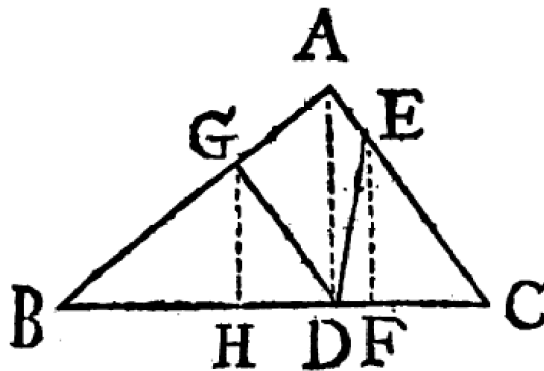


# GEOMETRIA

van Nicolaus Petri Daventriensis  
ende andere questien per Algebrae

door J.R. Brassers



**De vrage is hoe veel de Perpendiculari  
sullen maken.  
Stellende voos  $BD = x$**

Nader bekeken

F. Muijers

**Geometria van Nicolaus Petri door J.R. Brasser**

F. Muijrs

V1.1 fm\_pro@duct\_2025

## Voorwoord

In 1583 verschijnt in Amsterdam het boek *Practicque om te Leeren Rekenen cijpheren ende Boeckhouwen met die Regel Cos ende Geometrie seer profijtelijcken voor allen Coopluyden*, van Nicolaus Petri Daventriensis. In bijlage 1 meer over deze wiskundige.

De Regel Cos was de toenmalige term voor algebra.

Jacob R. Brassier geeft in 1663 een boek uit waarin hij zeer uitvoerig het werk van Nicolaus Petri behandelt. Dat boek is redelijk leesbaar en minder breedspakelijk dan het oorspronkelijke werk van Petri. De teksten zijn gesteld in Frakturschrift <sup>1</sup>) zo lijkt het.

In de voorliggende tekst wordt dit laatste werk bekeken en van enig commentaar voorzien. Het betreft dan vooral het deel over meetkunde en hoe Brassier daarin de Regel Cos gebruikt. Hij voegt ook eigen voorbeelden toe waarin veel met vergelijkingen wordt gewerkt.

De tekst is hertaald in huidig Nederlands.

Voor de oorspronkelijk tekst van Brassier, zie

<https://archive.org/details/regulacosalgebr00brasgoog/page/n6/mode/2up>

... of scan de QR-code hieronder.

Veel plezier bij het lezen.

Fred Muijers

Nijmegen

mei 2025

Versie 1.1

mei 2026



---

<sup>1</sup> <https://nl.m.wikipedia.org/wiki/Fraktur>

## Inhoud

Inleiding .....	- 4 -
De Regula Cos .....	- 5 -
Het oplossen van vergelijkingen.....	- 6 -
Voorbeelden in een niet-meetkundige context.....	- 13 -
<b>Geometria van Nicolaus Petri</b> .....	- 17 -
Rechthoekige driehoeken en lengtes .....	- 18 -
Cirkels en regelmatige veelhoeken.....	- 24 -
Veelhoeken en oppervlakten 1.....	- 32 -
Berekeningen aan cirkels.....	- 38 -
Veelhoeken en oppervlakten 2.....	- 44 -
Veelvlakken en inhouds .....	- 53 -
Een gnomon gebruiken.....	- 63 -
<b>Geometria per Cos</b> .....	- 68 -
Voorbeelden met kwadratische vergelijkingen .....	- 69 -
Voorbeelden met vergelijkingen van graad 3 en 4.....	- 73 -
Nawoord .....	- 91 -
Bijlage 1: Meester Petri .....	- 92 -
Bijlage 2: Voorreden .....	- 93 -
Bijlage 3: Verschillen.....	- 94 -

## Inleiding

Brasser, landmeter in Hoorn, schrijft dat hij Regula Cos of ALGEBRA gaat behandelen omdat dat een altijd kunstige regel is om 'het onbekende bekend' te maken.

Zie bijlage 2 voor uitleg van de keuzes van Brasser.

Hij geeft een korte 'onderwijsing' over worteltrekken en het rekenen met surdische getallen, getallen van de vorm  $\sqrt{a}$ , twee-namige getallen, getallen van de vorm  $a + \sqrt{b}$ , en Cossische getallen.

Dat zijn getallen die onbekend zijn, een ding, genaamd in Latijn 'cosa', in Duits 'coss'.

Brasser behandelt uitvoerig hoe met surdische en twee-namige getallen rekenkundige bewerkingen te doen. In de voorliggende tekst komen ze echter niet apart aan de orde.

Brasser vervolgt met een deel over vergelijkingen in  $x, x^2, x^3, x^4$  met vele voorbeelden.

Hij gebruikt overigens andere symbolen.

Over de betekenis van deze 'karakters' in Frakturschrift, die hij gaat gebruiken, schrijft hij:

$x$  Radix, wordt algemeen gesteld voor hetgeen men zoekt en dus nog onbekend is.

$\mathfrak{z}$  Zensus, komt van  $x$  met zichzelf vermenigvuldigd.

$ce$  Cubus, komt van zensus met  $x$  vermenigvuldigd.

$\mathfrak{zz}$  Zensdezens ofwel Zensuszensus, komt van zensus met zensus vermenigvuldigd.

Nergens staat 'gewoon'  $x$  of  $x^2$  in een probleem of vergelijking.

Het zijn dingen en daarvan heb je er 1, 2,  $\frac{1}{2}$ , ... Er staat altijd  $1x, 1x^2, 2x, \frac{1}{2}x, \dots$

De hoofdmoot in deze tekst zal zijn het gebruik van Cossische getallen om berekeningen te doen binnen een meetkundige vraagstelling. Daarbij is het nodig tweede-, derde- én vierdegraads vergelijkingen te kunnen oplossen. Met een paar voorbeelden wordt getoond hoe dat te doen.

Er wordt in de voorliggende tekst ook een kleine greep getoond uit de meer dan 200 voorbeelden van deze vergelijkingen in een niet-meetkundige context als 'warming-up'. Daarna komen vele meetkundige voorbeelden aan bod: 126 van Petri en 38 van Brasser zelf.

In het deel over meetkunde wordt de lengte van een lijnstuk  $XY$  genoteerd met  $|XY| = a$  als in de tekst staat ' $XY$  doet  $a$ '. Getallen passen bij lengtes van lijnstukken. Dus een resultaat als  $(\sqrt{2} - 1)$  kan wel maar dit wordt nooit geschreven als  $(-1 + \sqrt{2})$ . Er zou dan een negatieve lengte moeten zijn!

Bijzonder is ook dat '=' apart genoemd wordt met als duiding 'beteekent gelijk'.

In 17<sup>e</sup> eeuw wordt een wortelgetal echt anders beschouwd dan een 'gewoon' (rationaal) getal. Surds zijn irrationale getallen. Ze blijven genoteerd met wortelsymbool en ook zonder decimalen.

Een resultaat als  $\sqrt{\frac{12}{25}}$  of  $\sqrt{5x^2}$  blijft zo staan en nergens wordt dat geschreven als  $\frac{2}{5}\sqrt{3}$  of  $x\sqrt{5}$ .

In de delen over de *Geometria* staat tussen haken [...] een opmerking, aanvulling of uitleg van de schrijver dezes. De meeste figuren zijn gemaakt met *GeoGebra 5.0*.

### Wat de Algebre ofte regel Cos is.

**D**e Algebre ofte regel Cos is een konstige ontbindinge van Arithmetische questien/ die dikwils dooz gemeene maniere van reechenen niet wel en konnen ontbonden werden / oock somtijds onmogelijck schijnen / ende dooz een Cossische stellinghe lichtelijck werden uptgereeckent/ wanneer men dooz 't gene gesocht wert  $1x$  is stellende/ daer mede werkende in alles gelijck ofte de selve  $1x$  alreede ware het gene men begeert te soecken/ soo lange men is komende soo bezre dat de selve Cossische getallen in waerdye gelijck zijn eenigh gemeen getal (in de opgave van de questie) bekent gegeven/ waer dooz als dan (soo het mogelijck is) konstelijck gebonden wert de waerdye van  $1x$ / die in de beginne als radende genomen was/ ende nu volkomen ons begeren voldoet.

De Algebra ofwel regel Cos is een kunstige oplossingsmethode van rekenkundige kwesties, die dikwijls door gewone manieren van rekenen niet goed opgelost kunnen worden. Ook soms onmogelijk schijnen en door een Cossische veronderstelling eenvoudig worden uitgerekend, wanneer men voor hetgeen gezocht wordt  $1x$  stelt. Daar dan mee werkend in alles alsof diezelfde  $1x$  alreeds was wat men wenste te zoeken. Zo lang doorgaand komt men zo verder dat dezelfde Cossische getallen in waarden gelijk zijn aan enig gewoon getal (in de opgave van de kwestie) bekend gegeven. En waarvoor dan (zo dat mogelijk is) kunstig gevonden wordt de waarde van  $1x$ , die in het begin als te raden genomen was en nu volkomen aan onze wens voldoet.

## Het oplossen van vergelijkingen

Er zijn typen vergelijkingen te onderscheiden en die worden door Brassier vervolgens uitvoerig besproken hoe ze zijn op te lossen, dat wil zeggen, hoe een oplossing daarvan is te vinden.

In zijn tekst gebeurt dit in ruim 200 pagina's. Hier volgt een greep daaruit.

### Over vergelijkingen van graad 1 en 2.

Type 1:  $1x = N$ .

Type 2:  $1x^2 + x - N = 0$ . Hieronder vallen ook vergelijkingen als  $1x^2 + 3x - N = 0$ ,  $1x^2 = N$ .

Type 3:  $1x^2 - x + N = 0$ . Idem.

Type 4:  $1x^2 - x - N = 0$ .

$N$  staat voor een gewoon gegeven positief (!) getal.

Het type:  $1x^2 + x + N = 0$  ontbreekt want er is toch geen oplossing:  $x$  en  $N$  zijn positief.

Hoe wordt een **tweedegraads vergelijking** van type 2 opgelost?

Een voorbeeld.

$$1x^2 + 8x = 240.$$

½ van 't  $x$  getal 4.

In sich gemultip. 16.

't gemeen getal. 240.

[samen geteld]

hier uyt  $\sqrt{256}$ .

16 wortel.

[hier vanaf]

4 de ½ van 't  $x$  getal.

$1x = 12$ .

Tegenwoordig heet dit

kwadraatafsplitsen:

$$x^2 + 8x = 240.$$

$$x^2 + 2 \cdot 4x + 16 = 240 + 16.$$

$$(x + 4)^2 = 256.$$

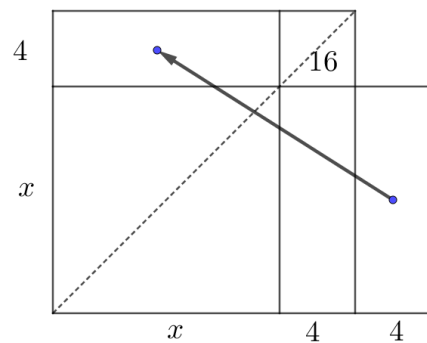
$$x + 4 = 16.$$

-16 is niet toegelaten:

een getal representeert lengte.

$$x = 12.$$

Met een figuur:



Er is altijd één oplossing bij vergelijkingen van type 2.

$$1x^2 + ax = N. \text{ Dit wordt herleid tot } \left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 = N + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

En het rechterlid is een positief getal waaruit de wortel kan worden getrokken dus één oplossing.

Soortgelijk worden de andere typen aangepakt.

Bij type 3 wordt wel de kanttkening geplaatst dat er niet altijd een oplossing is.

$$1x^2 + N = ax. \text{ Dit is te herleiden tot } \left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - N.$$

Het rechterlid moet positief zijn voor een oplossing!

Modern: bij de typen 2 en 4 is de discriminant  $a^2 + 4N$  en dus positief.

Bij type 3 is de discriminant  $a^2 - 4N$  en dus niet altijd positief.

Omdat getallen steeds horen bij lengtes van lijnstukken ( $a$ ), oppervlaktes van vierkanten ( $aa$ ) of inhouden van kubussen ( $aaa$ ), de meetkunde domineert nog, hebben negatieve getallen in een meetkundige context geen betekenis. Daarom wordt zoiets als  $1x^2 - 3x = -2$  meteen herschreven naar  $1x^2 + 2 = 3x$ .

Een  $abc$ -formule wordt nergens getoond of gebruikt.

De vierkantswortel trekken uit een getal wordt uitvoerig behandeld.

Een voorbeeld.

$$\sqrt{15586704}=?$$

Maak 15/58/67/04: verdeel in stukken van twee.

15 00 00 00 bevat een kwadraat:  $3000^2$ .

Noteer 3

Trek af en er resteert 6 58 67 04.

Verdubbel 3 en zoek waarde  $x$  in  $6x 00 * x 00$

binnen 6 58 67 04 ofwel  $6x * x \leq 658$ .

Dat geeft  $x = 9$ .

Noteer 39

Trek af en er resteert 37 67 04. →

Verdubbel 39 en zoek waarde  $x$  in  $78x 0 * x 0$  binnen 37 67 04 ofwel  $78x * x \leq 3567$ .

dat geeft  $x = 4$ .

Noteer 394

Trek af en er resteert 63 10 04.

Verdubbel 394 en zoek waarde  $x$  in  $788x * x$

Binnen 63 10 04 ofwel  $788x * x \leq 631004$ .

Dat geeft  $x = 8$ .

Noteer 3948.

Trek af en er resteert 0.

Het algoritme stopt.

De wortel is 3948. Klaar!

Waarom is dit een goed algoritme?

Zie  $\sqrt{1521} = 39 = 30 + 9$ .

$$(30 + 9)^2 = 30^2 + 2 * 30 * 9 + 9^2.$$

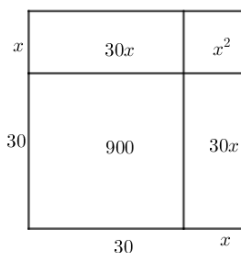
Dus:  $1521 - 30^2 = 2 * 30 * 9 + 9^2 = 6 * 10 * x + x^2 = (60 + x) * x = 621$ .

Met dit algoritme geldt dus steeds:  $x \in \{0,1, \dots,9\}$ .

Te zoeken is dus een zo groot mogelijk getal  $\leq 9$  op de stip zodat  $6 * x + x^2 \leq 621$ .

Het algoritme werd het stip-algoritme genoemd en was gekend in het vo in de 60-er jaren.

Met enig hoofdrekenen is dit altijd te doen.



In een figuur:

De winkelhaak heeft oppervlakte

$$2 * 30 * x + x^2$$

En dat moet zo dicht mogelijk bij

$$1521 - 30^2 = 621 \text{ uitkomen.}$$

Zoek  $x$ .

Als er niet sprake is van een kwadraat zijn op deze manier decimalen te vinden.

Brasser geeft bijvoorbeeld:

Trekt  $\sqrt{x^2}$  uit 10 / zal komen na het getal der nullen die men daar bij doet.

Er volgt:  $3 \mid 1622$  en dan komt  $3 \frac{1622}{10000}$ .

De procedure is wel traag. Per rekenslag wordt één decimaal gevonden.

### Over vergelijkingen van graad 3.

Hier worden 13 typen onderscheiden.

Type 1:  $1x^3 + x - N = 0$ . Hieronder vallen ook vergelijkingen als  $1x^3 + 3x - N = 0$ ;  $1x^3 = N$ .

Type 2:  $1x^3 - x - N = 0$ . Idem.

Type 3:  $1x^3 - x + N = 0$ .

Type 4-13: Derdegraads vergelijkingen met een  $x^2$ -term.

$N$  staat voor een gewoon gegeven positief getal.

Het type:  $1x^3 + x + N = 0$  ontbreekt want zowel  $x$  als  $N$  zijn positief.

Alle **typen met een  $x^2$ -term** worden herleid naar een type zonder zo'n term dus van type 1-2-3.

Eén voorbeeld om dat te illustreren maar bij soortgelijke vergelijkingen gaat het soortgelijk.

Voorbeeld:

$$1x^3 + 6x^2 + 12x - 24 = 0.$$

Omdat hier staat  $1x^3 + 6x^2$

$$\text{Neem } 1x - \frac{1}{3}6 = 1x - 2 \quad (i)$$

$$\text{Dan het kwadraat: } 1x^2 - 4x + 4 \quad (ii)$$

$$(i) * (ii) = 1x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \quad \text{voor } 1x^3.$$

$$\text{En } 6 * (ii) = +6x^2 - 24x + 24 \quad \text{voor } 6x^2.$$

$$\text{En } 12 * (i) = 12x - 24 \quad \text{voor } 12x.$$

En het 'gemeen' getal  $-24$ .

Alles opgeteld geeft dan:

$$1x^3 - 32 = 0$$

$$\text{ofwel } 1x^3 = 32.$$

Dus:  $1x = \sqrt[3]{32}$  en met (i) volgt de

$$\text{oplossing van de beginveelterm: } x_1 = \sqrt[3]{32} - 2.$$

Algemeen:

$$V(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Handig om een andere letter te gebruiken.

$$\text{Schrijf } x = y - \frac{1}{3}a. (*)$$

$$x^2 = y^2 - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}a^2.$$

$$(1) x^3 = y^3 - ay^2 + \frac{1}{3}a^2y - \frac{1}{27}a^3.$$

$$(2) ax^2 = ay^2 - \frac{2}{3}a^2y + \frac{1}{9}a^3.$$

$$(3) bx = by - \frac{1}{3}ba.$$

$$(4) c = c.$$

Tel (1+2+3+4). En dan:  $V(x) = 0$

Dus:

$$y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right) = 0.$$

Als nu  $y_1$  een oplossing is,

$$\text{dan volgt met } (*): x_1 = y_1 - \frac{1}{3}a \text{ en } V(x_1) = 0.$$

Het resultaat is dus een derdegraads vergelijking zonder een  $x^2$ -term.

NB: De andere oplossingen bij dit voorbeeld zijn complexe getallen.

Nog een voorbeeld.

$$\text{Stel: } 1x^3 - 15x^2 + 250 = 0.$$

$$\text{Dus: } a = -15, b = 0 \text{ en } c = 250.$$

$$\text{Met } x = y + 5 \text{ volgt: } 1y^3 - 75y = 0.$$

$$\text{Dus: } 1y^2 = 75 \text{ of } y = 0.$$

$$\text{En dan: } x_1 = 5 + \sqrt{75} \text{ en } x_2 = 5 - \sqrt{75} \text{ en } x_3 = 5.$$

In de tekst komt ook het **oplossen van een derdegraads vergelijking** voor.

Daarbij passeert een formule van Girolamo Cardano (1501-1576).

$$\text{Als } 1x^3 + px = q, \text{ dan } x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}. \text{ Hierbij dus } p, q > 0.$$

De formules van Cardano zijn lastig in gebruik en er zijn meer versies.

De waarde van  $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$  is vrij bepalend.

Een voorbeeld waarbij bovenstaande formule is te gebruiken bij type 1:

$$1x^3 + 3x = 14 \text{ geeft } x = \sqrt[3]{\sqrt{50} + 7} - \sqrt[3]{\sqrt{50} - 7}.$$

En dit blijkt gelijk te zijn aan 2.

$$\text{Niet geheel toevallig geldt hier namelijk: } \sqrt{50} \pm 7 = (\sqrt{2} \pm 1)^3.$$

Bij andere derdegraads vergelijkingen hoort vaak een andere formule.

Een voorbeeld van type 2:

$$1x^3 = 24x + 40.$$

Ofwel:  $1x^3 = px + q$  met  $p, q > 0$

$$\text{Brasser gebruikt nu: } x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. (*)$$

$$\text{Er volgt dan: } \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} = 20 \pm \sqrt{400 - 512} = 20 \pm \sqrt{-112}.$$

Hier wordt gewoon mee gerekend!

$$\text{Dus: } x_1 = \sqrt[3]{20 + \sqrt{-112}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{-112}} = (-1 + \sqrt{-7}) + (-1 - \sqrt{-7}) = -2.$$

$$\text{Blijkbaar heeft hij 'gevonden': } (-1 \pm \sqrt{-7})^3 = 20 \pm \sqrt{-112}.$$

$$x_1 = -2 \text{ is inderdaad een oplossing. De andere oplossingen zijn: } x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{21}.$$

### Opmerking:

Als de vergelijking wordt gelezen als  $1x^3 + (-p)x = 1x^3 + ax = q$ , dan geeft een herschrijving van (\*):

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{-p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{-p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

En dat is weer de eerder gegeven formule van Cardano, maar nu met  $a < 0$ .

Het **uitdelen met een factor**  $(1x - x_1)$  bij een derdegraads veelterm  $V$  met  $V(x_1) = 0$  wordt veel gebruikt door Brassier in het gedeelte *Geometria per Cos.*

Nergens wordt bewezen dat dit altijd kan.

De hoofdstelling van de algebra wordt o.a. door Gauss in de 19<sup>e</sup> eeuw bewezen, maar Petrus Roth schrijft daar al over in zijn *Arithmetica Philosophica* (1608). Mogelijk heeft Brassier hier kennis van genomen.

Met type 2 is zien hoe Brassier te werk gaat.

$1x^3 = px + q$  heeft als gevonden oplossing:  $x_1 = a$ .

Brassier geeft dan als andere oplossingen:  $x_{2,3} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{p - 3\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ .

Feitelijk komt dat neer op de ontbinding:  $(1x - a)(1x^2 + ax + (a^2 - p)) = 0$ .

En dit klopt want uitgewerkt volgt:  $1x^3 - px - a^3 + ap = 1x^3 - px - q = 0$ .

Het vinden van een **derdemachtswortel** wordt ook uitvoerig behandeld.

Een voorbeeld.

$$\sqrt[3]{279726264} = ?$$

Verdeel in drietallen: 279/726/264. Het antwoord heeft 'dus' drie decimalen.

Zoek  $x$  zodat  $(x * 100)^3 \leq 279726264$ . Er volgt:  $600^3 = 216000000$  past maximaal.

Eigenlijk korter:  $6^3 = 216 \leq 279$ . Noteer 6.

Vul in en trek af. Er resteert  $279726264 - 216000000 = 63726264$ .

Maak nu 60 en  $60^2$  keer 3. Er komt 180 en 10800.

Idee is:  $(600 + 10 * x)^3 = 216000000 + 10800000x + 180000x^2 + 1000x^3$ .

Zoek nu  $x$  zodat  $(180x^2 + 10800x + x^3) * 10^3 \leq 63726264$ .

Eigenlijk korter: zoek  $x$  zodat  $180x^2 + 10800x + x^3 \leq 63726$ .

Snel te zien?  $x^3$  brengt weinig in dus let op de andere termen. Er volgt:  $x \leq 5$ . Noteer 5.

Vul in en trek af. Er resteert  $63726264 - 58625000 = 5101264$ .

Maak nu 65 en  $65^2$  keer 3. Er komt 195 en 12675.

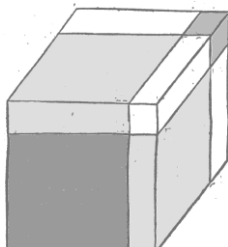
Idee is:  $(650 + x)^3 = 274625000 + x^3 + 1950x^2 + 1267500x$ .

Zoek nu  $x$  zodat  $1950x^2 + 1267500x + x^3 \leq 5101264$ .

Er volgt:  $x \leq 4$ . Noteer 4.

Vul in en trek af. Rest = 0. Het algoritme stopt.

$$\text{Dus: } \sqrt[3]{279726264} = 654.$$



Meetkundig: de grote kubus links voor (zeg  $a$  bij  $a$  bij  $a$ ) samen met de 3 platte grijze balken (van  $a$  bij  $a$  bij  $x$ ) en de 3 witte balken (van  $a$  bij  $x$  bij  $x$ ) en de kleine kubus rechts achter (van  $x$  bij  $x$  bij  $x$ ) vormen het geheel.

$$\text{Dus: } (a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3.$$

$$\text{Gevolg: } (a + x)^3 - a^3 = 3a(ax + x^2) + x^3.$$

## Over vergelijkingen van graad 4.

Hier worden 41 typen onderscheiden.

Type 1:  $1x^4 + x - N = 0$ . Hieronder vallen ook vergelijkingen als  $1x^4 + 3x - N = 0$ ;  $1x^4 = N$ .

Type 2:  $1x^4 - x - N = 0$ . Idem.

Type 3:  $1x^4 - x + N = 0$ .

Type 4-10: Vierdegraads vergelijkingen met een  $x^2$ -term maar zonder een  $x^3$ -term.

Type 11-41: Alle overige vierdegraads vergelijkingen.

$N$  staat voor een gewoon gegeven positief getal.

Het **oplossen van een vierdegraads vergelijking** van type 1 wordt hier getoond aan één voorbeeld.

$$1x^4 + 4352x - 72960 = 0.$$

$$V(x) = 1x^4 + 4352x - 72960.$$

De wortel uit  $1x^4$  is  $1x^2$ .

Brasser schrijft dat er in de wortel een  $x$ -waarde zal zijn:

$$\sqrt{72960 - 4352x} \text{ gaat dus niet.}$$

Neem nu even een andere letter  $y$ .

Begin met  $(1 + 1y)$ , kwadrateer:  $(1 + 2y + 1y^2)$ .

Neem nu  $(2y)$  en tel bij  $(1y^2)$  het gewone getal (72960) op en vermenigvuldig die twee.

$$\text{Dat geeft: } 2y^3 + 145920y. \text{ Stel } = \left(\frac{1}{2} * 4352\right)^2 = 4734976.$$

$$\text{Er volgt: } 1y^3 + 72960y - 2367488 = 0.$$

Een type 1 vergelijking van graad 3. Er volgt:  $1y = 32$ .

Begin met  $(1x^2 + 32)$ , kwadrateer:  $(1x^4 + 64x^2 + 1024)$ .

Trek hier vanaf de startvergelijking. (\*\*)

$$\text{Er resteert: } 64x^2 - 4352x + 73984. [\text{Discriminant} = 0]$$

En nu de wortel hiervan geeft:  $272 - 8x$  en stel  $= 1x^2 + 32$ .

$$\text{Er volgt: } 1x^2 + 8x = 240 \text{ ofwel } 1x = 12.$$

$$\text{Ingevuld: } V(12) = 0.$$

Algemeen:

$$x^4 + px - q = 0 \quad (p, q > 0).$$

$$V(x) = x^4 + px - q.$$

Met  $(1 + 1y)^2$  volgt:

$$2y * (y^2 + q) = \frac{1}{4}p^2.$$

Dus:

$$8y^3 + 8qy - p^2 = 0. (*)$$

Een type 1 vergelijking van graad 3.

Noem  $y_1$  een oplossing. NB:  $y_1 > 0$ .

$$\text{En dan: } (x^2 + y_1)^2 - V(x) =$$

$$2y_1x^2 - px + (y_1^2 + q) = W(x).$$

$$\text{Discr} = p^2 - 8y_1q - 8y_1^3 = 0. \text{ Zie } (*)$$

$$\sqrt{W(x)} = \sqrt{q + y_1^2} - \sqrt{2y_1}x = x^2 + y_1.$$

$$\text{Dus: } x^2 + \sqrt{2y_1}x = \sqrt{q + y_1^2} - y_1. (**)$$

(\*\*) Vervolg:  $\sqrt{2y_1}$  is reëel want  $y_1 > 0$ .

En:  $\sqrt{q + y_1^2} - y_1 > 0$  want  $q > 0$ . Het is dus een type 2 vergelijking van graad 2.

Noem  $x_1$  een oplossing van die vergelijking.

$$\text{Er volgt: } x_1^2 + y_1 = \sqrt{W(x)} = \sqrt{(x_1^2 + y_1)^2 - V(x_1)}. \text{ Zie } (**).$$

$$\text{Dus ook: } (x_1^2 + y_1)^2 = (x_1^2 + y_1)^2 - V(x_1).$$

$$\text{Gevolg: } V(x_1) = 0.$$

Al in 1540 vindt Ludovico Ferrari een methode om vierdegraads vergelijkingen op te lossen. Daarbij treden derdegraads vergelijkingen op. Cardano, zijn mentor, publiceert die aanpak pas nadat hij de derdegraads vergelijkingen heeft opgelost in zijn *Ars Magna* in 1545.

Het idee is: herschrijf de vierdegraads vergelijking, bijvoorbeeld  $x^4 + ax^2 = bx + c$  zodanig dat er staat  $(x^2 + r)^2 = (px + q)^2$ . Na uitwerking en eliminatie van  $p$  en  $q$  ontstaat er een derdegraads vergelijking in  $r$ . Als die is opgelost dan volgt verder:  $x^2 + r = \pm(px + q)$ . Etc.

Met een  $x^2$ -term gaat het soortgelijk.

Bijvoorbeeld een **type 10 vergelijking**:

[i]  $V(x) = 1x^4 - px^2 + qx + r$  ( $p, q, r > 0$ ). Dus op te lossen:  $V(x) = 0$ .

Begin met  $(1 - 1y)$  en kwadrateer:  $(1 - 2y + 1y^2)$ . NB:  $-1y$  vanwege  $-px^2$ .

Neem nu  $(-2y + p)$  en vermenigvuldig met  $(1y^2 - r)$ .

Dat geeft:  $-2y^3 + py^2 + 2ry - pr$ . En stel  $= \left(-\frac{q}{2}\right)^2$ .

Er volgt:  $-2y^3 + py^2 + 2ry - pr - \frac{1}{4}q^2 = 0$ .

