 …	8339	nee
3	7326,3 …	9108	nee
4	2531	2531	ja

Blijkbaar is een oplossing: $x_1 = 4 + \sqrt{3}$.
En de vergelijking is:
$x^7 + 15x^6 + 16x^5 - 574x^4 - 1847x^3 + \mathbf{2531}x^2 + 8538x + 1040 = 0$.

Of met een uitgebreide berekening:
$7a^6 + 90a^5 + 185a^4 - 1396a^3 - 4872a^2 - 6078a + 3168 = -2ap$. Dus $p = \cdots$
$a^7 + 15a^6 + 79a^5 + 101a^4 - 1052a^3 - 8307a^2 - 7176a - 3721 = -p(a^2 + 3)$. Dus $p = \cdots$
Dat geeft:
$5a^8 + 60a^7 + 48a^6 - 1328a^5 - 2213a^4 + 6348a^3 + 2904a^2 - 10792a + 9504 = 0$.
Met a een geheel getal volgt, dat a een deler is van $9504 = 2^5 * 3^3 * 11$.
Begin met de kleinste gehele waarden.
$\pm 1, \pm 2, \pm 3$ voldoen niet maar 4 wel. En $a = 4$ is de gevraagde oplossing.

Met *Wolfram-Alpha* is de ontbinding van de startvergelijking:
$(x + 2)(x + 5)(x + 8)\left(x - 4 + \sqrt{3}\right)\left(x - 4 - \sqrt{3}\right)\left(x + 4 + \sqrt{15}\right)\left(x + 4 - \sqrt{15}\right) = 0$.

Einde derde deel.

Nawoord

Na al dit gestoei met wortelvormen kan de vraag rijzen: waarom is zoveel tijd en energie gestoken in het vinden van formules met wortelvormen? Toch niet om die kunstige vraagstukken van Faulhaber op te lossen? En voor toepassingen in de techniek ofzo zijn die ook niet nodig. Reeds vóór de 16e eeuw waren er al numerieke methoden gevonden om vergelijkingen op te lossen of benaderingen voor oplossingen te vinden en die resultaten zijn goed bruikbaar in reële toepassingen.

De echte reden is een meer theoretische: bestaan er wel zulke formules met wortelvormen?
Voor de tweedegraads vergelijking zijn ze snel gevonden, maar voor hogeregraads vergelijkingen niet.
Cardano en Ferrari en anderen hebben laten zien dat er inderdaad voor graad 3 en 4 zulke formules bestaan.
Tegenwoordig maken we niet meer het onderscheid in typen zoals dat in de 16e en 17e eeuw gebeurt.
Een vraag aan een computeralgebrasysteem als *Wolfram-Alpha* genereert in *no time* de antwoorden.
Zie bijlage 3. Dit programma is in deze tekst vaak gebruikt om hogeregraads vergelijkingen op te lossen of oplossingen te controleren …

Voor graad 5 en hoger zijn we met zo'n programma ook snel klaar. Overigens is pas in de 19e eeuw bewezen dat er voor vergelijkingen van graad 5 en hoger géén algemene formules met wortelvormen bestaan! De namen van Abel (1802-1829) en Galois (1811-1832) zijn daaraan verbonden.

Een bijvangst bij het onderzoek zijn de complexe getallen, getallen waar we nu vrij gemakkelijk mee werken, maar dat is in de 16e en 17e eeuw zeker niet zo. Dat blijkt ook uit de naamgevingen 'fictief', 'verzonnen' en imaginair.

In zijn nawoord tenslotte geeft Roth nog een legitimatie om het boek te schrijven. Hij noemt een uitspraak van Petrus, waarin wij gemaand worden de ander te dienen met de gave die van God ontvangen is… En wie goed doet, goed ontvangt, denkt hij mogelijk, want hij eindigt met:

"Ein Übelthat bringt Schand und Nodt aber Wohlthat lebt nach dem Todt."

Roth ziet zijn werk waarschijnlijk dus als een goede daad.