[ii] Ofwel:  $1y^3 - \frac{p}{2}y^2 - ry + \left(\frac{p}{2}r + \frac{1}{8}q^2\right) = 0$ . (\*)

Dit is een type 11 vergelijking van graad 3. Noem  $y_1$  een oplossing hiervan.

Begin met  $(1x^2 - y_1)$  en kwadrateer:  $(1x^4 - 2y_1x^2 + y_1^2)$

Trek hier vanaf de startvergelijking: (\*\*)  $(1x^2 - y_1)^2 - V(x)$ .

Er resteert:  $(p - 2y_1)x^2 - qx + (y_1^2 - r)$ . [Discriminant = 0, zie (\*)]

[iii] En nu de wortel hiervan geeft:  $(\sqrt{p - 2y_1}x - \sqrt{y_1^2 - r})$ . En stel  $= 1x^2 - y_1$ .

Er volgt:  $1x^2 = x\sqrt{p - 2y_1} + (y_1 - \sqrt{y_1^2 - r})$  met bijvoorbeeld als oplossing  $x_1$ .

Dan geldt dus:  $\sqrt{(x_1^2 - y_1)^2 - V(x_1)} = x_1^2 - y_1$ . Zie (\*\*).

Dus ook:  $(x_1^2 - y_1)^2 - V(x_1) = (x_1^2 - y_1)^2$ .

Gevolg:  $V(x_1) = 0$ .

Een concreet voorbeeld:

[i]  $1x^4 - 37x^2 + 24x + 180 = 0$ .

[ii]  $1y^3 - 18\frac{1}{2}y^2 - 180y + 3402 = 0$ ,  $y_1 = 14$ . De andere oplossingen worden verder niet gebruikt.

[iii]  $\sqrt{9x^2 - 24x + 16} = 1x^2 - 14$ . Of:  $3x - 4 = 1x^2 - 14$ . Of:  $4 - 3x = 1x^2 - 14$ .

Een oplossing van  $1x^2 = 3x + 10$  is:  $x_1 = 5$ . [en  $x_2 = -2$ ].

Een oplossing van  $1x^2 + 3x = 18$  is:  $x_3 = 3$ . [en  $x_4 = -6$ ].

En inderdaad:  $V(5) = V(3) = 0$ . [en  $V(-2) = V(-6) = 0$ ].

Ook type 11 en verder wordt uitvoerig behandeld, terwijl met een substitutie de  $x^3$ -term kan worden weggewerkt, zodat een type 10 of lager op te lossen zou zijn. Brassier pakt echter de typen 11 en verder op soortgelijke wijze aan als de vorige hierboven behandelde typen.

Hij voegt nog een belangrijke nota toe, nu hertaald:

*Op te merken is dat bij de  $x^4$  vergelijkingen wel enige kunnen voorkomen die een ware waarde [1] als oplossing hebben maar dat die echter niet op voorgaande manier gevonden kan worden. Men kan geen simpel getal voor de wortel vinden [bedoeld is de manier met  $(1 \pm 1y)$ ] zodat (...) geen wortel getrokken kan worden [bedoeld is als bij [iii]].*

[1] Dat is een positief reëel getal.

En van zulke vergelijkingen volgen voorbeelden die hier nu niet besproken worden en in de meetkundige voorbeelden ook niet voorkomen.

## Voorbeelden in een niet-meetekundige context.

Een aantal voorbeelden om het gebruik van 'de onbekende' te illustreren.

**Voorbeeld 13.** Een leeuw, een wolf en een vos hebben samen een hert gevangen. De leeuw kan dit alleen opeten in 3 uur, de wolf in 4 uur en de vos in 6 uur. De vraag is in hoeveel tijd zij 'gelijkelijk te samen' dit hert zullen verscheuren en opeten. Stel voor de gezochte tijd  $1x$  uur.

Uren voor het hert

de leeuw in 3 uur 1 hert en dus in  $1x$  uur verorbert hij  $\frac{1}{3}x$  deel.

de wolf in 4 uur 1 hert en dus in  $1x$  uur verorbert hij  $\frac{1}{4}x$  deel.

de vos in 6 uur 1 hert en dus in  $1x$  uur verorbert hij  $\frac{1}{6}x$  deel.

Dus samen komt dat op  $\frac{3}{4}x = 1$  hert. Ofwel  $3x = 4$  en  $1x = 1\frac{1}{3}$  uur.

In een apart kolom ernaast wordt dan steeds met de concrete getallen alles nagelopen als 'proeve'.

**Vb 18.** Drie personen A B C hebben enige guldens. Als A en B samen 340 guldens hebben, B en C samen 384 guldens en A en C samen 356 guldens is de vraag, hoeveel ieder apart heeft.

Stel dat A heeft  $x$  gulden.

A B 340; A  $1x$ ; dan rest voor B:  $340 - 1x$ .

A C 356; A  $1x$ ; dan rest voor C:  $356 - 1x$ . Dus: B C samen:  $696 - 2x = 384$ .

Ofwel:  $2x = 312$  en dus A  $1x = 156$  guldens. Etc. voor B  $340 - 1x = 184$  en C  $356 - 1x = 200$ .

**Vb 22.** Enige kooplieden doen een weddenschap. Eenieder legt 10 maal zoveel guldens in als het aantal kooplieden is. Daarmee kunnen zij 20 op 100 winnen. Als nu alle winst wordt afgetrokken van alle inleg en uit de rest de derdemachtswortel trekt, dan geeft dat het aantal kooplieden.

De vraag is nu om hoeveel kooplieden het gaat.

Stel het aantal kooplieden op  $1x$ . Dan heeft eenieder ingelegd  $10x$ . In totaal dus  $10x^2$ .

Bij inleg 100 is de winst 20 dus bij inleg  $10x^2$  is de winst  $2x^2$ .

Dat geeft als rest:  $10x^2 - 2x^2 = 8x^2$ .

Er volgt:  $\sqrt[3]{8x^2} = 1x$ . Dus  $1x^3 = 8x^2$  en  $1x^2 = 8x$  en dus  $1x = 8$ .

**Vb 36.** Gezocht worden twee getallen waarvan het ene 3 meer is als het andere. Als nu het product van  $\frac{1}{3}$  van het grootste getal met  $\frac{1}{2}$  van het kleinste getal gedeeld wordt door 3, dan geeft dat het grootste getal.

Welke zijn die twee getallen?

Stel het grootste getal  $1x$ , dan is het kleinste getal  $1x - 3$ .

Er volgt:  $\frac{\frac{1}{3}x * (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})}{3} = \frac{\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x}{3} = \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{6}x = 1x$ . Dus:  $\frac{1}{18}x^2 = 1\frac{1}{6}x$  en  $1x^2 = 21x$ .

Dan is  $1x = 21$  het grootste en  $1x - 3 = 18$  het kleinste getal.

**Vb 58.** Iemand koopt 32 el lijnstof en een derde deel zou kosten 3 gulden. Hoeveel kost alles bij elkaar?

Stel dat hij  $1x$  gulden uitgeeft.

Voor  $1x$  gulden krijg je 32 el stof dus voor 3 gulden krijg je  $3 * \frac{32}{1x} = \frac{1}{3}x$ .

Dus:  $\frac{1}{3}x^2 = 96$ . Met  $1x^2 = 288$  volgt dan:  $1x = \sqrt{288}$ .

**Vb 79.** Enkele reders kopen gezamenlijk [vracht van] een schip. Eenieder betaalt 10 keer zoveel gulden als er reders zijn. Bij een eerste koopvracht winnen zij op 100 gulden  $\frac{1}{4}$  van het aantal reders. Zij beleggen deze winst weer en winnen weer op 100 gulden als hiervoor. De laatste winst is  $65\frac{67}{125}$  gulden.

Hoeveel reders zijn er?

Stel dat er  $1x$  reders zijn. Er wordt ingelegd  $10x^2$ .

De winst op 100 gulden is dus  $\frac{1}{4}x$  en bij  $10x^2$  wordt dat  $\frac{10x^2}{100} * \frac{x}{4} = \frac{x^3}{40}$ .

Dit wordt weer belegd en dat geeft  $\frac{x^3}{40*100} * \frac{x}{4} = \frac{x^4}{16000} = 65\frac{67}{125}$ .

Ofwel  $125x^4 = 131072000$ . Dus  $1x^4 = 1048576$ . En dus  $1x = 32$ , dat is het aantal reders.

(Er zou eerst een tussenstap kunnen zijn met  $1x^2 = \sqrt{1048576} = 1024$ .)

**Vb 63.** Personen A B C D hebben geld en wel zo dat tegen 8 gulden van A er 5 gulden van B zijn en zo dat tegen 7 gulden van B er 6 gulden van C en zodat tegen 4 gulden van C er 3 gulden van D zijn. Als nu het geld van A vermenigvuldigd wordt met het geld van B, dat van B met dat van C, dat van C met dat van D en dat van D met dat van A geeft dit samen 4945 gulden. Hoeveel heeft elk persoon?

(Omdat het over natuurlijke getallen gaat ziet Brasser de verhouding onderling zo:

$A : B : C : D = 112 : 70 : 60 : 45$ . Dan kloppen de afzonderlijke verhoudingen ook.)

Stel nu: A heeft  $112x$ , B heeft dan  $70x$ , C heeft dan  $60x$  en D heeft dan  $45x$ .

Dus:  $112x * 70x + 70x * 60x + 60x * 45x + 112x * 45x = 19780x^2 = 4945$ .

Ofwel:  $1x^2 = \frac{1}{4}$  en  $1x = \frac{1}{2}$ . Dus A heeft 56 gulden, B 35 gulden, C 60 gulden en D  $22\frac{1}{2}$  gulden.

Voorbeelden van de vergelijking  $x^2 + x = N$  binnen een (financiële) context.

**Vb 9.** Iemand zet 1024 gulden uit op interest. Hij ontvangt aan het einde van twee jaar de hoofdsom plus de winst op de rente in totaal 1156 gulden. Hoeveel is de interest in een jaar op 100?

Stel de winst op 100 in één jaar  $1x$ .

Na het eerste jaar: bij 100  $\rightarrow 100 + 1x$  dus bij 1024  $\rightarrow 1024 + 10\frac{6}{25}x$ . [=  $1024 * \left(\frac{100+x}{100}\right)$ ]

Na het tweede jaar:  $1024 + 10\frac{6}{25}x \rightarrow 1024 + 20\frac{12}{25}x + \frac{64}{625}x^2 = 1156$ . [=  $1024 * \left(\frac{100+x}{100}\right)^2$ ]

Dat geeft:  $64x^2 + 12800x = 82500$ . Ofwel:  $1x^2 + 200x = 1289\frac{1}{16}$ .  $1x = 6\frac{1}{4}$  op 100.

**Vb 21.** Iemand koopt een schip voor 1550 gulden en te betalen als volgt: de eerste dag 20 gulden, de tweede dag 22 gulden, de derde dag 24 gulden en zo voor elke volgende dag 2 gulden meer.

Hoeveel dagen moet hij betalen?

Stel het aantal dagen op  $1x$ .

Eerst het aantal dagen minus 1:  $1x - 1$ . De vergroting 2 geeft:  $2x - 2$ .

Voeg toe de eerste betaling keer 2 geeft:  $2x - 2 + 40 = 2x + 38$ .

Deel door 2 geeft en dan keer het aantal dagen:  $\frac{2x+38}{2} * x = 1550$ . Dat geeft  $1x = 31$  dagen.

#### Opmerking:

Hier wordt de som van een rekenkundige rij gebruikt:  $n$  termen (dagen), verschil  $v$  ('vergroting').

$$S = \frac{1}{2}n(t_1 + t_n) = \frac{1}{2}n(t_1 + t_1 + (n-1)v) = \frac{((n-1)v + 2t_1)}{2} * n.$$

Het deel 'van de regel quantitatis' gaat over de aanpak van problemen over hoeveelheden en grootheden waarbij meer variabelen nodig zijn. Daarvan volgen tientallen voorbeelden, hier weer een greep daaruit.

**Vb 1.** Twee gezellen A en B hebben samen een paard gekocht voor 90 gulden. A zou dit kunnen betalen samen met  $\frac{1}{2}$  van het geld van B. B zou dit kunnen betalen samen met  $\frac{1}{3}$  van het geld van A.

Hoeveel geld heeft elk?

Stel het geld van A op  $1x$  gulden en dat van B op  $1a$  gulden.

Dus er geldt:  $1x + \frac{1}{2}a = 90$ . Ofwel het geld van B is:  $1a = 180 - 2x$ .

Samen met  $\frac{1}{3}$  van A geeft dit:  $180 - \frac{1}{3}x = 90$ . Ofwel:  $\frac{2}{3}x = 90$ .

Dus A heeft  $1x = 54$  gulden en B heeft  $180 - 2x = 72$  gulden.

**Vb 13.** Een krijgsoverste wil een stad bestormen(!) Hij heeft soldaten van vier landen : Hongaren, Polen, Russen en Saksen. Om hen aan te moedigen heeft hij 13200 gulden, die hij als premie wil uitdelen als de stad overwonnen is, onder de volgende conditie: als de Hongaren het eerst in de stad komen, dan zullen die elk een rijksdaalder van  $2\frac{1}{2}$  gulden krijgen en zullen het resterende penningen onder de andere soldaten gelijkmatig verdeeld worden; als de Polen [...] elk 3 gulden [...]; als de Russen [...] elk 4 gulden [...]; als de Saksen [...] elk 5 gulden [...]. Na de inname van de stad zal voor de overige soldaten elk een gulden resten.

Hoeveel soldaten van elk land zijn er?

Stel het hele leger heeft  $1x$  soldaten,  $1a$  Hongaren,  $1b$  Polen,  $1c$  Russen,  $1d$  Saksen.

Als bij elke landsgroep van 13200 gulden wordt afgetrokken is de rest de som voor de andere drie.

$H$   $2\frac{1}{2}a$  rest:  $13200 - 2\frac{1}{2}a = 1x - 1a$ . Dus:  $H$   $1a = 8800 - \frac{2}{3}x$ .

$P$   $3b$  rest:  $13200 - 3b = 1x - 1b$ . Dus:  $P$   $1b = 6600 - \frac{1}{2}x$ .

$R$   $4c$  rest:  $13200 - 4c = 1x - 1c$ . Dus:  $R$   $1c = 4400 - \frac{1}{3}x$ .

$S$   $5d$  rest:  $13200 - 5d = 1x - 1d$ . Dus:  $S$   $1d = 3300 - \frac{1}{4}x$ .

Dus:  $HPRS$   $1x = 23100 - 1\frac{3}{4}x$ . En er volgt:  $1x = 8400$ .

En:  $H$   $1a = 3200$ ;  $P$   $1b = 2400$ ;  $R$   $1c = 1600$ ;  $S$   $1d = 1200$ .

**Vb 20.** Zoek twee getallen waarvan de kwadraten samen 4880 zijn en bij vermenigvuldiging van dezelfde getallen men 1792 krijgt.

Stel het ene getal  $1x$ , het andere  $1a$ .

Getallen  $1x \rightarrow 1x^2$  en  $1a \rightarrow 1aa$ . [NB: geen pijl maar er staat een vierkantje  $\square$ .]

Som  $1x^2 + 1aa = 4880$ . Ofwel  $1aa = 4880 - 1x^2$  en (dus)  $1a = \sqrt{4880 - 1x^2}$  voor het ene getal.

Dit vermenigvuldigd met het andere getal geeft  $\sqrt{4880x^2 - 1x^4} = 1792$ .

Vermenigvuldig beide delen met zichzelf en er komt  $4880x^2 - 1x^4 = 3211264$ .

Ofwel  $1x^4 + 3211264 = 4880x^2$ . Dat geeft  $1x^2 = 4096$  of 784.

En zo  $1x = 64$  voor het ene getal en 28 voor het andere.

**Vb 32.** Gegeven is een rekenkundige rij (progressie) van drie getallen I K L. Vermenigvuldiging van I met K geeft 90 en L met I geeft 120. Wat zijn die getallen?

Stel:  $I$   $1x - 1a$ ;  $K$   $1x$ ;  $L$   $1x + 1a$ .

En I maal K geeft:  $1x^2 - 1xa = 90$ . En dan  $1a = 1x - \frac{90}{1x}$ .

Dus:  $I$   $1x - 1a = \frac{90}{1x}$ ;  $L$   $1x + 1a = 2x - \frac{90}{1x}$ . En I maal L geeft:  $180 - \frac{8100}{1x^2} = 120$ .

Ofwel:  $120x^2 = 180x^2 - 8100$ ;  $60x^2 = 8100$ ;  $1x^2 = 135$ .

Dus:  $K$   $1x = \sqrt{135}$ ;  $I$   $\frac{90}{1x} = \sqrt{60}$ ;  $L$   $2x - \frac{90}{1x} = \sqrt{240}$ .

Voorbeelden met vergelijkingen van de **derdegraad** en de **vierdegraad**.

**Vb1.** Van twee getallen is gegeven: hun verschil is 6, het verschil van hun derdemachten vermenigvuldigd met hun som geeft 49104. Wat zijn die getallen?

Stel het ene getal  $1x + 3$ , het andere  $1x - 3$ .

Dan volgt:  $(1x + 3)^3 = (1x + 3)(1x^2 + 6x + 9) = 1x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ .

En:  $(1x - 3)^3 = 1x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ .

Hun verschil maal  $(1x + 3 + 1x - 3) = 2x$  geeft:  $(18x^2 + 54) * 2x = 36x^3 + 108x = 49104$ .

Ofwel  $36x^3 + 108x - 49104 = 0$  ofwel  $1x^3 + 3x - 1364 = 0$ .

Brasser schrijft dat dit zijn eerste 'voorval' (type) is en dat dit op te lossen is met een formule van Cardano (1570). Is dat hier gedaan? Er komen géén mooie wortelwaarden.

$$x^3 + px = q. \text{ Dan } x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}.$$

Dat geeft:  $1x = 11$ . De getallen zijn dus 14 en 8.

**Vb 82.** Er is een stuk land, driemaal zolang als het breed is. Men betaalt voor 100 vierkante roeden [een oppervlaktemaat én een lengtemaat] zoveel guldens als een vierkant met deze breedte. Als het land nu  $1518\frac{3}{4}$  gulden kost, dan is de vraag wat de lengte en de breedte is.

Stel de lengte op  $3x$  en de breedte op  $1x$ .

Dan is de oppervlakte  $3x^2$ .

Voor 100 roeden wordt betaald  $1x^2$  gulden.

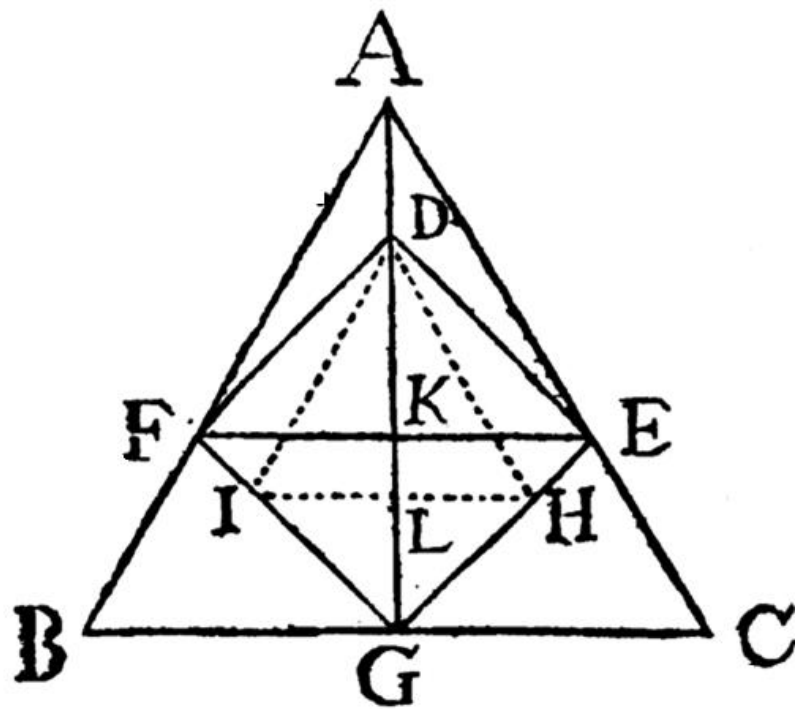
Dus voor  $3x^2$  roeden wordt betaald:  $\frac{3x^2}{100} * 1x^2 = 1518\frac{3}{4}$ .

Ofwel:  $3x^4 = 151875$ .

Dus:  $1x^4 = 50625$ .

Dus de breedte  $1x = 15$  roeden en de lengte  $3x = 45$  roeden.

# Geometria van Nicolaus Petri

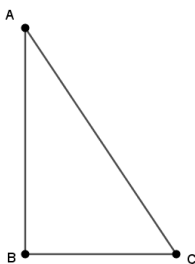


## Rechthoekige driehoeken en lengtes <sup>2</sup>

Om te toonen hoe men in de Geometria de Algebre ofte Regel Cos kan gebruycken zullen wij hier de Geometria van Nicolaus Petri Daventriensis laten volgen en des selters voorstellen een groot deel door Algebre ontbinden, daar bij voegende eenige andere questien van de selve stoffe, vertrouwende dat sulcks den leerling nu ende dienstigh sal wesen, bijzonder voor de gene die haer op veele demonstratien die haer wat duyster schijnen, niet wel en verstaen, kunnen nochtans door eenige van de gemeenste veel sonderlinge questien in de Geometria ontbonden werden.

Hierna volgen hertaalde en soms aanpaste teksten i.v.m. de leesbaarheid.

**[Voorbeeld] 1.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ , rechthoekig ('*winckelrecht*') in B. Voor de hoogtelijn  $AB$  en de basis  $BC$  geldt:  $|AB| = 12$ ,  $|BC| = 9$ . Gevraagd is de grootte van hypotenusa  $AC$ .



Volgens propositie 47 van het eerste [boek van] Euclides<sup>3</sup> zijn de kwadraten van  $AB$  en  $BC$  gelijk aan het kwadraat van  $AC$ .

$$\square AB \ 144. [1]$$

$$\square BC \ 81.$$

----- +

$$\square AC \ 225.$$

Hieruit de wortel geeft:  $|AC| = 15$ .

[1] Met  $\square XY$  wordt bedoeld het kwadraat  $|XY|^2$ , de oppervlakte van het vierkant met zijde  $XY$ .

**Vb 2.** Idem, als men het kwadraat van  $|BC|$  dus 81 aftrekt van het kwadraat van  $|AC|$  ofwel 225, dan resteert 144, en hier van de wortel geeft:  $|AB| = 12$ .

**Vb 3.** Idem, als men het kwadraat van  $|AB|$  dus 144 aftrekt van het kwadraat van  $|AC|$  ofwel 225, dan resteert 81, en hier van de wortel geeft:  $|BC| = 9$ .

**Vb 4.** Om de oppervlakte ('*inhout*') van de vorige driehoek te vinden, sommeer dan  $|AB|$ ,  $|BC|$  en  $|AC|$ . Dat geeft 36. Van de helft, 18, trekt men elke zijde af en er resteert 6, 9, 3.

Vermenigvuldig deze getallen, dat geeft 162, en dit getal weer met 18, de halve lengte van de drie zijden. Dat geeft 2926 en de wortel hieruit geeft 54. Dat is de oppervlakte van de driehoek ABC.

Deze manier [van aanpak] is algemeen voor alle 'rechtzijdige' driehoeken, of die nu recht-, scherp- of stomphoekig ('*plomphoekig*') zijn.

### Opmerking:

Hier is de formule van Heron gebruikt:  $Opp = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ . Met  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ .

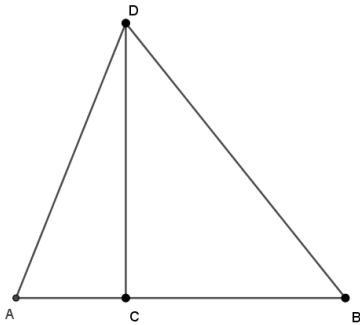
**Vb 5.** Deze driehoek [als boven] heeft een rechte hoek in B. Vermenigvuldig nu  $\frac{1}{2}|AB| = 6$  met  $|BC| = 9$  ofwel  $\frac{1}{2}|BC| = 4\frac{1}{2}$  met  $|AB| = 12$  en er volgt voor de oppervlakte 54, net als hiervoor.

<sup>2</sup> In indeling in paragrafen is van de schrijver dezes en gebeurt niet in de tekst van Brasser.

<sup>3</sup> Zie voor de Elementen van Euclides de digitale, makkelijk doorzoekbare, site

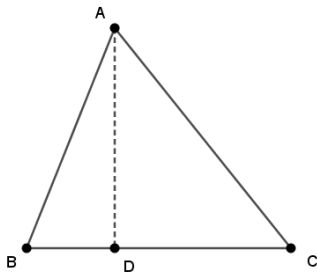
<https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>

**Vb 6.** Gegeven is een driehoek  $ABD$  met  $|AB| = 140$ ,  $|BD| = 150$  en  $|AD| = 130$ .<sup>4</sup> Gevraagd is  $|AC|$ ,  $|BC|$  en  $|CD|$  waarbij  $CD$  een hoogtelijn is. Gevraagd is ook de oppervlakte van de driehoek.



Stel:  $|AC| = 1x$ . Dan volgt:  $|BC| = 140 - 1x$ .  
 $\square AD$  16900  
 $\square AC$   $1x^2$   
 Er rest:  $\square CD = 16900 - 1x^2$ .  
 $\square BD$  22500  
 $\square BC$   $19600 - 280x + 1x^2$   
 Er rest:  $\square CD = 2900 + 280x - 1x^2 = 16900 - 1x^2$ .  
 Ofwel:  $280x = 14000$ . [In de tekst staat foutief 1400].  
 Dus:  $1x = 50$  voor  $|AC|$ .  
 Er volgt:  $|BC| = 140 - 1x = 90$ .  
 $\square CD = 16900 - 1x^2 = 14400$ . Dus:  $|CD| = 120$ .  
 De oppervlakte van  $\triangle ABD$ :  $\frac{1}{2}|CD| * |AB| = 8400$ .

**Vb 7.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ . Basis  $|BC| = 14$ , loodlijn ('perpendicular')  $|AD| = 12$  en  $|AB| + |AC| = 28$ . Gevraagd:  $|AB|$ ,  $|AC|$ .



Stel  $|AB| = 1x$ ,  
 dan volgt  $|AC| = 28 - 1x$ .  
 $\square AB$   $1x^2$   
 $\square AD$  144  
 ----- +  
 $\square BD$   $1x^2 - 144$ .  
 $|BD| = \sqrt{1x^2 - 144}$ .  
 $|BC| = 14$ .  
 $|CD| = |BC| - |BD| = \rightarrow$

$14 - \sqrt{1x^2 - 144}$ . [1]  
 $\square CD$   $1x^2 + 52 - \sqrt{784x^2 - 112896}$ .  
 $\square AD$  144.  
 ----- +  
 $\square AC$  is nu bekend (\*).

Vervolg:

$$\square AC: (28 - 1x)^2 = 784 - 56x + 1x^2 = (*) 1x^2 + 196 - \sqrt{784x^2 - 112896}$$

Ofwel:  $588 - 56x = \sqrt{784x^2 - 112896}$ . Kwadrateer nu beide delen...

$$345744 - 65856x + 3136x^2 = 784x^2 - 112896$$

$$2352x^2 + 458640 = 65856x$$

$$1x^2 + 195 = 28x$$
 [2]

Dat geeft  $1x = 13$  dus:  $|AB| = 13$ ,  $|AC| = 15$ .

[1] In de tekst staat  $v\sqrt{1x^2 - 144}$ . Dit betekent dat de wortel over het geheel navolgende gaat.  $v\sqrt{\quad}$ . Staat voor 'universael radix'.

[2] De oplossing gaat als volgt en is eerder meetkundig aangetoond.

Vanuit  $1x^2 + N = px$  wordt dat  $\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - N$ .

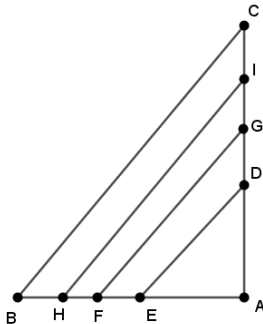
Er is geen oplossing als  $N > \left(\frac{p}{2}\right)^2$ . Dit is een referentie naar de discriminant!

Er volgt dan hierboven:  $(14 - x)^2 = 196 - 195 = 1$  dus  $14 - x = 1$ . Enkel de positieve waarde.

<sup>4</sup> Een driehoek met zijden  $(a, b, c) = (13, 14, 15)$  of veelvouden hiervan zal vaak voorbij komen. Voordeel: omtrek (42), oppervlakte (84) en hoogtelijn op zijde  $b$  (12) zijn geheel.

**Vb 8.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ , rechthoekig in  $A$ .  $|AC| = 36$ ,  $|AB| = 32$ . De driehoek wil men verdelen in vier delen zodat de oppervlakte van elk deel gelijk is aan elkaar en zodat de deellijnen ('scheydtlijnen') evenwijdig lopen aan de hypotenusa  $BC$ .

Gevraagd wordt waar de snijpunten met de zijden  $AB$  en  $BC$  liggen.



Er geldt:  $|AB| : |AC| = 8 : 9$ .

Daarom stellen we

$$|AE| = 1x; |AD| = 1\frac{1}{8}x,$$

Daarna  $|AF| = 1x; |AG| = 1\frac{1}{8}x$ ,

Tenslotte  $|AH| = 1x; |AI| = 1\frac{1}{8}x$ .

Oppervlakte  $\Delta ABC = |AC| * \frac{1}{2} |AB| = 36 * 16 = 576$ .

Dus  $opp(\Delta AED) = 144$ ;  $opp(\Delta AFG) = 288$ ;  $opp(\Delta AHI) = 432$ .

Vervolg:

$$opp(\Delta AED) = |AD| * \frac{1}{2} |AE| = \frac{9}{16} x^2 = 144.$$

dus:  $9x^2 = 2304$ ;  $1x^2 = 256$ ;  $|AE| = 1x = 16$  en  $|AD| = 1\frac{1}{8}x = 18$ .

$$opp(\Delta AFG) = |AG| * \frac{1}{2} |AF| = 1\frac{1}{8}x * \frac{1}{2} x = \frac{9}{16} x^2 = 288.$$

dus:  $9x^2 = 4608$ ;  $1x^2 = 512$ ;  $|AF| = 1x = \sqrt{512}$ ;  $|AG| = 1\frac{1}{8}x = \sqrt{648}$ . [1]

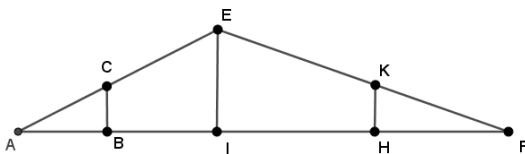
$$opp(\Delta AHI) = |AI| * \frac{1}{2} |AH| = 1\frac{1}{8}x * \frac{1}{2} x = \frac{9}{16} x^2 = 432.$$

dus:  $9x^2 = 6912$ ;  $1x^2 = 768$ ;  $|AH| = 1x = \sqrt{768}$ ;  $|AI| = 1\frac{1}{8}x = \sqrt{972}$ .

[1] Zo een wortel wordt niet verder uitgewerkt. Dus nergens staat zoiets als  $\sqrt{512} = 16\sqrt{2}$ .

**Vb 9.** Gegeven is een driehoek  $AEF$ . Basis  $|AF| = 32$ ,  $|FH| = 9$ , loodlijn  $|HK| = 4$ .

Verder  $|AB| = 5$ , loodlijn  $|BC| = 2\frac{14}{23}$ . Dus  $|BH| = 8$ . Gevraagd: oppervlakte  $\Delta AEF$ .



Volgens propositie 4 van [boek] 6 van Euclides geldt:

$$|IE| : |AI| = |BC| : |AB|. (*) [1]$$

$$\text{En: } |IE| : |IF| = |KH| : |HF|. (**)$$

Stel nu  $|AI| = 1x$ , dan volgt  $|IF| = 32 - 1x$ .

Vervolg: Bij (\*)  $|IE| : 1x = 2\frac{14}{23} : 5$  dus:  $|IE| = \frac{12}{23}x$ .

Bij (\*\*)  $|IE| : (32 - 1x) = 4 : 9$  dus:  $|IE| = \frac{128-4x}{9} = \frac{12}{23}x$ .

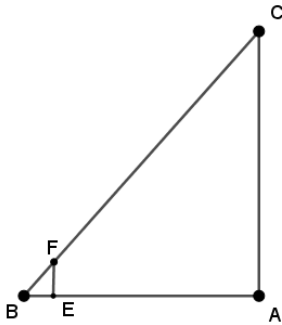
De delen onder een noemer gebracht geeft:  $108x = 2944 - 92x$ . Ofwel:  $200x = 2944$ .

Dus:  $|AI| = 1x = 14\frac{18}{25}$ ,  $|IF| = 32 - 1x = 17\frac{7}{25}$ , loodlijn  $|EI| = \frac{12}{23}x = 7\frac{17}{25}$ .

$$Opp(\Delta AEF) = \frac{1}{2} |AF| * |EI| = 122\frac{22}{25}.$$

[1] Blijkbaar  $EI \perp AF$ . Dat staat niet in de gegevens maar suggereert de figuur wel.

**Vb 10.** Gegeven is een driehoek  $ABC$  met  $|AC| = 36$  en  $|AB| = 32$ . Wat is de lengte van loodlijn  $EF$  als geldt dat  $opp(\triangle BEF) = 9$ ?



Er volgt:  $|AB| : |AC| = 1 : 1\frac{1}{8}$ . [1]

Stel nu  $|BE| = 1x$  dan volgt:  $|EF| = 1\frac{1}{8}x$ .

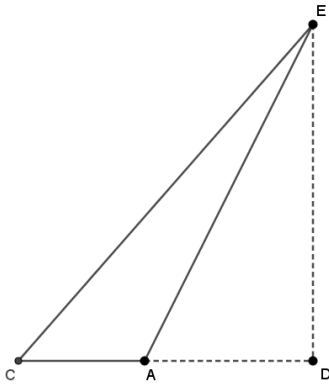
Dus voor de oppervlakte  $\triangle BEF$  volgt:  $\frac{9}{16}x^2 = 9$ .

Ofwel  $9x^2 = 144$ ;  $1x^2 = 16$ .

Dus:  $|BE| = 1x = 4$  en  $|EF| = 4\frac{1}{2}$ .

[1]  $AC \perp AB$ . Dat is niet gegeven maar wel nodig!

**Vb 11.** Gegeven is een driehoek  $AEC$  met  $|AE| = 13$ ,  $|AC| = 4$  en  $|EC| = 15$ . De vraag is met hoeveel de lijn  $AC$  verlengd moet worden opdat die loodlijn  $ED$  snijdt.



[Feitelijk is de vraag:  $|AD| = ?$ ]

Stel  $|AD| = 1x$ . Dan volgt:  $|CD| = 1x + 4$ .

□  $AE$  169.

□  $AD$   $1x^2$ .

----- -

□  $DE$   $169 - 1x^2$ ;  $|DE| = \sqrt{169 - 1x^2}$ .

□  $CD$   $1x^2 + 8x + 16$ .

□  $DE$   $169 - 1x^2$ .

----- +

□  $CE$   $8x + 185 = 225$ .

Ofwel:  $8x = 40$  dus  $|AD| = 1x = 5$  en  $|ED| = \sqrt{169 - 1x^2} = 12$ .

**Anders:**

Volgens propositie 12 van [boek 2 van] Euclides geldt:  $|AC|^2 + |AE|^2 = 16 + 169 = 185$ .

En dan:  $|CE|^2 - 185 = 40$ . En dan volgt:  $|AD| = \frac{1}{2} * 40 / |AC| = 5$ . [1] Als hierboven.

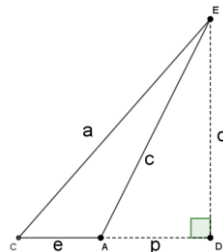
[1] Uitleg modern genoteerd: zie de figuur hiernaast.

$$a^2 = (e + p)^2 + q^2 = e^2 + 2pe + p^2 + q^2.$$

$$c^2 = p^2 + q^2.$$

$$\text{Er volgt: } a^2 = e^2 + 2pe + c^2.$$

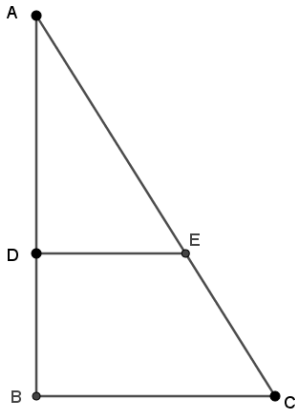
$$\text{Dus: } p = \frac{a^2 - (c^2 + e^2)}{2e}.$$



**Vb 12.** De lengte van een rechthoek is gemeten: 95 roeden. De oppervlakte is 35 roeden. Wat is de breedte?

Stel de breedte  $1x$ . Dat geeft:  $95x = 35$ . Dus de breedte is  $1x = \frac{7}{19}$

**Vb 13.** Gegeven is een driehoek met  $|AB| = 12$  roeden en  $|BC| = 9$  roeden, rechthoekig in B. Daarvan moet [een stuk oppervlakte] worden afgemeten van 20 roeden en wel zo dat  $DE$  evenwijdig is aan basis  $BC$ . Gevraagd:  $|AD|, |DE|$ .



Er geldt:  $|AB| : |BC| = 1\frac{1}{3} : 1$ .

Zo verhouden  $|AD|$  en  $|DE|$  zich ook.

Daarom, stel  $|DE| = 1x$ , dan volgt:  $|AD| = 1\frac{1}{3}x$ .

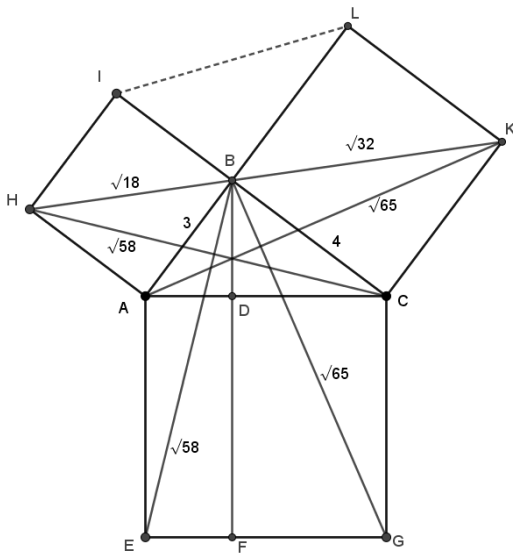
Dus:  $opp(\triangle ADE) = \frac{1}{2}|DE| * |AD| = \frac{2}{3}x^2 = 20$  roeden.

Ofwel:  $2x^2 = 60; 1x^2 = 30$ .

Dus:  $|DE| = 1x = \sqrt{30}$  roeden

en  $|AD| = 1\frac{1}{3}x = \sqrt{53\frac{1}{3}}$  roeden.

**Vb 14.** Gegeven is driehoek  $ABC$ , rechthoekig in B. Op de zijden zijn vierkanten gezet.  $|AB| = 3, |BC| = 4$ . [1][2]



$opp(ACGE) = opp(ABIH) + opp(BCKL)$ .

$|AC|^2 = 25 = |AB|^2 + |BC|^2$ . [3]

$|IB| * |BC| = |AB| * |BL|$ . [4]

$opp(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|AB| * |BC| = 6$ .

Gevolg:  $|BD| * \frac{1}{2}|AC| = 6$ . Dus:  $|BD| = 2\frac{2}{5}$ . [5]

Dus:  $|BF| = 7\frac{2}{5}$ .

Er geldt ook:  $|IL| = |AC|$ .

De lijn  $HK$  gaat door  $B$ .

Er geldt nu:  $|HB|^2 + |BK|^2 = 50 = 2 * |AC|^2$

En ook:  $|HI|^2 + |IC|^2 = 58$ . Dus:  $|HC| = \sqrt{58}$ .

Verder:  $|KL|^2 + |AL|^2 = 65$ . Dus:  $|AK| = \sqrt{65}$ .

Er geldt:  $|AD| = 1\frac{4}{5}$  [6] en  $|CD| = 3\frac{1}{5}$ .

En er volgt:  $|BE| = \sqrt{58}$  en  $|BG| = \sqrt{65}$ . [7]

[1] Nu staan voor het eerst getallen bij lijnstukken in een figuur.

[2] Er volgt geen vraag maar uit het verhaal blijkt, dat lengtes van diverse lijnstukken te bepalen zijn.

[3] Dit volgt uit de stelling van Pythagoras, die apart nog even genoemd is.

[4] Onduidelijk waarom dit wordt gemeld.

[5] Blijkbaar  $BD \perp AC$ .

[6] Hier wordt verwezen naar voorbeeld 6:  $|AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2$ .

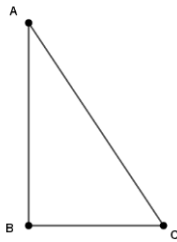
[7] Hier wordt verwezen naar voorbeeld 1 (Pythagoras). ( $|EF| = |AD|$ ).

Overigens volgt de lengte van  $BE$  en  $BG$  ook zo:  $D_{A,-90^\circ}(HC) = BE$  en  $D_{C,90^\circ}(AK) = BG$ .

En dus ook, maar nu niet vermeld:  $HC \perp BE$  en  $AK \perp BG$ .

**Vb 15.** Gegeven is een toren  $AB$  waar omheen een gracht is gegraven van 45 voet breed. Van het vlak ('horisont')  $BC$  tot het hoogste venster  $A$  is 60 voet.

Hoe lang moet de ladder zijn om tot het venster van de toren te kunnen klimmen?



Uit het verhaal blijkt dat de gracht hier  $BC$  is en  $AB \perp BC$ .

Uit het gegeven volgt:  $|AB| = 60$ .

Er volgt:  $|AC| = 75 (= \sqrt{45^2 + 60^2})$

**Vb 16.** Zie vorige figuur. Als nu de toren 60 voet hoog is en de ladder tegen de toren 75 voet lang is, dan is de vraag hoever de voet van de ladder staat van de voet ('grondt') van de toren.

$|BC| = 45$ .

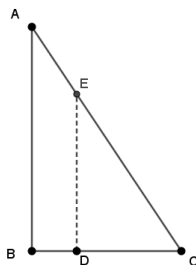
**Vb 17.** Zie vorige figuur. Als nu tegen een toren een ladder staat met lengte 75 voet over een gracht die 45 voet breed is, dan is de vraag hoe hoog de toren is.

$|AB| = 60$ .

**Vb 18.** Gegeven is een toren van 60 voet hoog waartegen een ladder staat van 75 voet lang.

De afstand van [de voet van] de ladder tot de toren is 45 voet.

Hoe hoog moet men klimmen opdat men 30 voet over de gracht is gegaan?



De toren is  $AB$ ,  $AB \perp BC$ ,  $DE \perp CD$  en  $|BC| = 45$ .  
Gevraagd is  $|CE|$  als  $|CD| = 30$ .

Er geldt:  $|BC| : |AC| = |CD| : |CE|$ .

Dus:  $45 : 75 = 30 : |CE|$ .

$|CE| = 50$ .

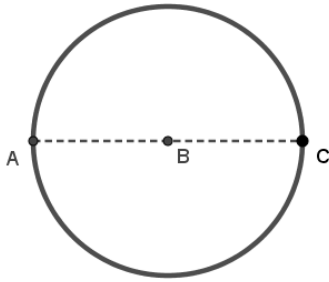
De ladder moet dus 50 voet zijn beklommen.

**Vb 19.** Zie vorige figuur. Als men nu 50 voet op de ladder heeft geklommen, hoe hoog is men dan boven de basis? Gevraagd is dus  $|DE|$ .

Er geldt:  $75 : 60 = 50 : 40$ . Dus  $|DE| = 40$  voet hoog.

## Cirkels en regelmatige veelhoeken

**Vb 20.** Gegeven is een cirkel. Het middelste (!) punt heet het centrum en de lijn daardoor tot de omtrek heet de diameter. Volgens 'de inventie' van Archimedes is de verhouding diameter tot de omtrek 7 staat tot 22. [1] En het product van de helft van de omtrek en de helft van de diameter is de oppervlakte van de cirkel. Neem nu als diameter 14. Wat is de oppervlakte?



Er volgt:

$$7 : 22 = 14 : \text{omtrek}.$$

Dus:  $\text{omtrek} = 44$ .

En dus:

$$\text{opp}(\text{cirkel}) = \frac{44}{2} * \frac{14}{2} = 154.$$

[1] Archimedes stelt juist dat dit een benadering is en zeker niet de bedoelde verhouding.  $\frac{22}{7} = 3,1428 \dots$ ;  $\pi = 3,1415 \dots$

**Vb 21.** Een cirkel heeft omtrek 44. Wat is zijn diameter?

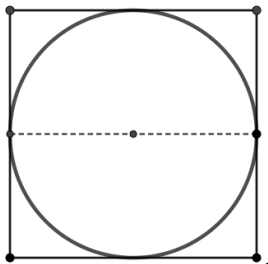
Er geldt:  $22 : 7 = 44 : \text{diameter}$ . Dus de diameter is 14.

**Vb 22.** Een cirkel heeft oppervlakte 154. Wat zijn de diameter en de omtrek van deze cirkel?

Stel de diameter is  $1x$ . De omtrek is dan  $3\frac{1}{7}x$ . Oppervlakte =  $3\frac{1}{7}x * \frac{1}{2} * \frac{x}{2} = \frac{11}{14}x^2 = 154$ .

Dus:  $11x^2 = 2156$ ;  $1x^2 = 196$ ;  $1x = 14$ . Dat is de diameter. Omtrek =  $3\frac{1}{7}x = 44$ .

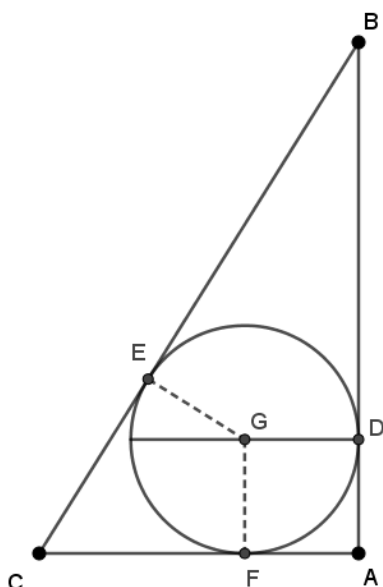
**Vb 23.** De cirkel heeft een diameter 14. Volgens voorgaande [voorbeelden] is de oppervlakte dan 154. Wat is de oppervlakte van het vierkant met alle zijden even lang als de diameter van deze cirkel?



$$\text{Oppervlakte} = \text{zijde} * \text{zijde} = 14^2 = 196.$$

**Vb 24.** Een lijnstuk van lengte 31 is gegeven. Daarvan wil men een driehoek maken, zie de figuur, rechthoekig in  $A$ , met daarbinnen een cirkel met diameter 5. En wel zodanig dat vanaf de hoekpunten tot de raakpunten [de lijnstukken] gelijk zijn, dus  $|CE| = |CF|$  en  $|BE| = |BD|$  en  $|AF| = |AD|$ . [1] Hoe groot zijn de zijden van die driehoek?

[1] De gevraagde cirkel is dus de ingeschreven cirkel van de driehoek.



Vierhoek  $FGDA$  is rechthoekig [een vierkant] dus

$$|AF| = |AD| = |DG| = 2\frac{1}{2}.$$

Stel  $|CF| = |CE| = 1x$ .

Dan volgt:  $|BE| = |BD| = 13 - 1x$  want de drie zijden van de driehoek zijn samen 31. [2]

Nu volgt:

$$|AB| = |BD| + |DA| = 15\frac{1}{2} - 1x.$$

$$|AC| = |CF| + |AF| = 2\frac{1}{2} + 1x.$$

$$|BC| = |BE| + |CE| = 13.$$

$$\text{En met } ^5) \quad |BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2.$$

Volgt:

$$169 = \left(6\frac{1}{4} + 5x + 1x^2\right) + \left(240\frac{1}{4} - 31x + 1x^2\right).$$

$$1x^2 + 38\frac{3}{4} = 13x.$$

$$\text{Dus: } 1x = 6\frac{1}{2} + \sqrt{3\frac{1}{2}} \text{ of } 6\frac{1}{2} - \sqrt{3\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Gevolg: } |AB| = 15\frac{1}{2} - 1x = 9 + \sqrt{3\frac{1}{2}}. [3]$$

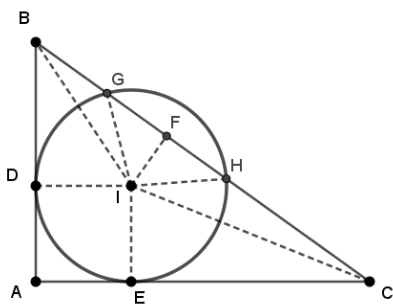
$$\text{En: } |AC| = 2\frac{1}{2} + 1x = 9 - \sqrt{3\frac{1}{2}}.$$

[2] Dit staat zonder uitleg. Noem  $|BC| = p$ . Er volgt:  $|BE| = p - x = |BD|$ .

Dus:  $p + \left(x + 2\frac{1}{2}\right) + \left(p - x + 2\frac{1}{2}\right) = 31$ . Gevolg:  $2p = 26$ ;  $p = 13$ .

[3] In de figuur geldt dat  $|AB| > |AC|$  en daarbij past deze keuze voor  $x$ .

**Vb 25.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ , rechthoekig in  $A$ .  $|AB| = 27$ ,  $|AC| = 36$  en er volgt [met Pythagoras] dat  $|BC| = 45$ . Een cirkel met diameter 24 raakt zijde  $AB$  in  $D$  en  $AC$  in  $E$ . De hypotenusa wordt gesneden [in de punten  $G$  en  $H$ .] Gevraagd:  $|GH|$ .



Er volgt:  $|AD| = |AE| = \frac{1}{2} \text{ diameter} = 12$ .

Dus:  $|BD| = 15$ ,  $|EC| = 24$ .

[ $IF \perp BC$ ] Stel:  $|IF| = 1x$ .

Er volgt:  $|BF|^2 = |BI|^2 - |IF|^2 = |DI|^2 + |BD|^2 - |IF|^2$ .

$$\text{Dus: } |BF| = \sqrt{144 + 225 - 1x^2}.$$

$$\text{En: } |CF|^2 = |IC|^2 - |IF|^2 = |IE|^2 + |EC|^2 - |IF|^2.$$

$$\text{Dus: } |CF| = \sqrt{144 + 576 - 1x^2}.$$

$$\text{Vervolg: } |BC| = |BF| + |CF| = 45 = \sqrt{369 - 1x^2} + \sqrt{720 - 1x^2}.$$

$$\text{Na kwadrateren volgt: } 936 + 2x^2 = \sqrt{1062720 - 4356x^2 + 1x^4}.$$

$$\text{En nogmaals geeft: } 8100x^2 = 186624; 1x^2 = 23\frac{1}{25} \text{ en } |IF| = 1x = \sqrt{23\frac{1}{25}} [= 4\frac{4}{5}].$$

$$\text{En [verkort]: } |GH| = |GF| + |FH| = 2 * \sqrt{144 - 23\frac{1}{25}} = 2 * \sqrt{120\frac{24}{25}} = \sqrt{483\frac{23}{25}}.$$

NB: Dit alles is handmatig uitgewerkt!

<sup>5</sup> □  $XY$  wordt vanaf nu meteen als  $|XY|^2$  genoteerd door schrijver dezes.

**Opmerking:**

Met gebruik van coördinaten is  $|IF|$  sneller te vinden.

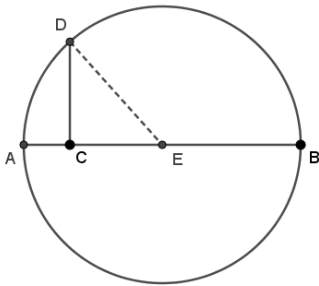
Met  $A(0,0), B(0,17), C(36,0), I(12,12)$  zou volgen: vergelijking lijn  $BC: 3x + 4y - 108 = 0$ . En dan:

$$|IF| = d(I, BC) = \frac{|3 \cdot 12 + 4 \cdot 12 - 108|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{24}{5} = 4 \frac{4}{5}$$

Het is nu niet nodig iets onbekend te stellen. Analytische meetkunde ontwikkelt zich vanaf de 17<sup>e</sup> eeuw snel maar het gebruik van coördinaten zoals hier bedoeld gebeurt pas veel later.

**Vb 26.** Een cirkel heeft diameter  $|AB| = 10$ . Voor de middelevenredige  $CD$  geldt:  $|CD| = 4$ . [1]

Gevraagd:  $|AC|, |BC|$ .



Stel  $|AC| = 1x$ . Dan volgt:  $|BC| = 10 - 1x$ .

En er volgt:

$$|CD|^2 = 16 = 1x \cdot (10 - 1x).$$

$$\text{Dus: } 1x^2 + 16 = 10x; |AC| = 1x = 2; |BC| = 10 - 1x = 8.$$

[In de tekst een zetfout:  $|CD|$  i.p.v.  $|BC|$ .]

**Anders:**  $|DE|^2 - |CD|^2 = |CE|^2 = 25 - 16 = 9; |CE| = 3$ .

En dan:  $|AC| = |AE| - |CE| = 2; |BC| = |BE| + |CE| = 8$ . [In de tekst staat:  $|AE| + |CE|$ ]

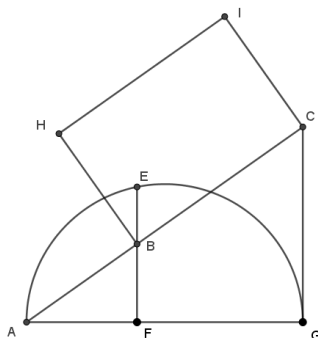
[1] Middelevenredige  $m$  van  $a$  en  $b$  is gedefinieerd als volgt  $a : m = m : b$ ; dus  $m = \sqrt{a \cdot b}$ .

In de figuur  $DC \perp AB$  en dan geldt inderdaad  $|AC| : |CD| = |CD| : |BC|$ .

**Vb 27.** Gegeven is een halve cirkel met diameter  $|AG| = 10 \frac{1}{4}$ . Waarbij  $|AF| = 4$  en  $|FG| = 6 \frac{1}{4}$ .

Rechthoek ('quadrangel')  $BHIC$  ligt zodanig dat  $|AB| = |FE| = |HB|$ .

Gevraagd:  $opp(BHIC)$  en de lengte van de andere lijnstukken.



$$|EF| = \sqrt{|AF| \cdot |FG|} = \sqrt{25} = 5 \quad [= |AB| = |HB|].$$

$$|BF| = \sqrt{|AB|^2 - |AF|^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

$$|EB| = |EF| - |BF| = 2.$$

$\Delta ACG$  is gelijkvormig met  $\Delta ABF$ . Zie [1].

Er volgt:  $|AF| : |BF| = 4 : 3 = |AG| : |CG|$  met  $|AG| = 10 \frac{1}{4}$ .

$$\text{Dus: } |CG| = \frac{3}{4} \cdot 10 \frac{1}{4} = 7 \frac{11}{16}$$

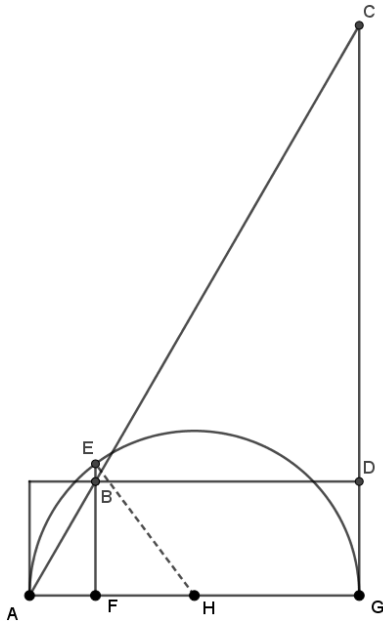
$$\text{en ook: } |AF| : |AB| = 4 : 5 = |AG| : |AC|.$$

Dus:  $|AC| = \frac{5}{4} \cdot 10 \frac{1}{4} = 12 \frac{13}{16}$ . En dan:  $|BC| = |AC| - |AB| = 7 \frac{13}{16}$ .

Gevolg:  $opp(BHIC) = |BC| \cdot |BH| = 39 \frac{1}{16}$ .

[1] Niet gegeven maar er geldt:  $EF \perp AG$ .

**Vb 28.** Gegeven zijn drie lijnstukken  $AF$ ,  $FE$  en  $FG$ , samen 14, die 'in continue proportione' staan. (\*) Er geldt:  $|AF| * |FE| * |FG| = 64$  en  $|AB| = |FE|$ . [En  $CG \perp AG$ ,  $EF \perp AG$ ,  $BD \perp CG$ . (\*\*)]  
Gevraagd:  $opp(\triangle BCD)$  en de lengte van alle lijnstukken.



(\*) betekent:  $|AF| : |FE| = |FE| : |FG|$  [middelevenredig].

Dus:  $|FE|^2 = |AF| * |FG|$ .

En dan volgt:  $|FE|^2 * |FE| = 64$ ;  $|EF| = 4 = |AB|$ .

$|AG| = |AF| + |FG| = 14 - |EF| = 10$ .

En verder:

$|AH| = |HG| = |EH| = \frac{1}{2} |AG| = 5$ .

$|FH| = \sqrt{|EH|^2 - |EF|^2} = 3$ ;  $|AF| = 2$ ;  $|FG| = 8$ .

$|BF| = \sqrt{|AB|^2 - |AF|^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$ .

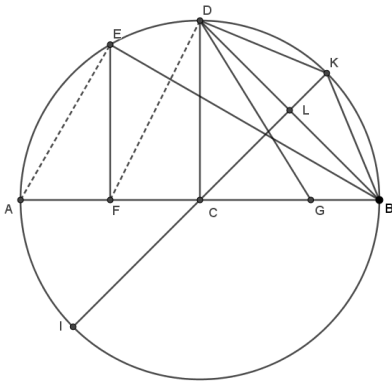
Met (\*\*) volgt:  $\triangle BCD$  gelijkvormig met  $\triangle ABF$ .

Dus:  $|AF| : |BF| = 2 : \sqrt{12} = |BD| : |CD|$ ;  $|CD| = \sqrt{192}$ .

En:  $|AF| : |AB| = 2 : 4 = |BD| : |BC|$ ;  $|BC| = 16$ .

$opp(\triangle BCD) = \frac{1}{2} |BD| * |CD| = \sqrt{3072}$ .