Over de auteur:
Fred Muijrers was tot zijn pensioen docent aan de eerste- en tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen.
Voor opmerkingen en/of foutmeldingen: stuur een mail.

Bijlage 1: over Peter Roth

Peter Roth († April 1617) was een rekenmeester (*Cossist*) in Nürnberg.

Hij was de zoon van Heinrich Roth. Van die laatste is bekend, dat hij in 1590 vanwege opstandigheid tegenover de raad in de gevangenis zat, maar toen berouw toonde en zich verontschuldigde.

Over Peter Roth is weinig bekend. Hij trouwde op 17 juli 1603 met Maria Magdalena Herold, dochter van een geweer-gieter, en werd op 25 april 1617 in Nürnberg begraven.

Van Roth is een manuscript uit 1599 in de Columbia Universiteit bewaard gebleven, waarin de oplossingen van het eerste Duitse algebra-boek (Coss) van Christoph Rudolff in een uitgave van Michael Stifel uit 1554 staan.

In zijn *Arithmetica Philosophica* noemt hij het vermoeden, dat polynomen van graad n ten hoogste n wortels hebben. Hij beschrijft de oplossing van kubische vergelijkingen volgens Girolamo Cardano en behandelt sommen van pyramidegetallen en polygonaalgetallen volgens Johannes Faulhaber. Hij meende de regels daarvoor onafhankelijk van Faulhaber te hebben gevonden. Het bevat in het tweede deel alle oplossingen van de 160 vraagstukken in Faulhabers *Arithmetischer Cubicossischer Lustgarten* (1604), die deze vraagstukken eigenlijk als promotie voor zijn kunsten als rekenmeester bedoeld had (de titel is ook een verwijzing dat hij ook de methoden voor het oplossen van kubische vergelijkingen van Cardano beheerste), zodat de publicatie van Roth, van de voorbereiding was hij vanaf 1605 bekend, hem flink ergerde. Als rekenmeester, die van de kennis van zijn kunsten leefde, was Faulhaber niet geïnteresseerd in de publicatie van oplossingsmethoden of eventuele eenvoudige presentaties daarvan. Hij had in zijn boek van 1604 enkel de oplossingen gegeven maar niet de weg daar naar toe. Roth neemt in het derde deel van zijn boek eigen nieuwe vraagstukken op als uitdaging vooral voor Faulhaber, die die later ook oplost. Zij leiden naar vergelijkingen van de vierde tot en met de zevende graad. Roth was overtuigd van de oplosbaarheid van vergelijkingen van de vierde en hogere graad middels radicalen [wortelvormen].

Zijn boek was van invloed op het meetkunde-boek van René Descartes (1637) en zijn aanpak van het ontbinden van polynomen. Het aanzien van Roth steeg daardoor ook in het buitenland. In 1626 meldt Faulhaber dat Roth door velen als de meest geleerde *Arithmeticum Europae* wordt gezien. Na Faulhaber was Nicolaus Petri [uit Deventer, *fm*] de eerste die methoden voor het ontbinden van polynomen ontwikkelde en waarmee Roth daarna verder ging.

Professor in de wiskunde in Altdorf, Daniel Schwenter (1585–1636), prees Roth voor de constructie van latijnse vierkanten (Mathematische Erquickstunden, 1636).
Mogelijk zijn er ook niet gepubliceerde manuscripten van Roth over meetkunde geweest.

Een in 1619 uit Nürnberg genoemde rekenmeester Paul Roth, gestorven in 1628, was waarschijnlijk zijn zoon.

Bron: https://de.wikipedia.org/wiki/Peter_Roth_(Mathematiker)
Vertaald uit het Duits.

Bijlage 2: een formule van Cardano

In de 16e eeuw is er veel studie naar het oplossen van algebraïsche vergelijkingen van graad 3 en hoger in West-Europa. Oplossingen bij graad 3 worden gevonden door berekening en met formules (in radicalen) en niet meer door het snijden van kegelsneden of andere meetkundige krommen zoals de Grieken deden. Hier zijn de namen van Tartaglia (1500-1557) en Cardano (1501-1576) aan verbonden.
De formules zijn voor het eerst gepubliceerd in het werk *Ars Magna* (1545) van Cardano.