**Vb 29.** Gegeven is een cirkel met diameter  $|AB| = 100000$ .  $DC$  staat loodrecht op  $AB$  (' $DC$  maect 2 quadranten') zodat  $|AC| = |BC| = |CD| = 50000$ . Dit lijnstuk  $CD$ , even lang als  $AE$ , gaat in de cirkel zesmaal [rond] en is een zijde van een gelijkzijdige zeshoek in een cirkel met diameter 100000.



Hier wordt geen vraag gesteld maar het is eerder een vaststelling, dat zoets kan:

een regelmatige zeshoek past in een cirkel en heeft een zijde ter grootte van de straal van die cirkel.

**Vb 30.** Zie vorige figuur. Met  $F$  het midden van  $AC$  volgt:  $|AF| = |FC| = 25000$ . Dus:  $|FB| = 75000$ .

En nu  $|FB| * |AF| = 1875000000$ . Dat geeft voor de middelevenredige  $|EF| = \sqrt{1875000000}$ .

En nu  $|EB| = \sqrt{|EF|^2 + |FB|^2} = \sqrt{7500000000}$ . Dit is weinig minder dan 86603 [1] voor  $|EB|$ , de zijde van een gelijkzijdige driehoek [2] 'beslooten' in een cirkel met diameter 100000.

Geen vraag maar eerder een vaststelling voor de afmeting van zo'n gelijkzijdige driehoek. De volgende vier voorbeelden gaan verder met hetzelfde figuur.

[1]  $|EB| = \sqrt{7500000000} = 86602,5403 \dots$

[2] Dit wordt niet aangetoond maar volgt direct:  $2 * |EF| = |BE|$  dus  $\sphericalangle FEB = 60^\circ$ .

**Vb 31.** En  $\sqrt{|CD|^2 + |BC|^2} = \sqrt{5000000000}$ . Dit is weinig minder dan 70711 [1] voor  $|BD|$ , de zijde van een gelijkzijdig(!) vierkant 'beslooten' in een cirkel met diameter 100000.

$$[1] \sqrt{5000000000} = 70710,6781 \dots$$

**Vb 32.** Met  $|DF| = \sqrt{3125000000}$ .  $G$  zodanig dat  $|FG| = |DF|$ . Dan volgt:  
 $|CG| = |FG| - |FC| = \sqrt{3125000000} - 25000$ . Dit is weinig minder dan 30902 [1] voor  $|CG|$ , de zijde van een gelijkzijdige tienhoek [2] 'beslooten' in een cirkel met diameter 100000.

$$[1] \sqrt{3125000000} - 25000 = 30901,6994 \dots$$

[2] Dit wordt niet aangetoond. Nu via trigonometrie:

$$\text{Met } r \text{ als straal volgt: } |FG| = \frac{1}{2}r\sqrt{5} \text{ en dan } |CG| = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1).$$

In een driehoek met basis  $|CG|$  en twee zijden  $r$  is de tophoek  $\theta$  met:  $\cos(\theta) = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ .

Dat is te vinden met de cosinusregel in deze driehoek.

En bij een regelmatige tienhoek is de middelpuntshoek  $36^\circ$ . Er geldt:  $\cos(36^\circ) = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ .

Dus ja, zo kan met  $|CG|$  een regelmatige tienhoek binnen de cirkel gemaakt worden:  $\theta = 36^\circ$ .

**Vb 33.**  $|DG| = \sqrt{|CG|^2 + |CD|^2} = 6250000000 - \sqrt{7812500000000000000}$ . [14 nullen!]

Dit is weinig minder dan 58779 [1] voor  $|DG|$ , de zijde van een gelijkzijdige vijfhoek [2] 'beslooten' in een cirkel met diameter 100000.

$$[1] 6250000000 - \sqrt{7812500000000000000} = 58778,5252 \dots$$

Indertijd alles handmatig berekend met een algoritme voor worteltrekken..

[2] Dit wordt niet aangetoond. Nu via trigonometrie:

$$\text{Met } r \text{ als straal volgt: } |DG| = \sqrt{|CD|^2 + |CG|^2} = \frac{1}{2}r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

In een driehoek met basis  $|DG|$  en twee zijden  $r$  is de tophoek  $\theta$  met:  $\cos(\theta) = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ .

Dat is weer te vinden met de cosinusregel in deze driehoek.

En bij een regelmatige vijfhoek is de middelpuntshoek  $72^\circ$ . Er geldt:  $\cos(72^\circ) = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ .

Dus ja, zo kan met  $|DG|$  een regelmatige vijfhoek binnen de cirkel gemaakt worden:  $\theta = 72^\circ$ .

**Vb 34.** Als  $BD$  in twee gelijke delen verdeeld wordt, dan volgt:  $|DL| = |BL| = \sqrt{1250000000}$ .

Met de diameter  $I - C - K$  volgt nu:  $|DK|$  of  $|BK|$  is nu een zijde van een gelijkzijdige achthoek in deze cirkel.

$$|LK| = |CK| - |CL| = 50000 - \sqrt{1250000000}.$$

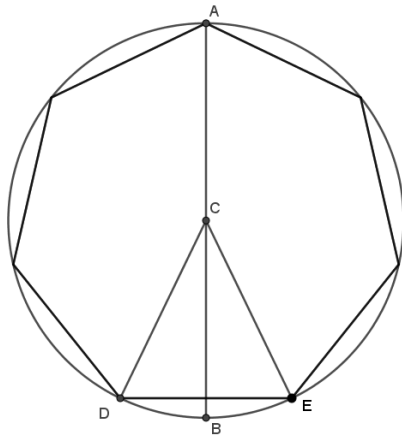
$|DK| = \sqrt{|LK|^2 + |DL|^2} = \sqrt{5000000000 - \sqrt{12500000000000000000}}$ . [17 nullen!]. Dit is weinig meer dan 38268 [1] voor  $|DK|$ , de zijde van een gelijkzijdige achthoek [2] 'beslooten' in een cirkel met diameter 100000.

$$[1] |DK| = \sqrt{\dots} = 38268,3432 \dots$$

[2]  $CK$  is een bissectrice van de rechte hoek  $BCD$ .

Dus  $\sphericalangle KCB = 45^\circ$  en dat is de middelpuntshoek bij een achthoek.

**Vb 35.** Gegeven is een cirkel met diameter  $|AB| = 100000$ . Hoe groot is de zijde van een gelijkzijdige zevenhoek besloten in deze cirkel?



Deel 360 graden door 7 en er volgt voor

boog  $DBE$ :  $51 \text{ graden } 25 \frac{5}{7} \text{ minuten}$ .

Dus:  $bg DB = bg BE = 25^\circ 42 \frac{6}{7}'$ . [1]

Er volgt:  $\sin(bg DB) = 43389$ . [2]

Dit volgt uit 86778 als dubbele gehele sinus volgens de sinus-tafels berekend met regel 200000. [3]

Gevolg: bij een diameter 100000 van de cirkel is 43389 de zijde van een gelijkzijdige zevenhoek binnen deze cirkel. [4]

Op deze manier kan men alle andere gelijke zijden vinden die men wil maken in deze cirkel.

[1] Moderne notatie.

[2] Dit is de lengte van een rechthoekszijde met hypotenusa = 100000.

Dit getal is een naar boven afgeronde waarde, want:  $\sin\left(25^\circ 42 \frac{6}{7}'\right) = 0,4338837 \dots$

[3] Bedoeld is hier: hypotenusa = 200000. Zo'n tabel bevat enkel gehele getallen.

Deze sinus-tabel is een lijst van lengtes van halve koorden getrokken in een cirkel met straal 200000.

[4] Bij straal  $|CD| = 50000$  zou dus nu zijde  $DK$  grootte 43389 moeten hebben, om een regelmatige zevenhoek te kunnen maken d.w.z. te construeren.

Dit geeft:  $\sphericalangle DCE = 51,4293 \dots^\circ$ .

Dat is echter een benadering, maar wel een zeer goede, want  $\frac{1}{7} * 360^\circ = 51,4285 \dots^\circ$ .

#### Opmerking:

In de voorbeelden 29 t/m 34 worden zijden berekend en de figuur daarbij geeft aan hoe die zijden zijn te construeren. Dat geeft dan een correcte constructie, geen benaderende, van een veelhoek.

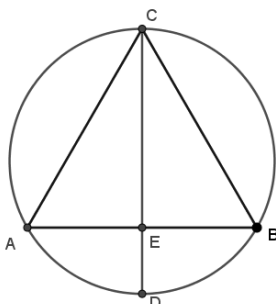
In bovenstaand voorbeeld geeft Brassier (dus Petri) geen correcte constructie maar een benadering. Een exacte constructie is er ook niet voor een regelmatige zevenhoek, maar dat wordt pas in de 19<sup>e</sup> eeuw door Gauss definitief bewezen en geformuleerd in een stelling:

*Een regelmatige q-veelhoek is te construeren dan en slechts dan als  $q = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_n$  met m een natuurlijk getal én de getallen  $p_1, p_2, \dots, p_n$  verschillende priemgetallen van Fermat zijn (of ontbreken).*

De getallen  $3 = 2^{2^0} + 1$  en  $5 = 2^{2^1} + 1$  zijn Fermat-priemgetallen, 7 is dat niet.

Bij geen van zulke priemgetallen gaat het dan om vierkanten, achthoeken, etc.

**Vb 36.** Gegeven is een cirkel waarvan de diameter  $|CD| = 12$ . In die cirkel is een gelijkzijdige driehoek  $ABC$  gezet, zo groot als mogelijk. Gevraagd is de grootte van de zijde.



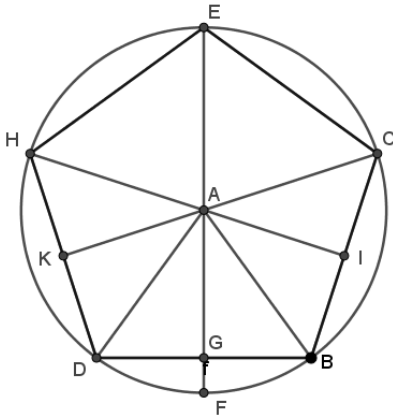
In voorbeeld 30 is gevonden dat een zijde van een gelijkzijdige driehoek zich verhoudt tot de diameter als 86603 tot 100000.

Dus:  $100000 : 86603 = 12 : \text{zijde}$ .

Dus de zijde van de gewenste driehoek =  $10 \frac{9809}{25000}$ .

En zo kan men ook de zijden van 4-, 5-, 6-, 7-, 8 - hoeken, etc vinden door gebruik te maken van verhoudingen tot de diameter.

**Vb 37.** Gegeven is een gelijkzijdige vijfhoek ofwel een pentagon met zijde = 12.  
Wat is de oppervlakte?



In voorbeeld 33 is gevonden dat de zijde van een gelijkzijdige vijfhoek zich verhoudt tot de diameter als 58779 tot 100000.

Dus:  $58779 : 100000 = 12 : |EF|$ .

De diameter =  $|EF| = 20 \frac{24420}{58779}$ . En  $|AD| = \frac{1}{2} |EF|$ .

Er volgt:  $|AG| = \sqrt{|AD|^2 - |GD|^2}$  met  $|DG| = \frac{1}{2} |DB| = 6$ .

En dan:  $|AG| = \sqrt{68 \frac{683032536}{3454970841}}$ . [1]

En dit is bijna  $8 \frac{15176}{58779}$ . [2]

En dus:  $opp(\Delta DAB) = \frac{1}{2} |DB| * |AG| = 49 \frac{32277}{58779}$ .

Gevolg:  $opp(vijfhoek) = 5 * \dots = 247 \frac{43827}{58779}$ . [3]

[1] Dit geeft:  $|AG| = 8,2581896 \dots$

Merk op dat de breuk te vereenvoudigen is: teller en noemer zijn een negenvoud.

Maar omdat  $3454970841 = 58779^2$  wordt niet vereenvoudigd en staat bij [2] in de noemer 58779.

[2] Decimaal:  $8 \frac{15176}{58779} = 8,2581874 \dots$  Een zeer goede benadering dus voor  $|AG|$ .

Teller onder de wortel is:  $(68 * 3454970841 + 683032536) = 235621049724$ .

Te zoeken is dus een grootste getal  $n$  met  $(8 * 58779 + n)^2 \leq 235621049724$ .

Dan blijkt:  $n = 15176$ . En uitgewerkt:  $(8 * 58779 + 15176)^2 = 235620926464$ .

[3] Decimaal:  $opp(vijfhoek) = 247,7456234 \dots$

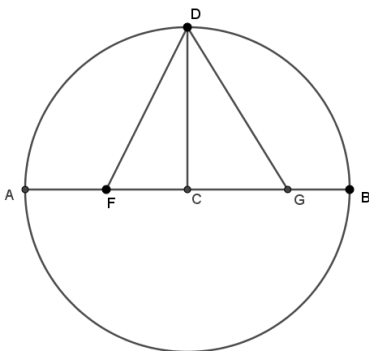
**Opmerking:**

Bij zijde  $|BD| = 12$  volgt exact:  $|AG| = \frac{6}{\tan(36^\circ)} = 6 \sqrt{\frac{1}{5} (5 + 2\sqrt{5})} = 8,258291 \dots$

En exact:  $opp(vijfhoek) = 36\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 247,7487 \dots$

$|AG|$  is feitelijk dus iets groter en bijgevolg de oppervlakte ook.

**Vb 38.** Anders [andere aanpak dan in vorig voorbeeld]. Neem nu diameter  $|AB| = 4$ . Dan  $|AC| = |CD| = 2$ . Met  $|FC| = 1$  volgt  $|FD| = \sqrt{5}$  volgens voorbeeld 1. Met  $|FG| = |FD|$  volgt  $|CG| = \sqrt{5} - 1$ . Dit is de zijde van een gelijkzijdige vijfhoek in deze cirkel.



Er volgt:  $|DG| = \sqrt{|CG|^2 + |CD|^2} = \sqrt{10 - \sqrt{20}}$ .

Dit volgt bij een diameter 4. Dus met verhoudingen:

$$4 : \sqrt{10 - \sqrt{20}} = |EF| : 12. |EF| = \sqrt{288 + \sqrt{16588 \frac{4}{5}}}. [1]$$

$|AD| = \frac{1}{2} |EF|$  in voorbeeld 37.

Voor de loodlijn  $AG$  [zie de figuur bij 37] volgt:

$$|AG| = \sqrt{|AD|^2 - |GD|^2} = \sqrt{36 + \sqrt{1036 \frac{4}{5}}}$$

Dus:  $opp(\Delta DAB) = \frac{1}{2} |DB| * |AG| = \sqrt{1296 + \sqrt{1343692 \frac{4}{5}}}$ . Met  $|DB| = 12$ .

En:  $opp(vijfhoek) = 5 * \dots = \sqrt{32400 + \sqrt{839808000}}$ . [2]

Dit is bijna  $247 \frac{187}{250}$  en dat scheelt ('verscheelt') heel weinig met het voorgaande. [3]

[1] Hier is veel werk verricht. Het rekenen met zulke wortelvormen behandelt Brasser in een eerder deel. Schrijver dezes is blij dat *WolframAlpha* bestaat!

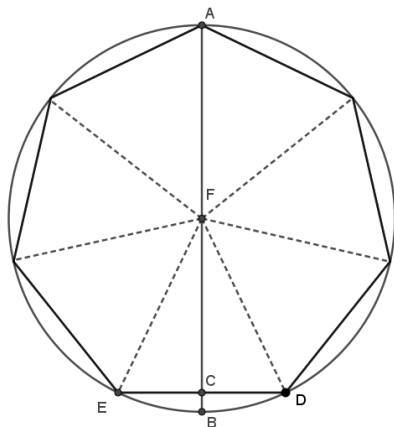
[2] Decimaal staat hier: 247,74874 ...

De oppervlakte is hier dus exact berekend bij een zijde = 12.

[3] In de tekst moeilijk te lezen maar zeer waarschijnlijk staat er dit getal.

$247 \frac{187}{250} = 247,748$ . Dit scheelt inderdaad niet veel met 247,7456234 ... uit het voorbeeld hiervoor en zeker weinig met de exacte waarde.

**Vb 39.** Gegeven is een gelijkzijdige zevenhoek ofwel septagon binnen een cirkel besloten. Zijde = 8. Gevraagd is de oppervlakte.



Uit voorbeeld 35 volgt:

$diameter : zijde = 100000 : 43389 = |AB| : 8$ . [1]

Dus  $|AB| = 18 \frac{18998}{43389}$ .  $|EF| = \frac{1}{2} |AB|$ .  $|EC| = 4$ .

En er volgt:

$|FC| = \sqrt{|EF|^2 - |EC|^2} = \sqrt{68 \frac{1861153036}{1882605321}}$ .

Dus:  $opp(\Delta EFD) = \frac{1}{2} |ED| * |FC| = \sqrt{1103 \frac{1539368761}{1882605321}}$ .

En:  $opp(zevenhoek) = \sqrt{54087 \frac{124856449}{1882605321}}$ . [2]

En dit is bijna  $232 \frac{20837}{43389}$ . [3] [4]

[1] Er wordt dus doorgewerkt met de benadering voor de zijde.

[2] Decimaal: 232,56626 ...

Iets preciezer met  $|ED| = 8$  en  $\alpha = \frac{360^\circ}{7}$  volgt:

$r = \frac{4}{\sin(\frac{1}{2}\alpha)}$  en  $opp = 7 * \frac{1}{2} r^2 \sin(\alpha) = 232,5703 \dots$

[3] De breuk is moeilijk te lezen in de tekst:

**232,56626**

Als die interpretatie klopt, dan is dat 232,4802 ... Beter zou zijn:  $232 \frac{24569}{43389} = 232,56624 \dots$

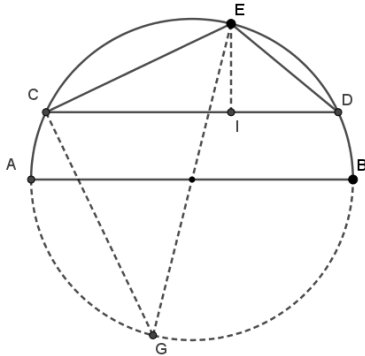
[4] In *Geometria* rekt Petri door met een hoek van  $51^\circ 26'$ . Hij krijgt dan:

$opp = \sqrt{54077 \frac{98059}{114921}} = 232,5464 \dots \approx 232 \frac{5464}{10000} = 232 \frac{683}{1250}$ .

Hij geeft als benadering:  $232 \frac{68}{125} = 232,544$ .

## Veelhoeken en oppervlakten 1

**Vb 40.** Gegeven is een halve cirkel met diameter  $AB$ . Daarin is een driehoek  $CED$  gemaakt, met  $|CD| = 27$ ,  $|CE| = 22$  en  $|DE| = 10$ . De cirkel ('circumferentie' [feitelijk de omtrek]) gaat door de drie punten. Gevraagd: Wat is de diameter van de halve cirkel?



Met voorbeeld 6 volgt: [1]

$$|CI| = 20\frac{11}{18}, |ID| = 6\frac{7}{18}, |IE| = \sqrt{59\frac{59}{324}}$$

Omdat hoek  $CGE$  op dezelfde boog  $CE$  staat als hoek  $CDE$  en hoek  $GCE$  [1] en hoek  $DIE$  beide recht zijn, volgt:

$\Delta GCE$  is gelijkvormig met  $\Delta DIE$ .

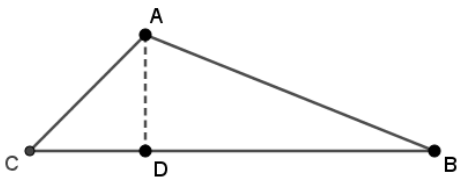
Dus:  $|CE| : |EG| = |IE| : |ED|$ .

$$\text{Er volgt: } |EG| = \frac{220}{\sqrt{59\frac{59}{324}}} = \sqrt{817\frac{625}{767}}$$

En dat is ook de diameter  $|AB|$ .

[1] Er geldt:  $EI \perp CD$ ;  $EG$  is een middellijn

**Vb 41.** Gegeven is een cirkel met zijden  $|AC| = \sqrt{240}$ ,  $|AB| = \sqrt{1200}$  en  $|BC| = \sqrt{1920}$ . Gevraagd: lengte van hoogtelijn  $AD$  en de oppervlakte.



Stel:  $|CD| = 1x$ . Dan volgt:  $|DB| = \sqrt{1920} - 1x$ .

$$|AD|^2 = |AC|^2 - |CD|^2 = |AB|^2 - |DB|^2$$

$$\text{Dus: } 240 - 1x^2 = 1200 - 1920 + \sqrt{7680x^2} - 1x^2$$

$$\sqrt{7680x^2} = 960; 7680x^2 = 921600; 1x^2 = 120$$

$$\text{Dus: } |CD| = 1x = \sqrt{120} \text{ en } |DB| = \sqrt{1920} - 1x = \sqrt{1080}$$

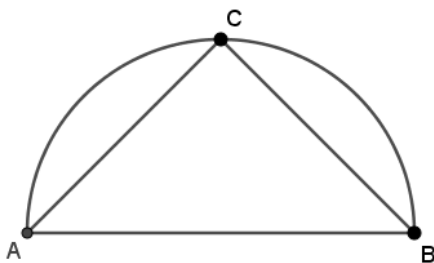
$$\text{En: } |AD| = \sqrt{|AC|^2 - |CD|^2} = \sqrt{120}$$

$$\text{Opp}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}|BC| * |AD| = \sqrt{57600} = 240$$

**Vb 42.** Gegeven is een halve cirkel waarin een driehoek is gemaakt met twee gelijke zijden  $AC$  en  $BC$ .

Er geldt:  $|AB| + |BC| + AC| = \sqrt{768} + \sqrt{524288}$ . [ $AB$  is de middellijn.]

Gevraagd: de grootte van de elke zijde.



Er geldt:  $\sqrt{768} + \sqrt{524288} = 16 + \sqrt{512}$ . [1]

Stel:  $|AC| = |BC| = 1x$ .

$$\text{Dan volgt: } |AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{2x^2}$$

$$\text{Dus: } 2x + \sqrt{2x^2} = 16 + \sqrt{512}$$

Deel rechterlid door  $2 + \sqrt{2}$  en er volgt:

$$1x = \sqrt{128}$$

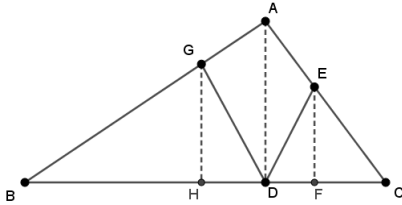
$$\text{En: } |AB| = \sqrt{2x^2} = \sqrt{256} = 16$$

[1] Raar waarom dit niet meteen bij het gegeven staat.

[2] Is hier gelezen:  $2x + \sqrt{2x^2} = 2x + x\sqrt{2} = x(2 + \sqrt{2})$ ?

Dan is mogelijk  $\sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$  geschreven en dat is verrassend.

**Vb 43.** Gegeven is een driehoek met  $|AB| = \sqrt{160}$ ,  $|AC| = \sqrt{110}$  en  $|BC| = \sqrt{250}$ . Op de basis staat hoogtelijn  $AD$  en in  $D$  is een put. Deze driehoek moet verdeeld worden in drie gelijke delen in oppervlakte. [1] De vraag is wat de lengtes van de loodlijnen  $EF$  en  $GH$  zijn.



Stel:  $|BD| = 1x$ . Dan volgt:  $|DC| = \sqrt{250} - 1x$ .

Met voorbeeld 4 volgt dan:

$$|BD| = \sqrt{90}, |DC| = \sqrt{40}, |AD| = \sqrt{70}.$$

$$\text{Dat geeft: } opp(\triangle ABC) = \frac{1}{2} |BC| * |AD| = \sqrt{4375}.$$

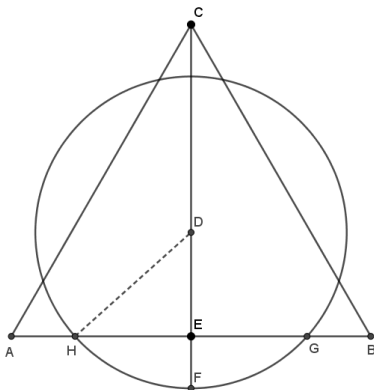
$$\text{Dus dit gedeeld door 3 geeft voor elk deel: } \sqrt{486 \frac{1}{9}}.$$

$$\text{En dit gedeeld door } \frac{1}{2} |DC| = \sqrt{10} \text{ geeft: } |EF| = \sqrt{48 \frac{11}{18}}.$$

$$\text{En gedeeld door } \frac{1}{2} |BD| = \sqrt{22 \frac{1}{2}} \text{ geeft: } |GH| = \sqrt{21 \frac{49}{81}}.$$

[1] In de tekst staat 'dat elke deel komen mach aen de putte voorge'.

**Vb 44.** Gegeven is een cirkel met diameter van 15. Er is een gelijkzijdige driehoek  $ABC$  met een hoogtelijn  $|CE| = 15$ . En de cirkel snijdt van de drie zijden even lange stukken af. De vraag is hoeveel wordt van elke zijde afgesneden ofwel  $|GH|$ ?



De halve diameter  $|DH| = 7 \frac{1}{2}$ .

Het derde deel van  $CE$  geeft:  $|DE| = 5$ . [1]

Er volgt:

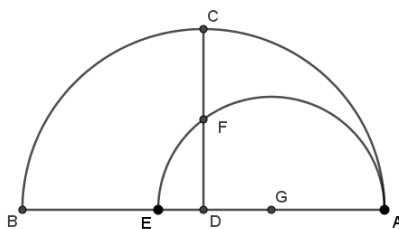
$$|HE| = \sqrt{|DH|^2 - |DE|^2} = \sqrt{31 \frac{1}{4}}.$$

Dus:

$$|HG| = 2 * \sqrt{31 \frac{1}{4}} = \sqrt{125}.$$

[1]  $D$  is mp van de cirkel en zwaartepunt van de driehoek.

**Vb 45.** Gegeven is een halve cirkel met diameter  $AB$ . [ $D$  is het midden daarvan.] Daarop staat nog een halve cirkel met diameter  $AE$ , [ $G$  is het midden daarvan] en wel zo dat de grote (halve) cirkel verdeeld is in twee **gelijke** delen [1]. Lijnstuk  $CD$  [met  $CD \perp AB$ ] snijdt die (kleinere) halfcirkel in  $F$  zodat  $|CF| = 6$ . Verder geldt:  $|BE| = 9$ . Gevraagd is hoeveel die diameters zijn.



Stel  $|DE| = 1x$ . Dan volgt:  $|BD| = |DA| = |CD| = 9 + 1x$ .

Met voorbeeld 26 volgt [met middelevenredigheid]:

$$|DF| = \sqrt{1x^2 + 9x}. \text{ En met } |CF| = 6 \text{ volgt dan:}$$

$$|CD| = 6 + \sqrt{1x^2 + 9x} = 9 + 1x.$$

$$\text{Ofwel: } \sqrt{1x^2 + 9x} = 3 + 1x.$$

$$\text{Dus: } 1x^2 + 9x = 9 + 6x + 1x^2; 3x = 9; 1x = 3.$$

$$\text{Gevolg: } |DE| = 3; |BD| = 12; |AB| = 24; |AE| = 15$$

[1] Als dit betekent 'gelijk in oppervlakte' dan wordt dat nergens gebruikt en blijkt ook niet te gelden!  
Neem als diameters  $2R$  en  $2r$ .

Er zou dan moeten gelden:  $opp(c(D, R)) : opp(c(G, r)) = 2 : 1 = (2R)^2 : (2r)^2$ .

Maar er geldt:  $|AB|^2 : |AE|^2 = 24^2 : 15^2 \neq 2 : 1$ .

Als dit wel moet gelden, met  $|BE| = 9$ , dan volgt met  $|DE| = x$ ,  $R = 9 + x$ ,  $r = \frac{1}{2}(9 + 2x)$

en  $R^2 : r^2 = 2 : 1$  dat er geldt:  $(9 + x)^2 = \frac{1}{2}(9 + 2x)^2$ .

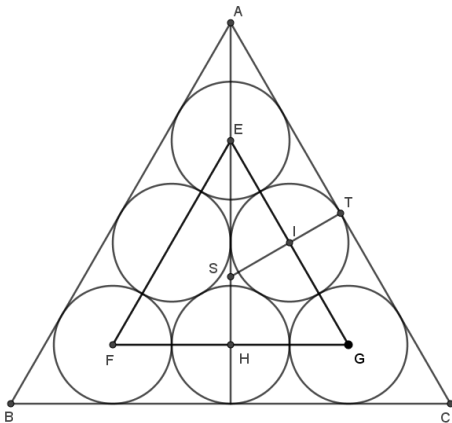
Dat geeft:  $x = \frac{9}{2}\sqrt{2} = 6,3639 \dots$  en  $|CF| = 9 + \frac{9}{2}\sqrt{2} - \frac{9}{2}\sqrt{2 + 2\sqrt{2}} = 5,4758 \dots$

$|CF|$  is dus een te berekenen waarde, afhankelijk van  $x$  en blijkbaar kleiner dan de gegeven waarde 6.

Als het woord 'gelijke' weggelaten wordt, dan zijn aanpak en antwoord in de tekst prima.

Merk op:  $|CD| = |BD| = 12$  dus  $F$  deelt lijnstuk  $CD$  in gelijke delen.

**Vb 46.** Gegeven is een gelijkzijdige driehoek  $ABC$  waarin zes even grote cirkels zijn gemaakt 'soo na op malkander als doenlijk is' (\*). Elke diameter = 6. Gevraagd is de lengte van de zijden van de driehoek.



(\*) wordt begrepen als in de figuur: de cirkels raken.

Elke diameter 6 dus:  $|EF| = |FG| = |GE| = 12$ .

Met voorbeeld 2 volgt nu:

loodlijn  $|EH| = \sqrt{108}$ .

Een derde hiervan is  $|IS| = \sqrt{12}$ . [1]

Dus:  $|ST| = 3 + \sqrt{12}$ .

Omdat  $|IS| : |EG| = |ST| : |AC|$  [2]

volgt:  $\sqrt{12} : 12 = (3 + \sqrt{12}) : |AC|$ .

Dus:

$|AC| = 12 + \sqrt{108}$  en dat is de gevraagde zijde van  $\Delta ABC$ .

[1]  $S$  is zwaartepunt van  $\Delta EFG$  en  $\Delta ABC$ .

[2] Dit volgt uit gelijkvormigheid.

**Vb 47.** Om de vorige kwestie te proberen, zij dan bekend dat elke zijde van de driehoek  $ABC$  is  $12 + \sqrt{108}$ .

En gegeven de verhouding zijde driehoek : diameter elke cirkel =  $(2 + \sqrt{3}) : 1$ . [1]

Er volgt een berekening. [2]

Als  $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 + \sqrt{12} - 3 - \sqrt{12} = 1$  geeft,

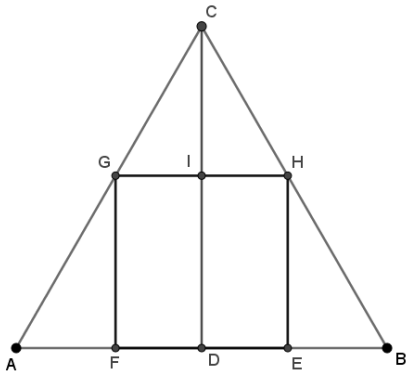
dan geeft  $(12 + \sqrt{108})(2 - \sqrt{3}) = 24 + \sqrt{324} - 18 - \sqrt{324} = 6$ . De diameter van de cirkels.

[1] Dit wordt niet verder bewezen maar volgt uit de figuur.

Als  $|IT| = r = \frac{1}{2}d$ , dan  $|AT| = 2r + r\sqrt{3}$ . En:  $|AC| = 2|AT| = 2(2r + r\sqrt{3}) = d(2 + \sqrt{3})$ .

[2] Feitelijk gebeurt hier het volgende met [1]:  $diameter = \frac{zijde}{2 + \sqrt{3}} * \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = zijde * (2 - \sqrt{3})$ .

**Vb 48.** Gegeven is een gelijkzijdige driehoek  $ABC$  met zijden van lengte 8. Daarin staat een zo groot mogelijk vierkant. Gevraagd is de lengte van de zijde van dat vierkant.



Stel:  $|GH| = |HE| = 1x$ . Dan volgt:  $|DE| = \frac{1}{2}x$ .

En:  $|BE| = 4 - \frac{1}{2}x$ .

Dus:  $|HB| = \sqrt{|HE|^2 + |BE|^2} = \sqrt{16 - 4x + 1\frac{1}{4}x^2}$ .

En dan:  $|BC| = \frac{\sqrt{256 - 64x + 20x^2}}{4 - \frac{1}{2}x} = 8$ . [1]

Dat geeft:  $256 - 64x + 20x^2 = 1024 - 256x + 16x^2$ .

En tenslotte:  $1x^2 + 48x = 192$ . [2]

Dus:  $|HE| = 1x = \sqrt{768} - 24$ . [3]

[1] Dit volgt met verhouding:  $|BC| : |BD| = |HB| : |BE|$ .

[2] In de tekst staat hier foutief:  $1x^2 = 48x + 192$ . Maar  $|HE|$  is weer wel goed berekend.

[3] Er wordt niet bewezen dat dit vierkant de grootst mogelijke is, maar dat is wel zo.

**Opmerking:**

S.H. Cardinael (1578-1647) behandelt dit probleem meer algemeen én met een getallenvoorbeeld van een niet-gelijkzijdige driehoek in zijn werk *Hondert geometrische questien met hare solutien* (1612). Het is daarin kwestie 89 en het wordt aangepakt zonder cossische getallen. In het volgende voorbeeld komt ook zijn getallenvoorbeeld aan de orde.

**Vb 49.** Anders [dan hiervoor]. Met het voorbeeld 2 volgt voor de loodlijn  $|CD| = \sqrt{48}$ .

Dan volgt:  $|HE| = \frac{|AB|*|CD|}{|AB|+|CD|} = \frac{\sqrt{3072}}{8+\sqrt{48}} = \sqrt{768} - 24$ . [1]

Idem, als van de driehoek gegeven is  $|AC| = 13$ ,  $|AB| = 14$  en  $|BC| = 15$  en men de zijde van het grootste vierkant op zijde  $AB$  wil weten.

Met voorbeeld 6 volgt voor de loodlijn  $|CD| = 12$  en  $|HG| = \frac{|AB|*|CD|}{|CD|+|AB|} = 6\frac{6}{13}$ .

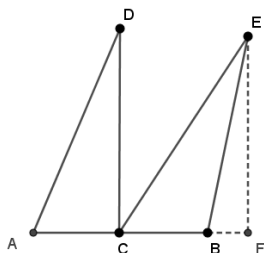
[1] Want:  $\frac{|HG|}{|AB|} = \frac{|CH|}{|BC|}$  en  $\frac{|HE|}{|CD|} = \frac{|HB|}{|BC|}$  dus met  $|HG| = |HE|$  volgt:

$\frac{|HE|}{|AB|} + \frac{|HE|}{|CD|} = \frac{|CH|}{|BC|} + \frac{|HB|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|CD|} = 1$  en na uitwerking  $|HE| = \frac{|AB|*|CD|}{|AB|+|CD|}$ .

**Vb 50.** Gegeven is een lijnstuk  $AB$  in twee gelijke delen verdeeld en elk stuk met lengte 8.

Op het ene stuk staat driehoek  $ABC$ , in  $C$  rechthoekig, met  $|AD| = 17$  [overbodig],

$|CD| = 15$ .  $Opp(\Delta ABC) = 60$ . Op het andere deel  $CB$  staat driehoek  $CEB$  met  $E$  'ghebogen na den basis toe' [stomp in B dus] zodat  $Opp(\Delta CED) = \sqrt{3276}$  en  $|BE| = |CD|$ . Gevraagd:  $|CE|$ .



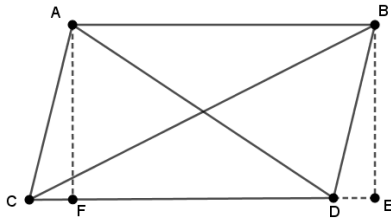
$|EF| = \frac{Opp(\Delta CED)}{\frac{1}{2}|BC|} = \frac{\sqrt{3276}}{4} = \sqrt{204\frac{3}{4}}$ .

$|BF| = \sqrt{|BE|^2 - |EF|^2} = \sqrt{20\frac{1}{4}} = 4\frac{1}{2}$ . Dus:  $|CF| = 12\frac{1}{2}$ .

Gevolg:

$|CE| = \sqrt{|CF|^2 + |EF|^2} = \sqrt{156\frac{1}{4} + 204\frac{3}{4}} = \sqrt{361} = 19$ .

**Vb 51.** Gegeven is een parallellogram ('romboide')  $ABCD$  met  $|AC| = |BD| = 10$ ,  $|AB| = |CD| = 17$ . De oppervlakte is 168. Gevraagd: wat is de lengte van de diagonalen ('diameters')  $BC$  en  $AD$ ?



$$|AF| = |BE| = \frac{168}{|CD|} = 9 \frac{15}{17}.$$

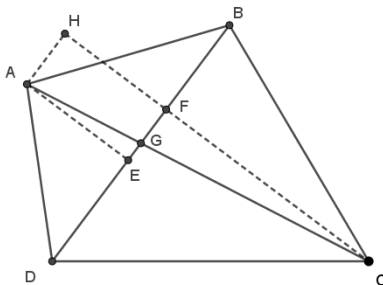
$$|DE| = |CF| = \sqrt{|AC|^2 - |AF|^2} = \sqrt{2 \frac{98}{189}} = 1 \frac{9}{17}.$$

$$\text{Dus: } |CE| = 18 \frac{9}{17} \text{ en } |FD| = 15 \frac{8}{17}.$$

$$\text{En: } |BC| = \sqrt{|CE|^2 + |BE|^2} = \sqrt{441} = 21.$$

$$|AD| = \sqrt{|FD|^2 + |AF|^2} = \sqrt{337}.$$

**Vb 52.** Gegeven is een onregelmatige vierhoek met  $|DC| = 15$ ,  $|BC| = 13$ ,  $|AB| = 10$ ,  $|AD| = \sqrt{72}$ . Voor de diagonaal geldt  $|BD| = 14$ . Gevraagd: wat is de lengte van diagonaal  $AC$ ?



De vierhoek  $ABCD$  wordt door de lijn  $BD$  verdeeld in twee driehoeken  $BDA$  en  $BDC$ . Met de manier uit voorbeeld 6 zijn de loodlijnen  $|AE|$  en  $|FC|$  te vinden en ook de lijnstukken  $|DE|$ ,  $|EB|$ ,  $|DF|$  en  $|FB|$ .

Er volgt:  $|AE| = 6$ ,  $|FC| = 12$ ,  $|DE| = 6$ ,  $|EB| = 8$ .

$|DF| = 9$ ,  $|FB| = 5$ ,  $|EF| = 3$ . [1]

Omdat  $|AH| = |EF|$  en  $|HF| = |AE|$  volgt:

$$|AC| = \sqrt{|AH|^2 + (|HF| + |FC|)^2} = \sqrt{333}.$$

[1] Blijkbaar geldt:  $|AE| : |CF| = 1 : 2$  en daarmee volgt:  $|EG| = 1$ ,  $|GF| = 2$ .

Dus:  $|DG| = 7$ ,  $|GB| = 7$ . Dat  $|DG| = |GB|$  wordt in het volgende voorbeeld gegeven!

**Vb 53.** Gegeven is een onregelmatige vierhoek  $ABCD$  zoals in vorig voorbeeld.

$|AG| = \sqrt{37}$ ,  $|GC| = \sqrt{148}$ ,  $|BD| = 14$ ,  $|DG| = |GB|$  en  $\text{opp}(ABCD) = 126$ .

Gevraagd:  $|AB|$ ,  $|BC|$ ,  $|CD|$  en  $|AD|$ .

$$|AE| + |CF| = \frac{\text{opp}(ABCD)}{\frac{1}{2}|BD|} = 18 = |HC|. (**) \text{ Er geldt: } |AC| = |AG| + |GC| = \sqrt{333} (!)$$

$$\text{Dus: } |EF| = |AH| = \sqrt{|AC|^2 - |HC|^2} = \sqrt{333 - 324} = 3. (*)$$

$\triangle AGE$  is gelijkvormig ('gelijkhoeckigh') met  $\triangle CGF$  en daaruit volgt:

$$|EG| : |GF| = |AG| : |CG| = \sqrt{37} : \sqrt{148} = 1 : 2. (**) \text{ En dus } (*): |EG| = 1, |GF| = 2.$$

Omdat  $|DG| = |GB| = 7$  volgt:  $|DE| = 6$ ,  $|EB| = 8$ ,  $|DF| = 9$ ,  $|FB| = 5$ .

Met (\*\*) en uit de verhouding volgt ook:  $|AE| = 6$ ,  $|CF| = 12$ .

En dan:

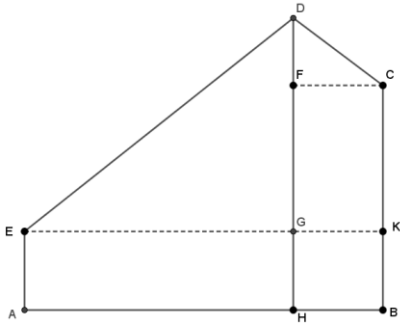
$$|AB| = \sqrt{|AE|^2 + |BE|^2} = \sqrt{100} = 10.$$

$$|BC| = \sqrt{|BF|^2 + |CF|^2} = \sqrt{169} = 13.$$

$$|CD| = \sqrt{|CF|^2 + |DF|^2} = \sqrt{225} = 15.$$

$$|AD| = \sqrt{|AE|^2 + |DE|^2} = \sqrt{72}.$$

**Vb 54.** Gegeven is een figuur  $ABCDE$  met  $|BC| = 20$ ,  $|CD| = 10$ ,  $|AB| = 32$ ,  $|AE| = 7$  en  $|ED| = \sqrt{937}$ .  
[en rechthoekig in  $A$  en  $B$ ]. Gevraagd wordt de lengte van de loodlijn  $DH$ .



Stel:  $|HB| = |GK| = |FC| = 1x$ .

Dan volgt:  $|AH| = |EG| = 32 - 1x$ .

$|KC| = 13 = |FG|$ .

En dan:  $|DF| = \sqrt{|CD|^2 - |FC|^2} = \sqrt{100 - 1x^2}$ .

$|ED|^2 = |EG|^2 + |DG|^2$ .

Dus:  $937 = (32 - 1x)^2 + (13 + \sqrt{100 - 1x^2})^2$ .

Ofwel:  $64x - 356 = \sqrt{67600 - 676x^2}$ .

[nu verkort]  $4772x^2 + 59136 = 45568x$ .

Ofwel (!):  $1x^2 + 12 \frac{468}{1193} = 9 \frac{655}{1193} x$ .

Dus:  $1x = 8 = |HB| = |FC|$ . Dus:  $|AH| = |EG| = 32 - 1x = 24$ .

En dan:  $|DF| = \sqrt{|CD|^2 - |CF|^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$ . Gevolg:  $|DH| = 20 + 6 = 26$ .

**Vb 55.** Om de oppervlakte van deze figuur [in vorig voorbeeld] te vinden, ga dan als volgt te werk:

$$\text{opp}(AEDH) = |AH| * \frac{1}{2} (|AE| + |DH|) = 24 * \frac{1}{2} * 33 = 396. [1]$$

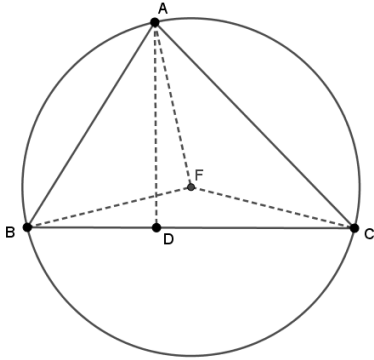
$$\text{opp}(HDCB) = |HB| * \frac{1}{2} (|BC| + |DH|) = 8 * \frac{1}{2} * 46 = 184. [1]$$

Dus:  $\text{opp}(ABCDE) = 580$ .

[1] Hier is de formule voor de oppervlakte van een trapezium gebruikt.

## Berekeningen aan cirkels

**Vb 56.** Gegeven is een driehoek [1] met  $|AB| = 13$ ,  $|BC| = 14$ ,  $|AC| = 15$ . In deze driehoek is een stok ('Vogelstenge') opgesteld [in  $F$ ] zodanig dat de vogel tot elk punt  $A$ ,  $B$  en  $C$  een afstand heeft van  $53\frac{1}{8}$ . [2] Gevraagd is hoe hoog de vogel boven de aarde is verheven...



Dus de stok is loodrecht opgesteld en de vogel  $[V]$  heeft tot elk punt gelijke afstand. De punten liggen op een cirkel [3] [waarvan  $F$  het middelpunt is].

Met voorbeeld 6 is de lengte van de hoogtelijn  $AD$  te vinden.  $|AD| = 12$ .

En met voorbeeld 40 volgt:  $diameter = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|AD|} = 16\frac{1}{4}$ .

Gevolg:  $|AF| = |BF| = |CF| = \frac{1}{2} diameter = 8\frac{1}{8}$ .

En dan:

$$|FV| = \sqrt{|AV|^2 - |AF|^2} = \sqrt{\left(53\frac{1}{8}\right)^2 - \left(8\frac{1}{8}\right)^2} = 52\frac{1}{2}.$$

En dit is de lengte van de stok.

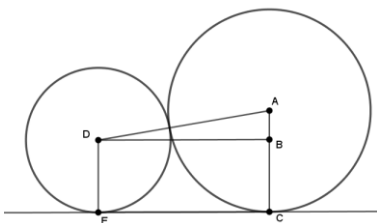
[1] In de tekst staat hierachter 'Agus'. Betekent dit van boven gezien?

[2] Zonder eenheid.

[3] Denk bij de figuur dus eigenlijk een piramide met  $F$  de projectie van de top, waar de vogel  $V$  zit.

Dit was vaak een opstelling bij een schutterij: vanuit  $A$ ,  $B$  en  $C$  schieten op de kleiduif  $V$ .

**Vb 57.** Gegeven zijn twee raderen: een van 7 voet hoog en de ander 5 voet. [1] Zij moeten een afstand overbruggen van 4400 voet. De vraag is hoe vaak elk rad zal rondgaan om die afstand te doen.



Met voorbeeld 20 volgt: omtrek grootste rad is 22 en omtrek kleinste rad is  $15\frac{5}{7}$ . [2]

Dus het grootste rad zal  $\frac{4400}{22} = 200$  omwentelingen maken en het kleinste rad  $\frac{4400}{15\frac{5}{7}} = 280$  omwentelingen. [3]

[1] Dat zijn hun diameters.

[2]  $Omtrek = \pi \cdot diameter$ . Hier is gebruikt:  $\pi = \frac{22}{7}$ .

[3] Met  $\pi = 3,141592 \dots$  zijn de aantallen omwentelingen hetzelfde.

**Vb 58.** Gegeven zijn twee wielen of raderen waarvan de grootste een omtrek heeft van 22 en de kleinste een omtrek van  $15\frac{5}{7}$ . Hoe vaak wentelt de grootste als de kleinste dat 280 keer gedaan heeft?

[Over een gelijke afstand en die is]  $280 \cdot 15\frac{5}{7} = 4400$ . Dus de grootste is gewenteld  $\frac{4400}{22} = 200$  keer.

**Vb 59.** Gegeven zijn twee raderen. Een heeft een diameter van 7 en de andere van 5 voet. De omtrekken raken elkaar. [Zie de figuur bij vb 57.] Gevraagd:  $|CE|$ .

De halve diameters zijn respectievelijk  $3\frac{1}{2}$  en  $2\frac{1}{2}$ . Dus:  $|AD| = 6, |AB| = 1$ .

Dus:  $|CE| = |BD| = \sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} = \sqrt{35}$ .

**Vb 60.** Gegeven zijn twee raderen waarvan de kleinste een omtrek heeft van  $15\frac{5}{7}$  voet en de grootste een omtrek van 22 voet. Het ene rad doet de ander draaien [zie de figuur bij vb 57].

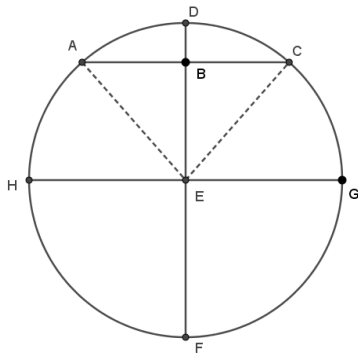
De vraag is hoe vaak de grootste draait tot het moment dat ze weer in de beginstand staan.

Als de grootste éénmaal draait, dan heeft de kleinste  $\frac{22}{15\frac{5}{7}} = 1\frac{2}{5}$  keer gedraaid.

Dat is dus de verhouding 5 : 7 voor de draaiingen: het grootste rad draait vijfmaal en het kleinste rad zevenmaal om weer in de beginstand te komen.

**Vb 61.** Gegeven is een segment ('boge')  $ADCB$  met  $|AC| = 8, |BD| = 2$ .

Wat is de diameter van de cirkel waarvan dit segment is afgesneden?



$$|BF| = \frac{|AB|^2}{|BD|} = \frac{16}{2} = 8. [1]$$

$$\text{Dus: } \text{diameter} = |DF| = 8 + 2 = 10.$$

[1]  $|AB|$  is de middelevenredige van  $|BF|$  en  $|BD|$ .

**Vb 62.** Gegeven is segment  $ADCB$  [zie vorige figuur] met  $|BD| = 2$  [1] en van een cirkel met diameter = 10. Wat is  $|AC|$ ?

$$|AE| = 5, |BE| = 3. \text{ Dus } |AB| = \sqrt{|AE|^2 - |BE|^2} = 4 \text{ en er volgt: } |AC| = 8.$$

[1] Zo'n lijnstuk  $BD$  heeft in deze tekst en in veel oude teksten de naam *sagitta*.

**Vb 63.** Gegeven is een segment  $ABCD$  [zie figuur van vb 61] met een koorde  $|AC| = 8$  van een cirkel met diameter = 10. Wat is  $|BD|$ ?

$$|AE| = 5, |AB| = 4. \text{ Dus } |BE| = \sqrt{|AE|^2 - |AB|^2} = 3 \text{ en er volgt: } |BD| = 2.$$

**Vb 64.** Gegeven is een segment  $ADCB$  [zie figuur van vb 61] met koorde  $|AB| = 8$  voet en  $|BD| = 2$  voet. [Nu wel met eenheden!] Gevraagd is de lengte van boog  $ADC$ .

Met voorbeeld 61 is bekend: diameter cirkel = 10.

Nu volgt:  $|AE| : 100000 = |AB| : \sinus(\text{hoek}AED)$ . [1]

Dus:  $\sinus(\text{hoek}AED) = 80000$ . Dat geeft:  $\text{hoek} AED = 53 \text{ grad. } 8 \text{ min. } [7,8061\dots]$

Dat is boog  $AD$  en dus boog  $ADC$  is  $106 \text{ grad. } 16 \text{ min.}$

Volgens de 'inventie' van Archimedes geldt:

$7 : 22 = |DF| : \text{omtrek } ADCGFHA$  en met  $|DF| = 10$  volgt:  $\text{omtrek } ADCGFHA = 31\frac{3}{7}$  voet.

En verder met verhoudingen:

$360^\circ : 31\frac{3}{7} = 106^\circ 16' : \text{boog } ADC$ . Dus  $\text{boog } ADC = 9\frac{262}{945}$  voet. [2]

[1] Sinus-tafels zijn tabellen van halve koorde in cirkels met een straal van 100000 in dit geval.

Daarin staan dan gehele getallen. Tegenwoordig zouden we straal 1 gebruiken.

[2] Decimaal 9,2772 ...

Meer exact met  $\pi$  is die booglengte: 9,2729 ...

**Vb 65.** Nu is gevraagd de oppervlakte van het segment  $ADCB$  zoals hiervoor gegeven.

Met voorbeeld 61 volgt: diameter cirkel = 10.

De oppervlakte van het stuk begrensd door boog  $ADC$  en de lijnstukken  $AE$  en  $EC$  is

$$\frac{\text{boog}ADC}{2} * \frac{\text{diameter}}{2} = 4 \frac{1207}{1890} * 5 = 23 \frac{73}{378} \text{ [1]}$$

Hier vanaf de oppervlakte van driehoek  $AEC$  (12) resteert voor het segment:  $11 \frac{73}{378}$ .

[1] Dit is de oppervlakte van de sector  $AEC$ . Het woord sector wordt niet gebruikt.

Er geldt dat  $\text{sectorboog} : 2\pi r = \text{sectoropp} : \pi r^2$ .

$$\text{Dus: } \text{sectoropp} = \text{sectorboog} * \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{\text{sectorboog}}{2} * \frac{\text{diameter}}{2}.$$

**Idem.**

$$\text{Met voorbeeld 64 is nu bekend: } \text{boog}AHFGC = 31\frac{3}{7} - 9\frac{262}{945} = 22\frac{143}{945}.$$

$$\text{Opp}(\text{sector } AHFGC) = 11 \frac{143}{1890} * 5 = 55 \frac{143}{378}.$$

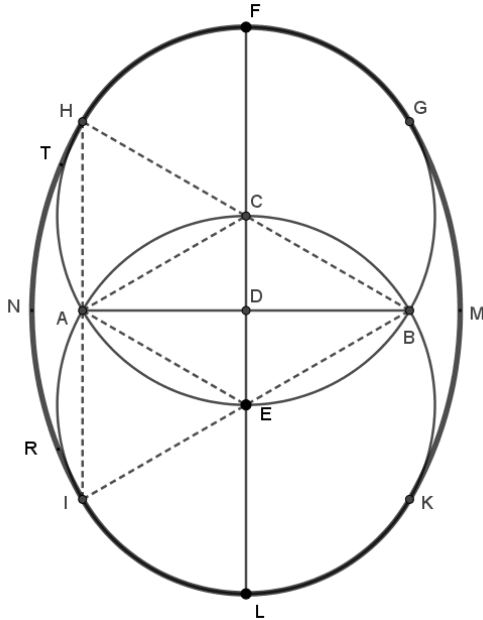
Hier bij geteld  $\text{opp}(\Delta AEC)$  geeft:  $\text{opp}(\text{sector } AFCBA) = 67 \frac{143}{378}$ .

**Idem.**

$$\text{Opp}(\text{cirkel}) = \frac{1}{2} \text{omtrek} * \frac{\text{diameter}}{2} = 15\frac{5}{7} * 5 = 78\frac{4}{7} \text{ [1]}$$

[1] Uiteraard gelijk aan  $67 \frac{143}{378}$  plus  $11 \frac{73}{378}$ . Zo had dit resultaat ook gegeven kunnen worden maar blijkbaar is de formule om de oppervlakte van een sector te bepalen een belangrijk instrument... en ook toepasbaar op een hele cirkel. Want nog sneller was  $\frac{22}{7} * \left(\frac{10}{2}\right)^2$ .

**Vb 66.** Om een ovaal [1] te maken, teken twee even grote cirkels waarvan de ene door het middelpunt van de andere gaat. Zet in een snijpunt  $A$  een passervoet, zonder de passer te veranderen [2], en maak de punten  $H$  en  $I$ . Uit snijpunt  $B$  worden zo de punten  $G$  en  $K$  gemaakt. Zet daarna een passervoet in  $A$  en maak een [cirkel]-boog tussen  $G$  en  $K$ . Evenzo wordt vanuit  $B$  een boog tussen  $H$  en  $I$  gemaakt. Zo is een ovaal gemaakt waarvan de oppervlakte gevraagd wordt.



Stel nu bijvoorbeeld dat de diameter  $|FE| = 14$ .

Dan volgt met voorbeeld 20:

$$opp(\text{halve cirkel } HBGFH) = 77. (*)$$

Dat is ook  $opp(\text{halve cirkel } IBKLI). (*)$

$$\text{Sector } HBINH = \frac{1}{6} \text{ cirkel (straal } HB).$$

$$\text{Dus boog } INH = \frac{1}{6} * 88 = 14 \frac{2}{3}.$$

$$Opp(\text{sector}) = \frac{1}{2} * 14 \frac{2}{3} * 14 = 102 \frac{2}{3}. [3] (**)$$

Nog te vinden is

$$opp(GBKMG) = opp(HTAIRNH). [4]$$

Dus van  $\text{sector}(HBI)$  moet af  $\text{sector}(HCA)$  en  $\text{sector}(AEI)$  en  $\text{vierhoek}(AEBC)$ .

De laatste bestaat uit twee gelijkzijdige driehoeken

$$\text{en dan met voorbeeld 36: } opp = \sqrt{1800 \frac{3}{4}}.$$

Dat geeft [nu verkort]:

$$opp(GBKMG) = 102 \frac{2}{3} - 2 * \frac{1}{6} * 154 - \sqrt{1800 \frac{3}{4}}. (***)$$

Alles bij elkaar dus (\*) en (\*\*) en (\*\*\*)

$$Oppervlakte(\text{ovaal}) = 2 * 77 + 102 \frac{2}{3} + 51 \frac{1}{3} - \sqrt{1800 \frac{3}{4}} = 308 - \sqrt{1800 \frac{3}{4}}. [5]$$

[1] In de tekst staat 'een supersitie ovale'. Het is een bijzondere ovaal, nu in de figuur dik getekend.

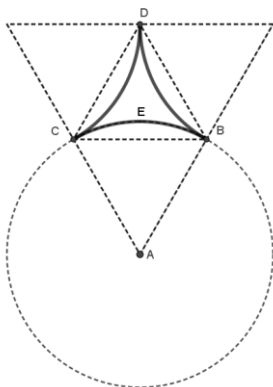
[2] De straal van de begincirkels moet dus worden gebruikt.

[3] Zie de 'formule' van voorbeeld 65.

[4]  $T$  en  $R$  zijn punten op resp. boog  $HA$  en boog  $AI$ . In de figuur staan ze dus raar getekend.

[5] Decimaal 265,5647 ... Exact:  $opp = (2\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3})r^2$  en met  $r = 7$  volgt:  $opp = 265,4408$  ...

**Vb 67.** Gegeven is een driehoek  $DCB$  van gebogen lijnen. Elk boog =  $16 \frac{16}{21}$ . En elke boog is  $\frac{1}{6}$  van een hele cirkel. Wat is de oppervlakte van die driehoek?