Met een voorbeeld is de aanpak bij één type vergelijkingen te illustreren.
Gevraagd is de (een) oplossing van de vergelijking $x^3 + 3x = 14$. Een type 1.
Overigens is dit modern genoteerd. In die tijd noteert men dat zo:
"*1.cubus p.3 rebus aequalis 14*".

Een oplossingsroute modern genoteerd:

- Schrijf: $x^3 + 3px - 2q = 0$.
- Noem: $x = u + v$.
- Vul in en werk uit:
  $(u+v)^3 + 3p(u+v) - 2q = u^3 + v^3 + (3uv + 3p)(u+v) - 2q = 0$.
- Kies nu: $uv = -p$ en er volgt: $u^3 + v^3 - 2q = 0$.
- Er geldt: $u^3v^3 = -p^3$ en $v^3 = 2q - u^3$.
- Dit geeft een vierkantsvergelijking in $u^3 (= y)$: $y^2 - 2qy - p^3 = 0$.
- u^3 voldoet: $u^3 = q + \sqrt{q^2 + p^3}\ (= t)$ en $u = \sqrt[3]{t}$.
  v^3 voldoet: $v^3 = q - \sqrt{q^2 + p^3}$…
- Een oplossing zou kunnen zijn: $x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}}$.

Om hiermee bijvoorbeeld bij $p = 1\ en\ q = 7$ de oplossingen 2 en $-1 \pm i\sqrt{6}$ te krijgen, kan gebruikt worden: $7 \pm \sqrt{7^2 + 1^3} = 7 \pm 5\sqrt{2} = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)^3$.
Dus: $x_1 = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$.
En dan: $x^3 + 3x - 14 = (x - 2)(x^2 + 2x + 7)$.

Meer algemeen volgt bij $x^3 + bx = c\ (b, c > 0)$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} - \frac{c}{2}}.$$

Vermoedelijk is de oplossing bij het type $x^3 + bx = c$ van Niccolò Tartaglia uit 1535 of nog eerder, van Scipione del Ferro rond 1500, maar publiceert Cardano die voor het eerst.

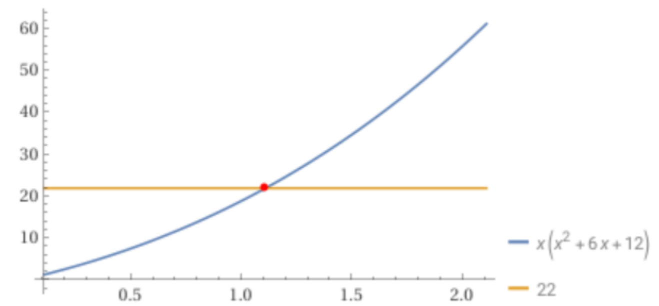
Bijlage 3: een moderne methode

Het onderscheid zoals Roth dat maakt in deel 1 hoeft tegenwoordig niet meer.
We werken gewoon met complexe getallen en een programma als *Wolfram-Alpha* is dan snel klaar.

Voorbeeld: $\boldsymbol{x^3+6x^2+12x=22.}$ Een type 7 vergelijking.

Er volgt meteen

Plot



Real solution

$$x = \sqrt[3]{30} - 2$$

Complex solutions

$$x = -2 - \frac{i\,3^{5/6}\sqrt[3]{5}}{2^{2/3}} - \frac{\sqrt[3]{15}}{2^{2/3}}$$

$$x = -2 + \frac{i\,3^{5/6}\sqrt[3]{5}}{2^{2/3}} - \frac{\sqrt[3]{15}}{2^{2/3}}$$

Alternate form

$$(x+2)^3 - 30 = 0$$

$$x(x(x+6)+12) = 22$$

$$x(x^2+6x+12) = 22$$

Roots in the complex plane