Omtrek gehele cirkel =  $6 * 16 \frac{16}{21} = 100 \frac{4}{7}$ . Met voorbeeld 21 volgt voor de diameter 32. En dan  $|AB| = |AC| = |BC| = 16$ .

$$Opp(ACEBA) = 16 * 8 \frac{8}{21} = 134 \frac{2}{21}.$$

$$\text{En dan: } opp(CEB) = 134 \frac{2}{21} - opp(\Delta ABC) = 134 \frac{2}{21} - \sqrt{12288}.$$

En dit driemaal (omdat zulke stukken [segmenten] in de driehoek  $BCD$  liggen) van de driehoek  $BCD$  met oppervlakte  $\sqrt{12288}$  afgetrokken, resteert voor deze 'ingekromden' driehoek  $BCD$ :

$$oppervlakte = \sqrt{196608} - 402 \frac{2}{7}. [= 41,119292 ...]$$

$$\text{En dit is bijna } 41 \frac{167}{1400}. [= 41,119285 ...]$$

**Opmerking:**

De benaderende waarde is zeer goed maar lijkt uit de lucht te vallen. Hoe Petri (Brasser neemt dit gewoon over) dat gevonden heeft, is niet vermeld en is de schrijver dezes onbekend, maar er is wel iets over te zeggen.

In  $(\sqrt{196608} - 402\frac{2}{7})$  bevat de tweede term een noemer 7. Mogelijk is het doel nu de wortel te benaderen met een getal waarbij ook een noemer 7 voorkomt.

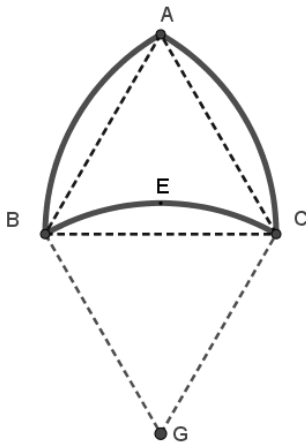
$\sqrt{196608} = 443,40500 \dots \approx 443 + \frac{405}{1000}$ . Te zoeken is een getal  $n$  met  $\frac{n}{7} = \frac{405}{1000}$ . Dat geeft:  $n = 2,835$ .

Maar  $n$  wel graag geheel dus:  $\frac{405}{1000} = \frac{2,835}{7} = \frac{2835}{7000} = \frac{567}{1400}$ .

En dan volgt:  $\sqrt{196608} - 402\frac{2}{7} \approx 443\frac{567}{1400} - 402\frac{400}{1400} = 41\frac{167}{1400}$ .

**Vb 68.** Gegeven is een driehoek van drie kromme bogen(!) waarvan  $AB$  en  $AC$  naar buiten zijn gebogen en  $BC$  naar binnen. Elke boog =  $16\frac{16}{21}$ . En elke boog is  $\frac{1}{6}$  van een hele cirkel.

[Wat is de oppervlakte van die driehoek?]



Met voorbeeld 67 volgt:

$$opp(BECB) = 134\frac{2}{21} - \sqrt{12288}.$$

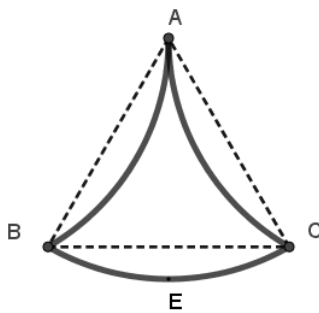
$$\text{En: } opp(\triangle ABC) = \sqrt{12288}.$$

Aan deze driehoek zijn twee gelijke bogen [segmenten] naar buiten gericht en één naar binnen dus:

$$opp('uytgebogen'\triangle ABC) = 134\frac{2}{21}.$$

**Vb 69.** Gegeven is een driehoek van drie kromme lijnen waarvan er twee naar buiten zijn gebogen en een naar binnen. Elke boog =  $16\frac{16}{21}$ . En elke boog is  $\frac{1}{6}$  van een hele cirkel.

[Wat is de oppervlakte van die driehoek?]



Met voorbeeld 67 volgt:

$$|AB| = |BC| = |AC| = 16.$$

$$opp(BECB) = 134\frac{2}{21} - \sqrt{12288}.$$

$$\text{En: } opp(\triangle ABC) = \sqrt{12288}.$$

Er volgt:

$$opp('kromzijdigen'\triangle ABC) = \sqrt{49152} - 134\frac{2}{21}. [= 87,6072 \dots]$$

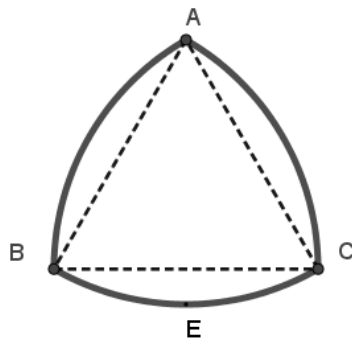
$$\text{En dit is bijna } 87\frac{127}{210}. [= 87,6047 \dots] [1]$$

[1] Via  $\sqrt{49152} = 221,7025 \dots \approx 221 + \frac{7}{10} = 221 + \frac{147}{210}$ .

**Vb 70.** Gegeven is een driehoek van drie 'uytghebogen' kromme lijnen.

Elke boog =  $16 \frac{16}{21}$ . En elke boog is  $\frac{1}{6}$  van een hele cirkel.

[Wat is de oppervlakte van die driehoek?]



Met voorbeeld 67 volgt:

$$|AB| = |BC| = |AC| = 16.$$

$$opp(BECB) = 134 \frac{2}{21} - \sqrt{12288}.$$

Drie keer deze oppervlakte gevoegd bij  $opp(\Delta ABC) = \sqrt{12288}$  geeft:

$$opp(uytghebogen \Delta ABC) = 402 \frac{2}{7} - \sqrt{49152}. [= 180,5832 ...]$$

$$\text{En dit is bijna: } 180 \frac{9}{14} [= 180,6428 ...] [1]$$

[1] Brasser gebruikt:  $402 \frac{2}{7} - \left(221 + \frac{9}{14}\right) = 180 \frac{9}{14}$  met een relatief grote afwijking. (+10%)

Echter:  $\sqrt{49152} = 221,7025 ... \approx 221 + \frac{7}{10} = 221 + \frac{98}{140}$ .

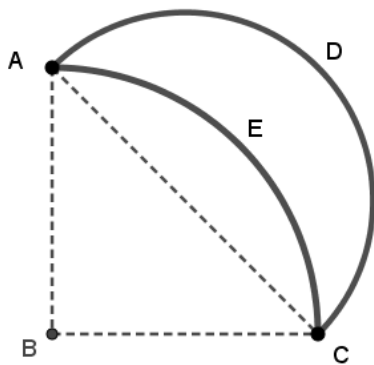
Met  $\frac{10}{14}$  dichter bij  $\frac{98}{140}$  zou volgen:  $402 \frac{2}{7} - \left(221 + \frac{10}{14}\right) = 180 \frac{8}{14} = 180,5714 ...$  (-2%)

Opmerkelijk: Petri gebruikt in *Geometria* juist wel deze laatste benadering!

Meer exact:  $opp = \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$  en met  $r = 16$  volgt:  $opp = 180,4213 ...$

**Vb 71.** Gegeven is een gebied  $ADCEA$  [maansikkel] met  $boogAEC = 5 \frac{1}{2}$ . Dit is  $\frac{1}{4}$  van een cirkel waarvan deze boog deel is.  $AC$  is de diameter van een cirkel waarvan  $ADC$  de halve omtrek is.

Wat is de oppervlakte van figuur  $ADCEA$ ?



De omtrek van de hele cirkel met boog  $AEC$  is dus 22.

Dus de diameter daarvan is 7 en er volgt:  $|AB| = |BC| = 3 \frac{1}{2}$ .

Met voorbeeld 1 volgt:  $|AC| = \sqrt{24 \frac{1}{2}}$ . [wordt verder niet gebruikt]

Volgens propositie 31 van [boek] 6 van Euclides geldt: [1]

$$opp(\text{halve cirkel} ACDA) = \frac{1}{4} opp(\text{cirkel bg } AEC) [2]$$

$$= opp(\text{sector } BAEC).$$

Haal bij allebei segment  $AECA$  weg.

Er resteert:

$$opp(ADCEA) = opp(\Delta ABC) = 3 \frac{1}{2} * 1 \frac{3}{4} = 6 \frac{1}{8}.$$

[1] In rechthoekige driehoeken is de figuur op de hypotenusas gelijk aan de som van gelijkvormige figuren op de rechthoekszijden.

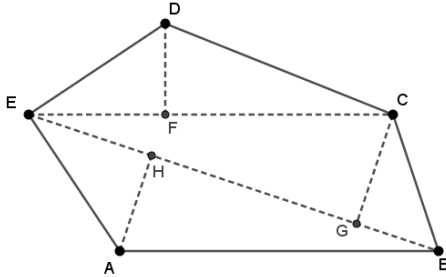
Som van de oppervlaktes van twee halve cirkels op de rechthoekszijden is  $2 * \frac{1}{2}\pi \left(\frac{z}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi z^2$ .

Oppervlakte halve cirkel op de hypotenusas is  $\frac{1}{2}\pi \left(\frac{z\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi z^2$  dus gelijk.

[2] Bedoeld is hier de cirkel met middelpunt  $B$  en straal  $|AB| = z$ .  $Opp(\text{cirkel bg } AEC) = \pi z^2$ .

## Veelhoeken en oppervlakten 2

**Vb 72.** Gegeven is een stuk grond  $ABCDE$  met  $|BE| = 61 \text{ roeden } 8 \text{ voeten}$ . [afgekort:  $61r8v$ ]  
 Loodlijn  $|AH| = 16r4v$ , loodlijn  $|GC| = 22r6v$ ,  $|EC| = 51r$ , loodlijn  $|DF| = 10r4v$ .  
 Gevraagd is de totale oppervlakte als  $13 \text{ voet} = 1 \text{ roede}$ ,  $600 \text{ [vierkant]roede} = 1 \text{ morgen}$ .



De oplossing kan uit volgende bewerkingen begrepen worden.

$$\begin{aligned} opp(EABC) &= \frac{1}{2}(|AH| + |GC|) * |BE| \\ &= (19r + 5v) * (61r + 8v) = 1159rr + 457rv + 40vv \\ &= 1194rr + 2rv + 40vv. [1] \end{aligned}$$

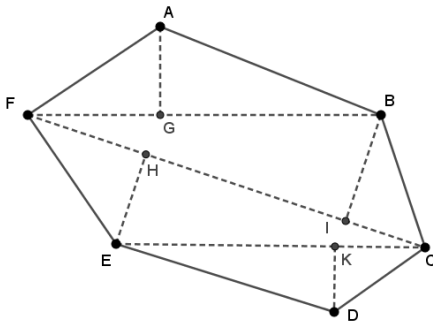
$$\begin{aligned} opp(EDC) &= \frac{1}{2}|DF| * |EC| = (5r + 2v) * 51r = \\ &= 255rr + 102rv = 262rr + 11rv. \end{aligned}$$

Samengevoegd:  $opp(ABCDE) = 1457rr + 0rv + 40vv$ .  
 En dit is:  $2 \text{ morgen } 257 \text{ roede } 40 \text{ voet}$  in oppervlakte.

$$[1] 457rv = 455rv + 2rv = \frac{455}{13}rr + 2rv = 35rr + 2rv.$$

$rr$  wordt genoteerd als  $\square \text{ roede}$ ,  $vv$  als  $\square \text{ voet}$ .

**Vb 73.** Gegeven is een stuk grond  $ABCDEF$  waarvan de oppervlakte gevraagd wordt. Met  
 $|AG| = 9r10v6d$  ('duymen'),  $|BI| = 16r$ ,  $|DK| = 12r10v8d$ ,  $|EH| = 12r11v9d$ ,  $|FB| = 38r$ ,  
 diagonaal  $|CF| = 46r4v2d$ ,  $|CE| = 35r1v2d$ .  
 $1 \text{ morgen} = 600 \text{ roede}$  [opp],  $1 \text{ roede}$  [lengte] =  $13 \text{ voet}$ ,  $1 \text{ voet} = 11 \text{ duimen}$ . [1]



Reken alles om naar duimen [!] en er volgt:

$$opp(\triangle ABF) = \frac{1}{2}|AG| * |BF| = 3811951. [2]$$

$$opp(\triangle CDE) = \frac{1}{2}|EC| * |DK| = 4601506.$$

$$opp(ECBF) = \frac{1}{2}(|BI| + |EH|) * |CF| = 13691808.$$

Totaal:  $opp(ABCDEF) = 22105265 \text{ [vierkante]duimen}$ .

$$\text{Dit zijn } \frac{22105265}{121} = 1822688 \text{ vvoet } 17 \text{ vduim}. [3]$$

Ofwel:  $1080 \text{ roede } 168 \text{ vvoet } 17 \text{ vduimen}$ .

En dit is:  $1 \text{ morgen } 480 \text{ roeden } 168 \text{ vvoet } 17 \text{ vduimen}$   
 voor de totale oppervlakte.

[1] Wat dat allemaal is in huidige eenheden is de vraag. Enige omrekening zou als volgt gaan.

Stel (\*):  $1 \text{ voet in lengte} = 30,5 \text{ cm}$ . Dan volgt:  $1 \text{ duim}$  is dan  $\frac{30,5}{11} = 2,77 \dots \text{ cm}$ .

$1 \text{ roede in oppervlakte}$  is dus  $13^2 * \text{vierkante voet} = 15,72 \dots \text{ m}^2$ .

$1 \text{ morgen}$  is  $600 \text{ roeden}$  en dat is dan ongeveer  $9432 \text{ m}^2$ , iets minder dan  $10000 \text{ m}^2 = 1 \text{ ha}$ .

Met een morgen wordt een gebied aangeduid dat in een ochtend kon worden geploegd.

Overigens: een Veluwe morgen is  $9300 \text{ m}^2$ . Bron: Wikipedia.

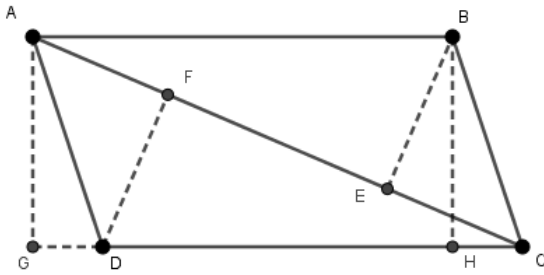
(\*) Nu internationaal:  $1 \text{ voet} = 30,48 \text{ cm} = 12 \text{ duim}$ . Dan volgt:  $1 \text{ d} \approx 2,54 \text{ cm} = 1 \text{ inch}$ .

[2] Want  $|AG| = ((9 * 13) + 10)11 + 6 = 1403d$  en  $|BF| = 5434d$ . Andere omrekeningen soortgelijk.

[3]  $1 \text{ vvoet} = 11^2 \text{ vduim}$  (vierkante duim) en  $1 \text{ roede(opp)} = 13^2 \text{ vvoet}$ . (vierkante voet)

Woordgebruik voor lengte en oppervlaktematen loopt door elkaar in de tekst.

**Vb 74.** Gegeven is een vierhoek  $ABCD$  met  $|AD| = |BC| = 10$ ,  $|AB| = |DC| = 17$ .  
Diagonaal  $|AC| = 21$ . Gevraagd is de oppervlakte.



Met voorbeeld 6 volgt voor de loodlijnen:  
 $|DF| = |BE| = 8$ .  
En dan:  $opp(ABCD) = 8 * |AC| = 168$ .

**Anders:**

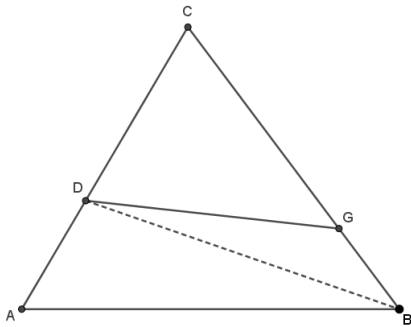
Stel  $|GD| = 1x$ . Dan volgt  $|GC| = 17 + 1x$ .

$$|AD|^2 - |GD|^2 = 100 - 1x^2 = |AG|^2 = |AC|^2 - |GC|^2 = 441 - (289 + 34x + 1x^2).$$

Dus:  $34x = 52$ . Dus:  $|GD| = 1x = 1\frac{9}{17}$ . En dan:  $|BH| = |AG| = \sqrt{|AD|^2 - |GD|^2} = \sqrt{97\frac{191}{289}} = 9\frac{15}{17}$ .

$Opp(ABCD) = |AG| * |DC| = 168$ . Als eerder [gevonden].

**Vb 75.** Gegeven is een driehoek  $ABC$  met  $|AB| = 30$ ,  $|AC| = 26$ ,  $|BC| = 28$  roeden. Op lijn  $AC$  ligt een punt [in  $D$ ] met  $|CD| = 16$  roeden. Vanaf hier wil men een [rechte] weg maken die de driehoek in twee gelijke delen [kwa oppervlakte] zal verdelen. Vraag: waar komt die weg uit op lijn  $BC$ ? [Dat punt is  $G$ .]



Met voorbeeld 4 volgt:

$opp(ABC) = 336$  [vierkante] roeden.

Dus moet aan elke kant van de weg 168 *vr* komen.

$O(ADB) : O(CDB) = |AD| : |DC| = 10 : 16$ .

Dus:  $O(ADB) = 129\frac{3}{13}$ ,  $O(CDB) = 206\frac{10}{13}$ .

En dan:

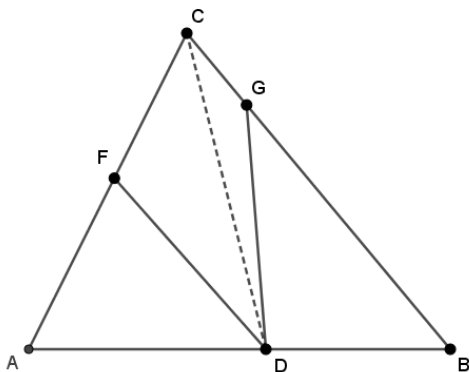
$O(CDB) : O(CDG) = 206\frac{10}{13} : 168 = 28 : |CG|$ .

Dus:

$|CG| = 22\frac{3}{4}$ ,  $|GB| = 5\frac{1}{4}$  roeden...

**Vb 76.** Gegeven is een driehoek als hierboven. Op de basis ligt punt  $D$  met  $|AD| = 18$  en  $|DB| = 12$ . Vanaf daar wil men de driehoek in drie gelijke delen [kwa oppervlakte] verdelen.

Vraag: waar komt men dan uit op de lijnen  $BC$  en  $AC$ ? [Dat zijn de punten  $F$  en  $G$ .]



Met voorbeeld 4 volgt:

$opp(ABC) = 336$  [vierkante] roeden.

Dus moet elk stuk 112 *vr* worden.

$O(ADC) : O(BDC) = |AD| : |DB| = 18 : 12$ .

Dus:  $O(ADC) = 201\frac{3}{5}$ ,  $O(BDC) = 134\frac{2}{5}$  roeden.

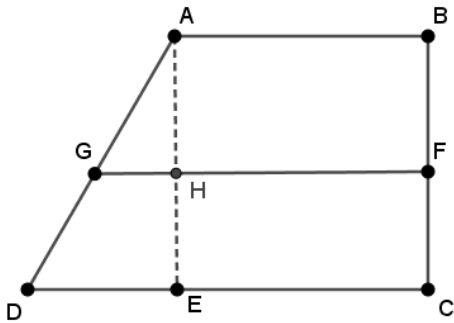
En dan:  $O(ADC) : O(AFD) = 201\frac{3}{5} : 112 = 26 : |AF|$ .

Dus:  $|AF| = 14\frac{4}{9}$ ,  $|FC| = 11\frac{5}{9}$  roeden.

En dan:  $O(BDC) : O(BDG) = 134\frac{2}{5} : 112 = 28 : |BG|$ .

Dus:  $|BG| = 23\frac{1}{3}$ ,  $|GC| = 4\frac{2}{3}$  roeden.

**Vb 77.** Gegeven is een vierhoek  $ABCD$  met  $|AB| = 24$ ,  $|BC| = 16$ ,  $|DC| = 36$  en  $DC$  evenwijdig aan  $AB$ . Verdeel deze vierhoek in twee gelijke delen zodanig dat de 'scheiden'-lijn  $FG$  evenwijdig is aan  $AB$ . Gevraagd:  $|BF|$ ,  $|GF|$ .



$$Opp(trap\ ABCD) = \frac{1}{2}|BC| * (|AB| + |CD|) = 480.$$

$$Dus: O(ABFG) = O(GFCD) = 240.$$

$$Stel: |AH| = |BF| = 1x.$$

$$Met\ |AE| : |DE| = 16 : 12 = |AH| : |GH| \text{ volgt:}$$

$$|GH| = \frac{3}{4}x. \text{ En dan:}$$

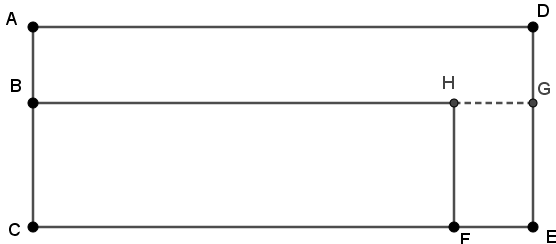
$$O(ABFG) = \frac{1}{2}x * \left(24 + 24 + \frac{3}{4}x\right) = 240.$$

$$Dus: 3x^2 + 192x = 1920 \text{ ofwel } 1x^2 + 64x = 640.$$

$$\text{Gevolg: } |BF| = 1x = \sqrt{1664} - 32.$$

$$\text{En: } |GF| = 24 + \frac{3}{4}x = \sqrt{936}.$$

**Vb 78.** Gegeven is een vierhoek [rechthoek]  $ACDE$  met  $|AC| = |DE| = 8$ ,  $|AD| = |CE| = 20$ .  $Opp(ACDE) = 160$ . Verdeel deze vierhoek in twee gelijke delen zodat [zie figuur]:  $|AB| = |HG| = |FE|$ . Vraag:  $|AB|$ ?



$$\text{Stel: } |AB| = 1x.$$

$$\text{Dan volgt: } opp(BHFC) = (8 - 1x)(20 - 1x).$$

$$\text{Dus: } 160 - 28x + 1x^2 = 80.$$

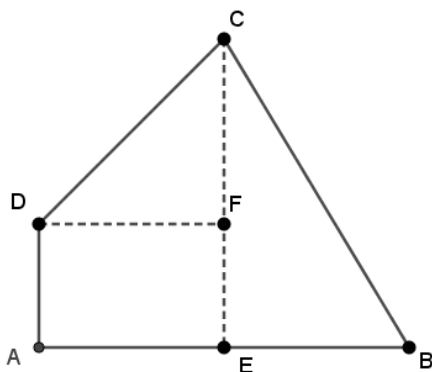
$$\text{Ofwel: } 1x^2 + 80 = 28x.$$

$$\text{Dus: } |AB| = |FE| = 1x = 14 - \sqrt{116}.$$

$$\text{En: } |BC| = 8 - 1x = \sqrt{116} - 6.$$

$$\text{En: } |CF| = 20 - 1x = \sqrt{116} + 6.$$

**Vb 79.** Gegeven is een meetkundige figuur  $ABCD$  met  $|AD| = 8$ ,  $|AB| = 24$ ,  $|BC| = \sqrt{536}$  en  $|DC| = \sqrt{128} + \sqrt{24}$ . Gevraagd:  $|CF|$ ,  $|DF|$ ,  $|CE|$  en  $|EB|$ ? [ $AD \perp AB$ ,  $CE \perp AB$ ,  $DF \perp CE$ ]



$$\text{Stel: } |CE| = 1x. \text{ Dan: } |CF| = 1x - 8.$$

$$|EB| = \sqrt{536 - 1x^2}.$$

$$|DC| = \sqrt{128} + \sqrt{24} = \sqrt{|DF|^2 + |CF|^2}.$$

[1]

$$2560x^2 = 32768x - \sqrt{12582912}x^2 + \sqrt{51539607552} + 174080.$$

$$\text{Ofwel: } 1x^2 = 12\frac{4}{5}x - \sqrt{1\frac{23}{25}}x^2 + \sqrt{7864\frac{8}{25}} + 68.$$

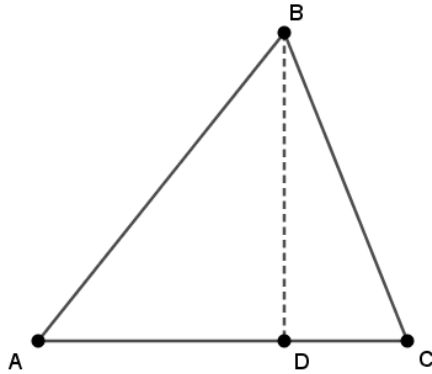
$$|CE| = 1x = 16 + \sqrt{12}. \text{ [2]}$$

$$|CF| = 8 + \sqrt{12}, |EB| = 16 - \sqrt{12}, |DF| = 8 + \sqrt{12}.$$

[1] Nu erg verkort. Er wordt tweemaal gekwadraterd met grote getallen en daarna weer door 2560 gedeeld, vandaar de breuken onder de wortels.

[2] Met de aanpak van kwadratische vergelijkingen van type 4 is dit het resultaat van een oefening in secuur werk met twee-namige getallen. Hoe dit te doen behandelt Brasser voorafgaand aan de *Geometria*.

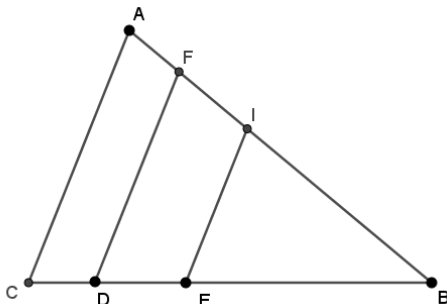
**Vb 80.** Gegeven is een driehoek  $ABC$  met  $|AB| = |BC| + 7$  (roeden) en  $|AD| = |DC| + 11$ . De loodlijn  $|BD| = 12$  roeden. Gevraagd: oppervlakte driehoek en de lengte van de zijden.



Stel:  $|DC| = 1x$ , dan is  $|AD| = 1x + 11$ .  
 $|BC| = \sqrt{|BD|^2 + |DC|^2} = \sqrt{144 + 1x^2}$ .  
 Dus:  $|AB| = 7 + \sqrt{144 + 1x^2}$ .  
 En:  $|AD| = \sqrt{|AB|^2 - |DC|^2} =$   
 $= \sqrt{49 + 1x^2 + \sqrt{28224 + 196x^2}} = 1x + 11$ .  
 Er volgt:  $\sqrt{28224 + 196x^2} = 22x + 72$ .  
 En na nogmaals kwadrateren [en uitschrijven] volgt:  
 $1x^2 + 11x = 80$ .  
 Dus:  $|DC| = 1x = 5$ . En:  $|AD| = 16$ .  
 Dus:  $Opp(ABC) = \frac{1}{2} 12 * 21 = 126$  roeden.  
 $|BC| = \sqrt{144 + 25} = 13$ ,  $|AB| = 20$ . [1]

[1] Dat  $|AB|$  te vinden is zowel met Pythagoras als met  $(|BC| + 7)$  wordt getoond.

**Vb 81.** Gegeven is een driehoek  $ABC$  met  $|AC| = \sqrt{1352}$ ,  $|AB| = \sqrt{1800}$ ,  $|BC| = \sqrt{1568}$ . Men wil die verdelen in drie gelijke stukken zodanig dat de deellijnen  $FD$  en  $IE$  evenwijdig lopen aan  $AC$ . De vraag is waar die lijnen de zijden  $AB$  en  $BC$  snijden. Ofwel:  $|BD|$ ,  $|BE|$ ,  $|BF|$ ,  $|BI|$ ?



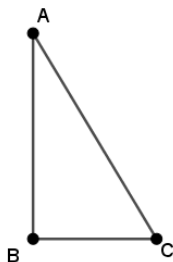
Omdat  $FD$  en  $IE$  evenwijdig lopen aan  $AC$  volgt uit propositie 2 van boek 6 van Euclides:  
 $|BD| : |BC| = |DF| : |AC| = |BF| : |BA|$ .  
 En:  $|BE| : |BC| = |EI| : |AC| = |BI| : |BA|$ .  
 Als nu kwadraten gebruikt worden, dan volgt: [1]  
 $|IE|^2 = \frac{1}{3}|AC|^2$ ,  $|DF|^2 = 2|IE|^2$ .  
 $|BI|^2 = \frac{1}{3}|AB|^2$ ,  $|BF|^2 = 2|BI|^2$ .  
 $|BE|^2 = \frac{1}{3}|BC|^2$ ,  $|BD|^2 = 2|BE|^2$ .

Er volgt:  $|IE| = \sqrt{450\frac{2}{3}}$ ,  $|DF| = \sqrt{901\frac{1}{3}}$ ,  $|BI| = \sqrt{600}$ ,  $|BF| = \sqrt{1200}$ ,  $|BE| = \sqrt{522\frac{2}{3}}$ ,  $|BD| = \sqrt{1045\frac{2}{3}}$ .

[1] Gebruikt wordt nu propositie 19 uit boek 6 van de Elementen:

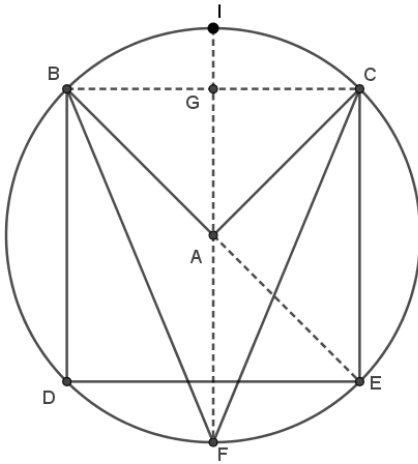
*Gelijkvormige driehoeken verhouden zich tot elkaar (in opp) als de kwadraten van overeenkomstige zijden.*

**Vb 82.** Gegeven is een rechthoekige driehoek  $ABC$  met  $|BC| = 4 + \sqrt{32}$ ,  $|AB| + |AC| = 12 + \sqrt{288}$ . Gevraagd:  $|AB|$ ,  $|AC|$ .



Stel:  $|AB| = 1x$ , dan  $|AC| = 12 + \sqrt{288} - 1x$ .  
 Dan volgt met:  $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$  [en verkort]:  
 $384 + \sqrt{131072} = 24x + \sqrt{1152x^2}$ .  
 Ofwel:  $1x + \sqrt{2x^2} = 16 + \sqrt{227\frac{5}{9}}$ .  
 $|AB| = 1x = \frac{16 + \sqrt{227\frac{5}{9}}}{1 + \sqrt{2}} = 5\frac{1}{3} + \sqrt{56\frac{8}{9}}$ .  $|AC| = 6\frac{2}{3} + \sqrt{88\frac{8}{9}}$ .

**Vb 83.** Gegeven is een cirkel met zes lijnstukken en met  $|AB| = |AC|$ . [Stralen van de cirkel.]  $|BD| = |CE| = \sqrt{450}$  en dit is de lengte van de zijde van het grootste vierkant in deze cirkel. Verder geldt:  $|BF| = |CF|$ . Gevraagd: de diameter van de cirkel en  $|CF|$ .



$BE$  is een diameter en  
 $|BE| = \sqrt{|BC|^2 + |CE|^2} = \sqrt{900} = 30$ .

En dan:  $|AC| = 15, |GC| = \frac{1}{2}|BC|$ .

$|AG| = \sqrt{225 - 112\frac{1}{2}} = \sqrt{112\frac{1}{2}}$ .

$|FG| = 15 + \sqrt{112\frac{1}{2}}$ .

$|CF|^2 = |FG|^2 + |GC|^2 = 337\frac{1}{2} + \sqrt{101250} + 112\frac{1}{2}$ .

$|CF| = \sqrt{450 + \sqrt{101250}}$ .

**Vb 84.** Bij eenzelfde figuur.  $|CF| = \sqrt{450 + \sqrt{101250}}$ .  $BD$  is de zijde van het grootste vierkant in deze cirkel. Gevraagd: de diameter van de cirkel.

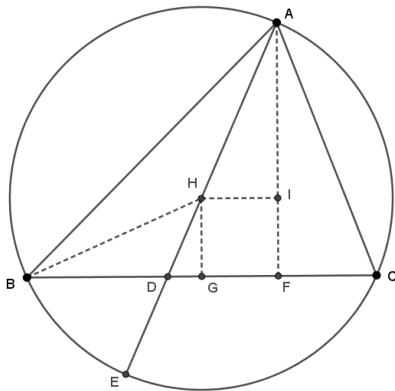
Stel: diameter  $|BE| = 1x$ . Dan volgt:  $|BE|^2 = |BC|^2 + |CE|^2$  dus:  $|BC| = \sqrt{\frac{1}{2}x^2}$ .

En:  $|GC| = \sqrt{\frac{1}{8}x^2}$ . En er volgt:  $|FG| = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{8}x^2}$ .

$|FC|^2 = 450 + \sqrt{101250} = \frac{1}{8}x^2 + \left(\frac{3}{8}x^2 + \sqrt{\frac{1}{8}x^4}\right) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{\frac{1}{8}x^4}$ .

Na deling door  $\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}\right)$  volgt:  $1x^2 = 900, |BE| = 1x = 30$ .

**Vb 85.** In bijgaande cirkel is een driehoek beschreven met  $|AB| = 40, |BC| = 32, |AC| = 28$ .  $[AF, HG$  en  $HI$  zijn loodlijnen.] Gevraagd: diameter  $|AE|$  en  $|AD|, |DE|, |BD|, |DC|$ .



Met vb. 6 volgt:  $|BF| = 28\frac{3}{4}, |FC| = 3\frac{1}{4}, |AF| = \sqrt{773\frac{7}{16}}$ .

Met vb. 40 volgt:  $|AE| = |AB| * \frac{|AC|}{|AF|} = \sqrt{1621\frac{421}{495}}$ . [1]

$|IF| = |HG| = \sqrt{|BH|^2 - |BG|^2} = \sqrt{149\frac{229}{495}}$ .

Dus:  $|AI| = \sqrt{242\frac{7129}{7920}}$ .

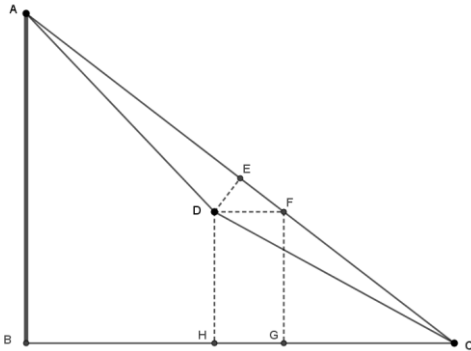
$|AD| : |AF| = |AH| : |AI|$  en dan:  $|AD| = \sqrt{1291\frac{126221}{1923769}}$ .

$|ED| = \sqrt{18\frac{802356514}{952265655}}$ . En  $|BD| = 5\frac{1385}{1387}, |DC| = 26\frac{2}{1387}$ .

[1] In de tekst een paar zetfouten:  $|FC| = \frac{1}{4}$  en er is een verwijzing naar vb. 4 in plaats van vb. 40.

NB: Nu is alles met *WolframAlpha* gedaan maar indertijd... Rekenmeesterlijk!

**Vb 86.** Gegeven is een toren  $|AB| = 96$  voet. Een 'kamer-speelder' ofwel een vlieger langs touwen [1] heeft een touw strak gespannen van  $A$  tot op de grond in  $C$ .  $|AC| = 160$  voet,  $|BC| = 128$  v. Als nu vanuit  $A$  de vlieger 80 voet gevlogen heeft langs het [gespannen] touw, dan is dat op de helft [punt  $E$ ]. Door zijn zwaarte is hij 9 voet 'gezakt': de bovenste helft 6 v, de onderste helft 3 v. Dan is de 'springer' in punt  $D$  en geldt:  $|AD| = 86$  v,  $|DC| = 83$  v. [2]  
De vraag is hoeveel  $D$  boven de aarde is.



Met vb. 6 volgt:  $|AE| = 81 \frac{187}{320}$ ,  $|CE| = 78 \frac{133}{320}$ .

En:  $|DE| = \sqrt{739 \frac{101351}{102400}}$ .

$\triangle EDF$  is gelijkvormig met  $\triangle GFC$  en met  $\triangle BAC$ , want  $DF$  is evenwijdig aan  $BC$ .

Dus met  $|AB| : |BC| = |DE| : |EF|$  volgt:

$|EF| = \sqrt{1315 \frac{3439}{6400}}$ . Dus:  $|FC| = 78 \frac{133}{320} - |EF|$ .

En met  $|AC| : |AB| = |FC| : |FG|$  volgt:

$|DH| = |FG| = 47 \frac{79}{1600} - \sqrt{473 \frac{94951}{160000}}$ .

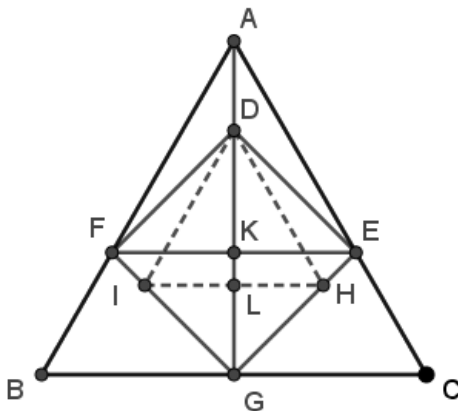
[1] Tegenwoordig heet dat 'tokkelen': aan een katrol over een staaldraad naar beneden suizen.

[2] De vlieger is dus niet in punt  $E$ . Dat is een beetje warrig beschreven. En  $|AE| \neq 80$  blijkt.

Omdat  $|AD| + |DC| = 169$  v is blijkbaar het touw  $9$  v uitgerekt.

$|AD| = 80 + 6 = 86$  v (bovenste helft),  $|DC| = 80 + 3 = 83$  v (onderste helft).

**Vb 87.** Gegeven is een gelijkzijdige driehoek  $ABC$  waarin een vierkant staat [zoals in de figuur]. Elke zijde daarvan is 4. Gevraagd is de lengte van een zijde van driehoek  $ABC$ .



$|FE| = |DG| = \sqrt{|FD|^2 + |FG|^2} = \sqrt{32}$ .

Dan ook:  $|FA| = |AE| = \sqrt{32}$ . [1]

En:

$|KG| = |FK| = \sqrt{8}$ .

Gevolg:

$|AK| = \sqrt{|AF|^2 - |FK|^2} = \sqrt{24}$ .

Dus:  $|AG| = \sqrt{24} + \sqrt{8}$ .

Omdat  $|AK| : |FK| = |AG| : |BG|$  volgt:

$|BG| = \sqrt{8} + \sqrt{2 \frac{2}{3}}$ .

Dus:  $|BC| = 2 * |BG| = \sqrt{32} + \sqrt{10 \frac{2}{3}}$ .

[1] Volgt direct uit het feit dat  $\triangle FAE$  gelijkbenig is met tophoek  $60^\circ$  dus gelijkzijdig.

**Vb 88.** Zie vorige figuur. Zijde driehoek  $= \sqrt{32} + \sqrt{10 \frac{2}{3}}$ . Wat is de zijde van het vierkant?

Stel:  $|FG| = 1x$ . Dan volgt:  $|DG| = |FE| = |FA| = |AE| = \sqrt{2x^2}$ .  $|AK| = \sqrt{1 \frac{1}{2}x^2}$ .

En verder [verkort]:  $|BC| = 2 * |BG| = \sqrt{2x^2} + \sqrt{\frac{2}{3}x^2} = \sqrt{32} + \sqrt{10 \frac{2}{3}}$ . Dan:  $|FG| = 1x = 4$ .

**Vb 89.** Zie vorige figuur. In vierkant  $GFDE$  met elk zijde gelijk 4 is een gelijkzijdige driehoek gezet, zo groot als mogelijk is te maken met tophoek  $D$ . Wat is de lengte van elke zijde van die driehoek  $[DIH]$ ?

Stel:  $|ID| = 1x$ . Dan volgt:  $|FI| = \sqrt{|ID|^2 - |FD|^2} = \sqrt{1x^2 - 16}$ . En:  $|IG| = 4 - \sqrt{1x^2 - 16}$ .

$|ID|^2 = |IH|^2 = 2 * |IG|^2 = 2x^2 - \sqrt{256x^2 - 4096} = 1x^2$ .

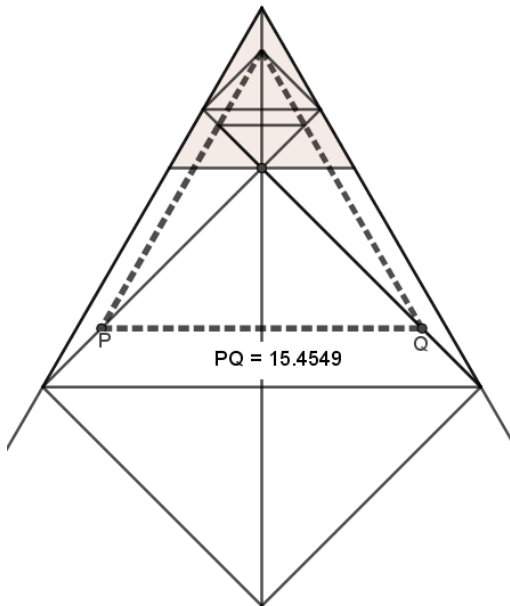
Dat wordt:  $1x^4 = 256x^2 - 4096$  ofwel:  $1x^4 + 4096 = 256x^2$ .

Gevolg:  $1x^2 = 128 - \sqrt{12288}$ . [1] En dan:  $|IH| = |ID| = 1x = \sqrt{128 - \sqrt{12288}}$ .

[1] Nu volgt:  $x_1 = \sqrt{128 - \sqrt{12288}} = 4,1411 \dots = |IH|$ .

Anders zou volgen:  $x_2 = \sqrt{128 + \sqrt{12288}} = 15,4549 \dots$

Maar  $|IH| < |FE| = 4\sqrt{2} = 5,6568 \dots$  In de tekst wordt daarover geen opmerking gemaakt.



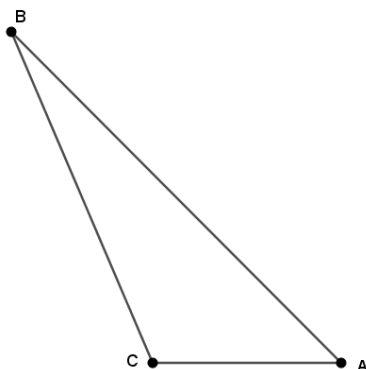
**Toevoeging:**

De andere oplossing  $x_2 = 15,4549 \dots$  past bij de situatie hiernaast. Het vierkant heeft nu raakpunten op de verlengden van twee zijden en ligt onder driehoek  $ABC$ . Dat geeft de gelijkzijdige driehoek met de gestippelde zijden van lengte  $x_2$ .

De zijden van het nu gebruikte vierkant hebben een lengte van  $4 * \frac{x_2}{x_1} \approx 15$ .

**Vb 90.** Gegeven is driehoek  $ABC$  met  $|AB| = 37$ ,  $|BC| = 23 - \sqrt{20} + \sqrt{168}$  en  $|AC| = 23 + \sqrt{20} - \sqrt{168}$ . [Zetfout in de tekst: wortelteken bij 20 ontbreekt.]

Wat is de oppervlakte?



Met voorbeeld 4 [formule van Heron] volgt:

$$[s = \frac{1}{2}(a + b + c) =] 41\frac{1}{2}.$$

$$Opp = \sqrt{41\frac{1}{2} * 4\frac{1}{2} * (18\frac{1}{2} + \sqrt{20} - \sqrt{168}) * (18\frac{1}{2} - \dots)}.$$

En dat wordt uitgeschreven:

$$Opp = \sqrt{28806\frac{3}{16} + \sqrt{468727560}}. [!]$$

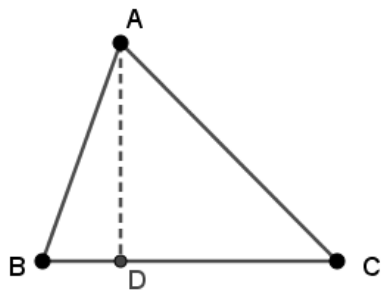
**Vb 91.** Soortgelijk voor een driehoek met  $|AC| = 12$ ,  $|BC| = 16$ ,  $|AB| = \sqrt{400 + \sqrt{45056}}$ .  
Wat is de oppervlakte?

Tel alle drie zijden bij elkaar, daarvan de helft, is  $14 + \sqrt{100 + \sqrt{2816}}$ , daar vanaf elke zijde, en deze drie resten nog met de halve som van de drie zijden vermenigvuldigen.

[In feite de procedure bij de formule van Heron en nu geen verwijzing naar voorbeeld 4.]

Dan volgt:  $opp = \dots = \sqrt{6400} = 80$ .

**Vb 92.** Gegeven is een driehoek  $ABC$  met loodlijn  $|AD| = 6$  en  $|BC| = 13$ .  $|AB| : |AC| = 2 : 3$ .  
Wat zijn de lengtes van alle lijnstukken?



Stel:  $|BD| = 1x$ . Dan volgt:  $|DC| = 13 - 1x$ .

$$|AB|^2 = 36 + 1x^2.$$

$$|AC|^2 = 36 + 169 - 26x + 1x^2.$$

En met  $|AB|^2 : |AC|^2 = 4 : 9$  volgt:

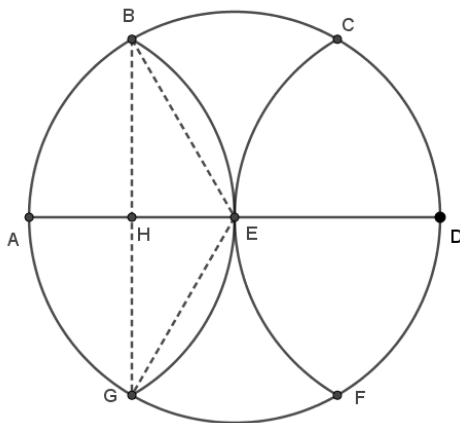
$$324 + 9x^2 = 820 - 104x + 4x^2.$$

$$\text{Ofwel: } 1x^2 + 20\frac{4}{5}x = 99\frac{1}{5}. \text{ Dus: } |BD| = 1x = 4.$$

Verder volgt:  $|DC| = 13 - 1x = 9$ .

$$|AB| = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}. \quad |AC| = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117}.$$

**Vb 93.** Gegeven is een cirkel met diameter  $|AD| = 91\frac{7}{11} - \sqrt{3072}$ . Daarin zijn twee ovaal gezet,  $ABEG$  en  $CEFD$ . Gevraagd: de oppervlakte van die ovaal en van 'den krommen' driehoek  $GEF$ .



Met voorbeeld 20 volgt:

$$\text{omtrek(cirkel)} = 288 - \sqrt{30343\frac{41}{49}}.$$

$$\text{oppervlakte(cirkel)} = 9011\frac{41}{77} - \sqrt{63700992}.$$

$$\text{opp(sector ABEG)} = \frac{1}{3} * \text{opp(cirkel)} \quad [\sphericalangle BEG = 120^\circ]$$

$$= 3003\frac{65}{77} - \sqrt{7077888}.$$

$$|HB| = \sqrt{|BE|^2 - |HE|^2} \text{ en } |BE| = \frac{1}{2}|AD|, |HE| = \frac{1}{4}|AD|.$$

$$\text{Dus: } |HB| = \sqrt{1574\frac{58}{121} - 24}.$$

$$\text{En dan: } \text{opp}(\triangle BEG) = |HE| * \frac{1}{2} |BG| =$$

$$\sqrt{1541520\frac{6768}{14641} - 1099\frac{7}{11}}.$$

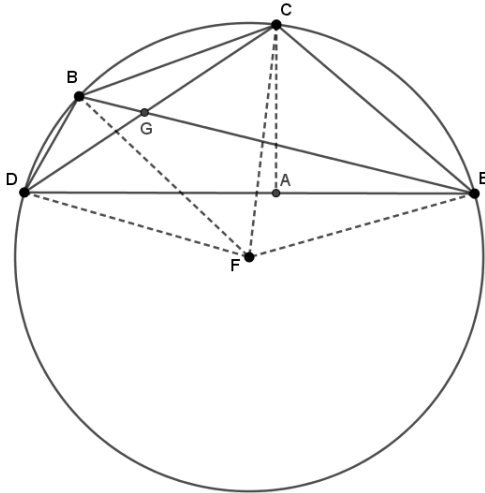
$$\text{Dan volgt: } \text{opp(ovaal)} = 2 * \text{opp(sector} - \text{driehoek)} = 8206\frac{74}{77} - \sqrt{60902723\frac{14125}{14641}}.$$

$$\text{Opp(kromme } \triangle GEF) = \text{opp(halve cirkel)} - \text{opp(ovaal)} = \sqrt{14541826\frac{5534}{14641}} - 3701\frac{15}{77}. [1]$$

[1] Zetfout in de tekst. Daar staat **3710**.

**Vb 94.** Gegeven is een onregelmatige vierhoek ('*quadrilaterum*': koordenvierhoek?)  $DBCE$  in een cirkel met  $|DB| = 6\frac{2}{5}$ ,  $|BC| = 10$ ,  $|CE| = 13\frac{1}{5}$ ,  $|DE| = 24$ .

Gevraagd: de lengte van de diagonalen  $DC$  en  $BE$  en de oppervlakte van de vierhoek.



Uit propositie 21 van boek 3 Euclides volgt:

$\triangle BGD$  gelijkhoekig met  $\triangle CGE$ . [1]

Ook:

$\triangle BGC$  gelijkhoekig met  $\triangle DGE$ .

En dan uit propositie 4 van boek 6 [2]:

$|BG| : |GC| = |BD| : |CE| = |DG| : |GE|$ .

En:  $|BC| : |DE| = |BG| : |DG| = |GC| : |GE|$ .

Stel:  $|BG| = 1x$ . Dan volgt:

$10 : 24 = 1x : |DG|$ . Dus:  $|DG| = 2\frac{2}{5}x$ .

$6\frac{2}{5} : 13\frac{1}{5} = 1x : |GC|$ . Dus:  $|GC| = 2\frac{1}{16}x$ .

$10 : 24 = 2\frac{1}{16}x : |GE|$ . Dus:  $|GE| = 4\frac{19}{20}x$ .

En daarmee:  $|BE| = 5\frac{19}{20}x$  en  $|DC| = 4\frac{37}{80}x$ .

Nu volgt met de regel ('*leeringe*') van Ptolemeus [3]:

$|BE| * |DC| = |DB| * |CE| + |BC| * |DE|$ .

Dat geeft:  $26\frac{883}{1600}x^2 = 324\frac{12}{25}$  ofwel  $1x^2 = 12\frac{3124}{14161}$  dus:  $|BG| = 1x = 3\frac{59}{119}$ .

Er volgt:  $|DC| = 4\frac{37}{80}x = 15\frac{3}{5}$  en  $|BE| = 5\frac{19}{20}x = 20\frac{4}{5}$ .

Met voorbeeld 4 volgt nu:

$Opp(DBCE) = opp(\triangle DBC) + opp(\triangle DCE) = 19\frac{1}{5} + 95\frac{1}{25} = 114\frac{6}{25}$ . [4]

De diameter van de cirkel: [5]

Loodlijn  $|CA| = \frac{95\frac{1}{25}}{12} = 7\frac{23}{25}$ .

En met voorbeeld 40 volgt nu:

$diameter = \frac{|CD| * |CE|}{|CA|} = 26$ . Dus:  $|FD| = |FB| = |FC| = |FE| = 13$ .

[1] De propositie gebruikt de eigenschap van gelijke omtrekshoeken op eenzelfde koorde.

[2] Die propositie gaat over verhoudingen tussen zijden in gelijkhoekige[-vormige] driehoeken.

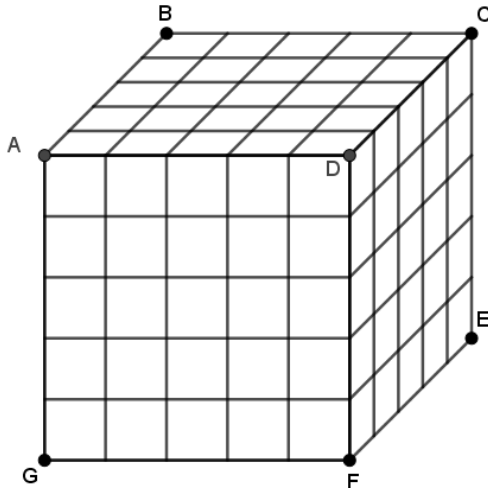
[3] In de tekst staat dat het gaat om rechthoekige figuren van  $CE$  en  $DB$ ... ???

[4] Met Heron. De halve omtrekken van de driehoeken zijn 'hanteerbaar': 16 resp.  $26\frac{2}{5}$ .

[5] Niet gevraagd maar het wordt toch maar even berekend...

## Veelvlakken en inhouden

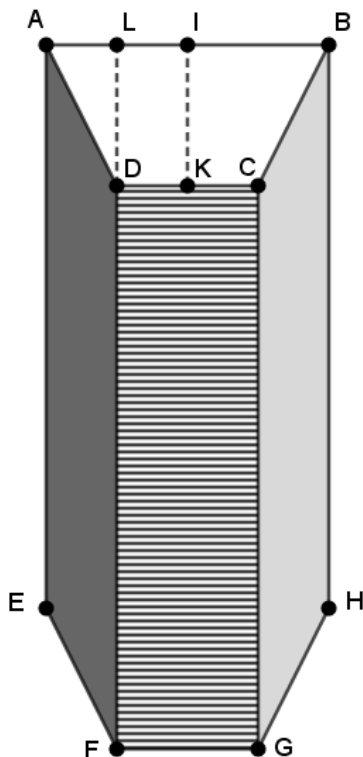
**Vb 95.** Gegeven is een kubus ('*cubum*') van zes rechthoekige kwadraten [vierkanten dus]  $ABCDEFG$  waarvoor geldt: elke zijde is 5 voet. De vraag is hoeveel kubieke voet de inhoud is.



Vermenigvuldig 5 'in zijn selver cubice'.  
[het getal tot de derdemacht]  
En de inhoud wordt dan 125 kubieke voet.

Elke kubieke voet heeft een voet in lengte, breedte en hoogte.

**Vb 96.** Gegeven is een lichaam ('*corpus*') met  $|AB| = 7$ ,  $|BC| = |HG| = 4$ ,  $|DC| = |FG| = 3$  en de hoogte  $|AE| = 13$ . Wat is de inhoud?



[Het lichaam is dus een prisma.]

$IK$  en  $LD$  zijn loodlijnen.

$$|DL| = \sqrt{|AD|^2 - |AL|^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}.$$

$$Opp(ABCD) = \frac{1}{2}(|AB| + |DC|) * |LD| = \sqrt{300}. [1]$$

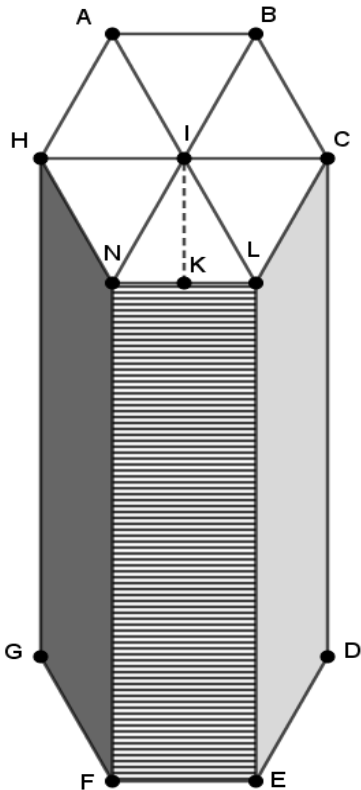
$$Inhoud(\text{lichaam}) = 13 * \sqrt{300} = \sqrt{50700}$$

en dit is bijna  $225 \frac{83}{500}$ . [2]

[1]  $ABCD$  is een trapezium.

$$[2] \sqrt{50700} = 225,1666 \dots \approx 225 \frac{166}{1000} = 225 \frac{83}{500}.$$

**Vb 97.** Gegeven is een lichaam [1] en zijden als hiervoor dus  $|AB| = \dots = |EF| = 8$  en de hoogte  $|HG| = 20$ . Wat is de inhoud?



De loodlijn  $|IK| = \sqrt{48}$ .

Gevolg:

$$opp(\triangle NIL) = |IK| * |NK| = \sqrt{768}.$$

En:

$$opp(ABCLNHA) = 6 * opp(\triangle NIL) = \sqrt{27648}.$$

[Een regelmatige zeshoek.]

En dat geeft voor de inhoud van deze figuur:

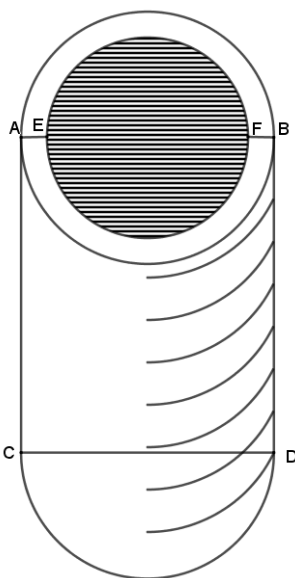
$$20 * \sqrt{27648} = \sqrt{11059200}.$$

En dit is bijna  $3325 \frac{537}{1000}$ . [2]

[1] Duidelijk niet in perspectief: de zeshoek is 'plat' en regelmatig getekend.

$$[2] \sqrt{11059200} = 3325,5375 \dots$$

**Vb 98.** Gegeven is een rond lichaam [cilinder [1]] met diameter  $|AB| = 14$  voet.  $|AC| = 24$ . Van binnen is het lichaam uitgehold met diameter  $|EF| = 8$  en met diepte 20 voet. Wat resteert van het lichaam na die uitholling in kubieke voet?



Met voorbeeld 20 volgt:

$$omtrek(cirkel \text{ diam } AB) = 22 \text{ en } opp(c \text{ } AB) = 154.$$

$$\text{Dus: } inhoud(\text{geheel}) = 154 * 24 = 3696 \text{ kubieke voet.}$$

Nu de inhoud van het uitgeholde:

$$opp(cirkel \text{ diam } EF) = 50 \frac{2}{7}.$$

$$\text{Dus: } inhoud(\text{uitholling}) = 50 \frac{2}{7} * 20 = 1005 \frac{5}{7} \text{ kubieke voet.}$$

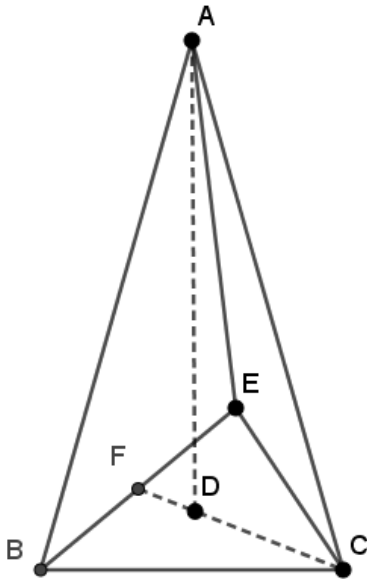
Gevolg:

$$\text{Van het lichaam resteert nog } 2690 \frac{2}{7} \text{ kubieke voet. [2]}$$

[1] Een cilinder in perspectief tekenen is nog niet gangbaar. De cirkels zouden dan ovaler zijn, ellipsen.

$$[2] \text{ Drukfout in de tekst: daar staat } 3690 \frac{2}{7}.$$

**Vb 99.** Gegeven is een driezijdige ('driehoekighe') piramide  $ABCE$ . Het grondvlak  $BEC$  is een gelijkzijdig driehoek met elke zijde 6 voet. De drie [opstaande] zijden  $|AB| = |AC| = |AE| = 16$  voet. Wat is de inhoud van deze piramide?



$CF$  is een loodlijn.  $|CF| = \sqrt{27}$ .

$$|DF| = \frac{1}{3}|CF| = \sqrt{3}. [1]$$

$$|DC| = \sqrt{12}.$$

Nu is driehoek  $ACD$  is rechthoekig te  $D$ . [2]

$$\text{Dus: } |AD| = \sqrt{|AC|^2 - |DC|^2} = \sqrt{244}.$$

$$\text{Opp}(\triangle BEC) = \sqrt{243}.$$

Dan volgt: [3]

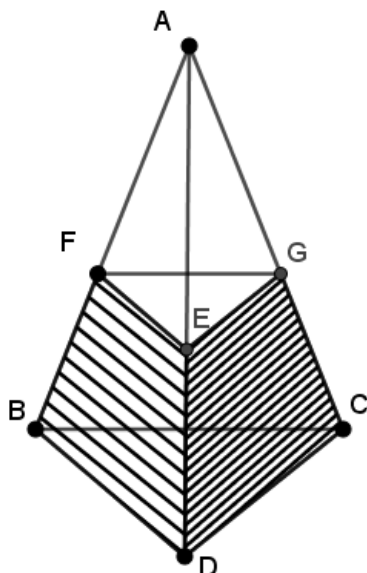
$$\text{inh}(\text{piramide}) = \frac{1}{3}|AD| * O(\triangle BEC) = \sqrt{6588} \text{ kubieke voet.}$$

[1]  $D$  wordt als zwaartepunt van de driehoek genomen en dan geldt:  $|FD| : |DC| = 1 : 2$ .

[2] Top  $A$  ligt loodrecht boven  $D$  in zo'n gelijkzijdige piramide.

[3] De formule is bekend van Archimedes.

**Vb 100.** Van de boven beschreven piramide is een stuk  $BDCGEF$  afgehaald ('afgehouden').  $FEG$  is evenwijdig aan  $BDC$ . [ $FE // BD$ , etc.] De zijden van de basis zijn, als boven, 6 voet.  $|FE| = |EG| = |GF| = 4$  voet. En  $|AB| = |AC| = |AD| = 16$  voet. Wat is de inhoud van het eraf gehaalde stuk?



$\text{Inhoud}(\text{gehele piramide}) = \sqrt{6588}$  kubieke voet. Zie vb. 99.

En met dezelfde aanpak als in vorig voorbeeld, met de loodlijn uit  $A$

'nederdalende' op het vlak  $FEG$  zal volgen: loodlijn =  $\sqrt{108 \frac{4}{9}}$ . [1]

$$\text{opp}(\triangle FEG) = \sqrt{48}.$$

$$\text{Inhoud}(\text{piramide } A.FEG) = \frac{1}{3} * \sqrt{108 \frac{4}{9}} * \sqrt{48} = \sqrt{578 \frac{10}{27}} \text{ k.voet.}$$

Rest voor het blok  $BDCGEF$ :

$$\text{inhoud} = \sqrt{6588} - \sqrt{578 \frac{10}{27}} = \sqrt{3262 \frac{10}{27}} [= 57,1171 \dots]$$

En dit is bijna  $57 \frac{117}{1000}$ .

[1] Via  $|AG| : |AC| = |EG| : |DC| = 4 : 6$  dus:  $|AG| = 10 \frac{2}{3}$ .

**Vb 101.** Gegeven is een bol ('globus of ronden kloot') waarvan de diameter 7 is. De omtrek zal dan zijn 22. Wat is de oppervlakte [en inhoud] van deze bol?

[De figuur is overgenomen uit de tekst...]



$omtrek * diameter = oppervlakte\ bol$  [1]

Dus:  $opp(bol) = 154$ . [Hier met  $\pi = \frac{22}{7}$ .]

Voor de gehele 'corperlijcke grootte' van deze bol vermenigvuldig dan de oppervlakte ('vlackte') met  $\frac{1}{6}$  diameter, en dat geeft:

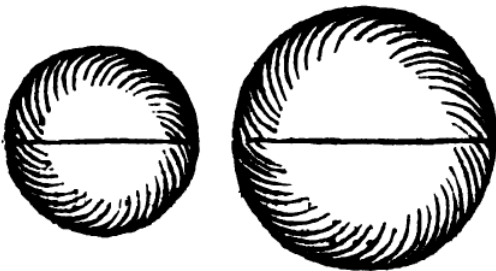
$inhoud = 154 * \frac{1}{6} * 7 = 179\frac{2}{3}$  cubi, [2]

waarvan elk heeft een [voet] in breedte, lengte en diepte.

[1]  $Opp = 4\pi r^2 = \pi d^2 = \pi d * d$ . Bekend van Archimedes.

[2]  $Inh = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3 = \pi d^2 * \frac{d}{6}$ .

**Vb 102.** Gegeven zijn twee ijzeren bollen. Een met een diameter van 5, die 8 [1] weegt. De andere heeft een diameter van 7. Hoeveel zal die wegen?



Neem van elke diameter de derdemacht, dan volgt: 125 en 343.

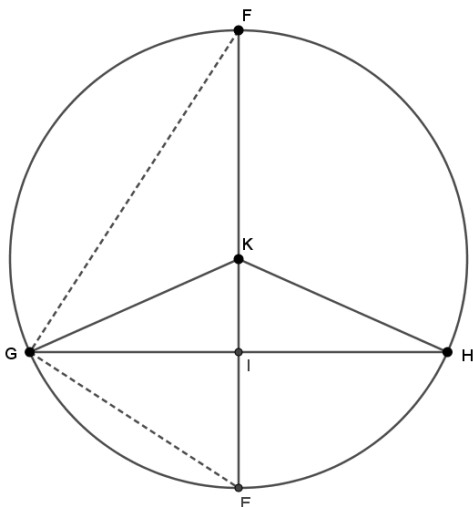
En nu  $125 : 8 = 343 : 21\frac{119}{125}$ .

En zoveel zal de grootste bol moeten wegen.

[1] In de tekst staat hier een onleesbare eenheid van gewicht achter.

**Vb 103.** Gegeven is een bol [1] met diameter  $|FE| = 7$ . Daar is een stuk afgesneden door de lijn  $GIH$  [beter: vlak door...] en er geldt:  $|IH| = \sqrt{10}$ . Met voorbeeld 3 volgt nu:  $|KI| = 1\frac{1}{2}$ ,  $|EI| = 2$ .

Wat is de inhoud van bolsegment [2]  $GIHEG$ ?



$$|GE| = \sqrt{|GI|^2 + |EI|^2} = \sqrt{14}.$$

Maak nu een vlakke cirkel met halve diameter  $|GE|$ .

Met voorbeeld 20 volgt:  $opp(GEH) = 44$ . [met  $\pi = \frac{22}{7}$ .][3]

Ofwel anders:

De oppervlakte van de gehele bol is 154.

(Gevonden in voorbeeld 101.)

En nu volgt:

$$|IE| : |IF| = 2 : 5 = opp(GEH) : opp(GFH). \quad [4]$$

Dus:  $opp(GEH) = \frac{2}{7} * 154 = 44$  als boven.

En voor  $GFH$  resteert 110. (\*)

En hiermee de inhoud van bolsector  $GKHEG$ :

$$inhoud = 44 * \frac{1}{3} |EK| = 51\frac{1}{3}. \quad [5]$$

Vervolg: gezocht wordt nu de inhoud van de kegel  $KGIH$ . [6]

$$\text{Inhoud(kegel)} = \text{opp(cirkel } GH) * \frac{1}{3} |KI| = \frac{22}{7} * 10 * \frac{1}{2} = 15 \frac{5}{7}.$$

En dit geeft voor de inhoud van het afgesneden stuk:  $51 \frac{1}{3} - 15 \frac{5}{7} = 35 \frac{13}{21}$ .

En als men de inhoud van [bolsegment]  $GFHIG$  wil weten:

De [bolsector]  $GFHKG$  heeft inhoud, zie (\*):  $110 * \frac{1}{3} * 3 \frac{1}{2} = 128 \frac{1}{3}$ .

En samen met de kegel geeft dat:  $\text{inhoud}(GFHIG) = 144 \frac{1}{21}$ .

[1] Suggestie van bolling is weggelaten in de figuur in de tekst.

[2] In de tekst staat 'keghe!'. Maar dat is nu verwarrend, zie [6].

[3] Gangbaar is de formule:  $\text{opp} = 2\pi Rh$ . Met  $R = \text{bolstraal}$ ,  $h = \text{hoogte\_segment}$ .

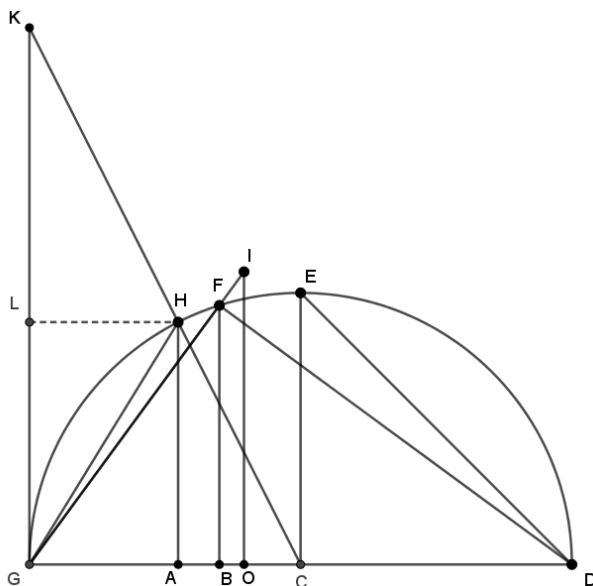
Brasser (en Petri) gebruiken:  $\text{opp} = \pi * |GE|^2 = \pi * (|GI|^2 + |IE|^2) = \pi * ((R^2 - |KI|^2) + |IE|^2)$   
 $= \pi * (R^2 - (R - h)^2 + h^2) = \pi * 2Rh$ . Natuurlijk ook goed dus...

[4] Bedoeld is hier de oppervlakte van de bolsegmenten!

[5] Een soort sommatie van inhoud van piramides met allemaal hoogte  $|EK|$  en totale grondoppervlakte de oppervlakte van het bolsegment. Modern:  $\text{inh} = \frac{2}{3} \pi R^2 h$ .

[6] In de tekst staat **piramide**  $KGIH$ . Blijkbaar was er nog geen conventie m.b.t. namen van lichamen.

**[Inleidende tekst op de navolgende voorbeelden.]**



[figuur 104]

In de gegeven halfcirkel met diameter 12 zijn getekend de zijden van de vijf gelijkzijdige lichamen die men in een bol kan maken. [bedoeld is: ribben van de 5 regelmatige veelvlakken] [1][2]

$FD$  is de ribbe van een tetraëder,  
 $ED$  van een octaëder,  
 $GF$  van een hexaëder ofwel kubus,  
 $GH$  van een icosaeëder en  
 $GO$  van een dodecaëder.

Van elk gaan wij hier zijn 'proportie' bekend maken. [3]

[1] Deze figuur hoort bij propositie 18 uit boek 13 van de Elementen. Daar wordt ook bewezen dat de lijnstukken inderdaad de ribben zijn van de genoemde regelmatige veelvlakken.

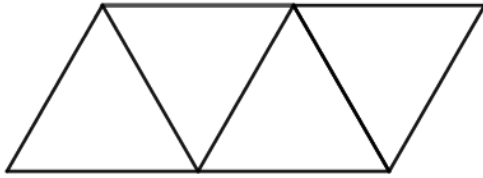
[2] In de tekst lijkt punt  $I$  op de halfcirkel te liggen. Dat is niet zo, volgt uit voorbeeld 107.

[3] Bedoeld is hier de verhouding tussen de boldiameter en de ribbe van een veelvlak.

**Vb 104.** Om een tetraëder te maken in een bol zo groot als mogelijk, deel dan de diameter van de halfcirkel zo dat  $|GB| = 4$  en  $|BD| = 8$ .  $FB$  is dan de middelevenredige hiervan dus  $|FB| = \sqrt{32}$ .

Er volgt:  $|FD| = \sqrt{|FB|^2 + |BD|^2} = \sqrt{96}$ .

En dit is de ribbe van een tetraëder en [dus] de zijde van vier gelijkzijdige driehoeken. [1]



En nu:

$$\text{diameter} : \text{ribbe} = 12 : \sqrt{96}.$$

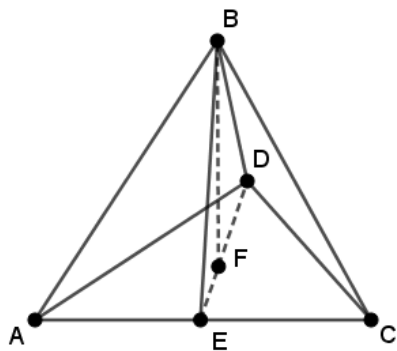
$$\text{Ofwel als } 3 : \sqrt{6}.$$

Snij nu uit stijf papier vier gelijkzijdige driehoeken en die samengevoegd zullen het tetraëder maken.

[1] Het waarom ontbreekt, maar zie [1] hiervoor. Er geldt dus:  $d_{bol} = \text{ribbe}_{4v} * \frac{1}{2}\sqrt{6}$ .

**Vb 105.** Gegeven is een tetraëder ('tetrahedron') met elke ribbe 12. [1]

Wat is de diameter van de bol waarin dit tetraëder past? En wat is de inhoud?



Gevolg [vb 104]  $\text{diameter bol} : \text{ribbe} = 3 : \sqrt{6}$ .

Dus bij zijde = 12 hoort een diameter =  $\sqrt{216}$ .

Met vb 4 volgt:  $\text{opp}(\triangle ADC) = \sqrt{3888}$ .

En:  $|ED| = \sqrt{108}$ . En met  $BF$  loodlijn op  $ADC$  volgt:

$$|EF| = \frac{1}{3}|ED| = \sqrt{12}. \text{ Dus: } |BF| = \sqrt{|BE|^2 - |EF|^2} = \sqrt{96}.$$

En dan volgt:

$$\text{inh}(\text{lichaam}) = \frac{1}{3}|BF| * O(\triangle ADC) = \sqrt{41472} [= 203,6467 \dots]$$

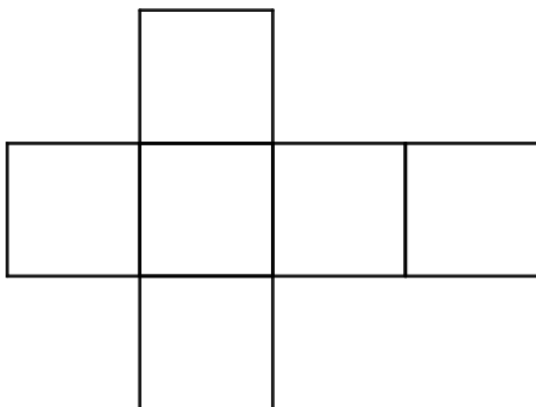
En dit is bijna  $203 \frac{647}{1000}$ .

[1] Ander figuur dan in de tekst. Aldaar erg zwart en niet zo helder getekend.

**Vb 106.** Om de ribbe van een kubus ('hexadron') te vinden binnen een bol met diameter 12 kijk dan naar

$FG$  in de figuur 104. Met voorbeeld 1 volgt:  $|FG| = \sqrt{|FB|^2 + |GB|^2} = \sqrt{32 + 16} = \sqrt{48}$ .

Gevolg:  $\text{diameter bol} : \text{ribbe} = 3 : \sqrt{3}$ . [1]



Dit lichaam is te maken met zes vierkanten [2]

in stijf papier uitgesneden en samengebogen. Zo zal een kubus ontstaan.

[1] Dus:  $d_{bol} = \text{ribbe}_{6v} * \sqrt{3}$ .

Zie ook propositie 15, boek 13 Euclides

waar wordt bewezen:  $d^2 = 3 * \text{ribbe}^2$

[2] In de tekst: gelijkzijdige rechthoekige kwadraten.

**Vb 107.** Gegeven is een bol met diameter 12 waarin beschreven is een kubus waarvan de ribbe te vinden is. Er geldt:  $diameter\ bol : ribbe = 3 : \sqrt{3}$ . Dus bij  $diameter = 12$  volgt:  $ribbe = \sqrt{48}$ .

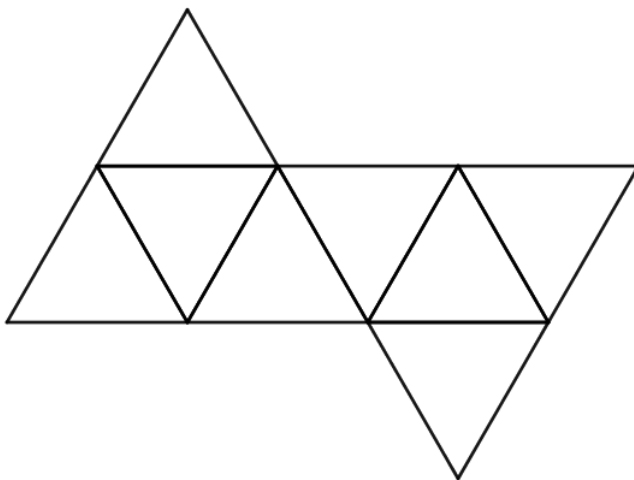
**Vb108.** Om de inhoud van de kubus te vinden, neem dan de ribbe tot de derdemacht.

Er volgt:  $inhoud(kubus) = \sqrt{110592}$  [= 332,5537 ...]. Dit is bijna  $332\frac{277}{500}$ . [1]

[1] Zetfout: in de tekst staat er nog een wortelteken voor.

**Vb 109.** Om een octaëder ('octahedron') te maken in een bol met diameter 12, trek dan in de halve cirkel in de figuur 104 lijnstuk  $ED$ . Met vb 1 volgt:  $|ED| = \sqrt{72}$ .

Gevolg:  $diameter\ bol : ribbe = 2 : \sqrt{2}$ . [1]



Dit lichaam is te maken met acht gelijkzijdige driehoeken in stijf papier uitgesneden en samengebogen. Zo zal een octaëder ontstaan.

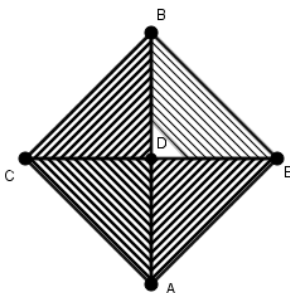
[1] Dus:  $d_{bol} = ribbe_{8v} * \sqrt{2}$ .  
Zie ook propositie 14, boek 13 Euclides waar wordt bewezen:  $d^2 = 2 * ribbe^2$ .

**Vb 110.** Gegeven is een octaëder van acht gelijkzijdige driehoeken met elke zijde gelijk aan 6.

Wat is de diameter van een bol waarin dit octaëder past?

Er geldt:  $diameter\ bol : ribbe = 2 : \sqrt{2}$ . Dus bij  $ribbe = 6$  volgt:  $diameter = \sqrt{72}$ .

**Vb 111.** Om de inhoud van dit octaëder [1] te vinden, neem dan de ribbe in het kwadraat. Dat geeft 36 voor de oppervlakte van het vierkant midden in het octaëder.



Vermenigvuldig dit met  $\frac{1}{3}$  diameter en er volgt: [2]  
 $inh(octaëder) = 36 * \frac{1}{3} * \sqrt{72} = \sqrt{10368}$  [= 101,8233 ...]  
en dit is bijna  $101\frac{823}{1000}$ .

[1] Dit zij- of bovenaanzicht wordt gegeven in de tekst.

[2] Twee piramides op elkaar:

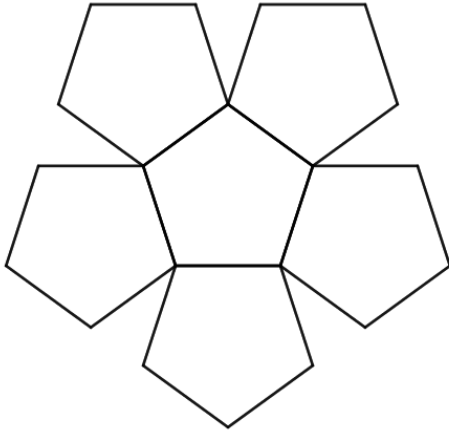
$inh(octaëder) = ribbe^3 * \frac{1}{3} \sqrt{2}$ .

**Vb 112.** Om een dodecaëder ('dodecahedron') in een bol te maken met diameter 12, zie weer figuur 104:

$|GK| = |GD| = 12$  en  $GK$  loodrecht op  $GD$ . Er volgt:  $|CK| = \sqrt{180}$ .

$|KH| = |CK| - |HC| = \sqrt{180} - 6$ .

Verleng  $GF$  tot punt  $I$  zodanig dat  $|GI| = \sqrt{180} - 6$ , en trek lijn  $IO$  evenwijdig aan  $FB$ . [zie figuur 104]



Dan is  $GO$  de ribbe van het dodecaëder en met  $|GF| = \sqrt{48}$ ,  $|GB| = 4$  [zie vb. 107] volgt:  
 $|GO| = \sqrt{60} - \sqrt{12}$ . [1]

Dus er geldt:

$$\text{diameter bol} : \text{ribbe} = 12 : (\sqrt{60} - \sqrt{12}) \\ = \sqrt{12} : (\sqrt{5} - 1) \quad [2]$$

Dit lichaam is te maken door zes pentagons in stijf papier uit te snijden, tweemaal, en die samen te voegen. [twee kapes op elkaar][3]

[1] Want  $|GB| : |GO| = |GF| : |GI|$  dus:  $|GO| = \frac{4 \cdot (\sqrt{180} - 6)}{\sqrt{48}} = \sqrt{60} - \sqrt{12}$ .

[2] Dus:  $d_{bol} = \text{ribbe}_{12v} * \frac{1}{2} \sqrt{3} (\sqrt{5} + 1)$ .

[3] Zie ook propositie 17, boek 13 Euclides.

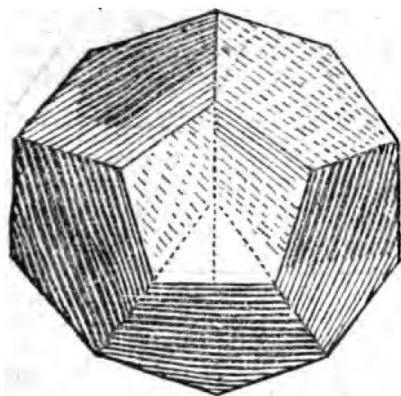
**Vb 113.** Gegeven is een dodecaëder van twaalf gelijkzijdige vijfhoeken met zijde  $4\frac{2}{3}$ .

Wat is de diameter van de bol waar deze dodecaëder in past?

Met de verhouding uit vorig voorbeeld volgt:  $\text{diameter} = \sqrt{81\frac{2}{3}} + \sqrt{16\frac{1}{3}}$ .

**Vb 114.** Wat is de inhoud [en oppervlakte] van dit dodecaëder? Met voorbeeld 33 volgt: als de diameter van een cirkel 100000 is, dan is de zijde van een ingeschreven [regelmatige] vijfhoek  $\sqrt{6250000000 - \sqrt{7812500000000000000}}$ . En dat is de verhouding  $4 : \sqrt{10 - \sqrt{20}}$ .

Dus bij een zijde van  $4\frac{2}{3}$  hoort een omschreven cirkel met diameter  $\sqrt{43\frac{5}{9} + \sqrt{379\frac{169}{405}}}$ .



[Linker figuur staat in de tekst].

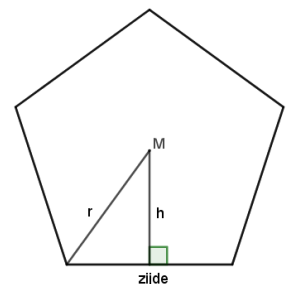
[Zie nu de rechterfiguur]

$$h = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{zijde}}{2}\right)^2}$$

Dat geeft:

$$h = \sqrt{5\frac{4}{9} + \sqrt{23\frac{289}{405}}}$$

$$\text{opp}(\text{driehoek}) = h * \frac{\text{zijde}}{2}$$



Dat geeft:  $opp(driehoek) = \sqrt{29 \frac{52}{81} + \sqrt{702 \frac{30094}{32805}}}$ . [1]

En dan:  $opp(vijfhoek) = 5 * opp(driehoek) = \sqrt{741 \frac{4}{81} + \sqrt{439323 \frac{2297}{6561}}}$ . [2]

De loodlijn uit het centrum van de bol op een vijfhoek heeft lengte:

$$\sqrt{\left(\frac{diam_{bol}}{2}\right)^2 - \left(\frac{diam_{cirkel}}{2}\right)^2} = \sqrt{13 \frac{11}{18} + \sqrt{179 \frac{541}{1620}}}$$
. [Diameter bol uit vb 113.]

Kijk nu naar de piramide met top het centrum van de bol en grondvlak een pentagon.

$$Inhoud(piramide) = \frac{1}{3} * loodlijn * opp(vijfhoek).$$

En dan:  $inhoud(dodecaëder) = 12 * ... = 381 \frac{1}{9} + \sqrt{158156 \frac{296}{729}}$ . [3]

En dit is bijna  $778 \frac{4}{5}$ .

[1] In de tekst een zetfout: er staat  $\sqrt{92 \frac{52}{81} + \dots}$ .

[2] De totale oppervlakte van het dodecaëder wordt niet gegeven.

Er zou volgen:  $12 * ... = 449,6180 ...$  Petri geeft hier wel een benadering van.

Dat volgt ook met:  $opp_{12v} = ribbe^2 * 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$ . (Algemene formule)

[3] [= 778,7999 ...]. Alles nagerekend met *WolframAlpha*.

Dat volgt ook met:  $inh_{12v} = ribbe^3 * \frac{1}{4} (15 + 7\sqrt{5})$ . (Algemene formule)

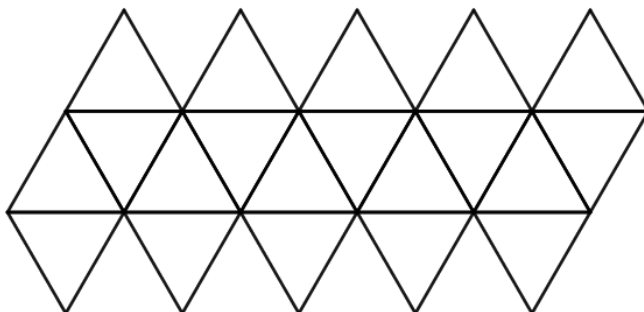
**Opmerking:**

En dan te bedenken dat Petri en Brasser dit allemaal handmatig berekenden!!!

**Vb 115.** Om een icoesaëder te maken in een bol kijk dan naar figuur 104. Uit vb 112 volgt:

$$|KC| = \sqrt{180}, |KH| = \sqrt{180} - 6. \text{ En dan met } |KH| : |KC| = |HL| : |GC|$$

volgt:  $|LH| = |GA| = 6 - \sqrt{7 \frac{1}{5}}$ . En met  $|KG| : |KC| = |HA| : |HC|$  volgt:  $|HA| = \sqrt{28 \frac{4}{5}}$ .



En dan volgt:

$$|GH| = \sqrt{|GA|^2 + |HA|^2} = \sqrt{72 - \sqrt{1036 \frac{4}{5}}}$$

Dit is de ribbe van een icoesaëder in een bol met diameter 12. Dus:

$$diameter : ribbe = 4 : \sqrt{8 - \sqrt{12 \frac{4}{5}}}$$
. [1]

Dit lichaam is te maken met 20 gelijkzijdige driehoeken in stijf papier uitgesneden en samengebogen.

Zo zal een icoesaëder ontstaan.[2]

[1] Dus:  $d_{bol} = ribbe_{20v} * \frac{1}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ .

[2] Zie ook propositie 16, boek 13 Euclides.

**Vb 116.** Gegeven is een icsaëder met elke ribbe 6. Wat is de diameter van de bol?

Op basis van de verhouding volgt:  $diameter = \sqrt{90 + \sqrt{1620}}$ .

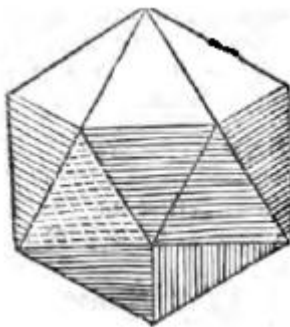
**Vb 117.** Gegeven is een icsaëder in een bol gezet met  $diameter = \sqrt{90 + \sqrt{1620}}$ .

Wat is de ribbe van dat icsaëder?

Met voorbeeld 115 volgt:  $\sqrt{90 + \sqrt{1620}} : ribbe = 4 : \sqrt{8 - \sqrt{12\frac{4}{5}}}$ . Dus:  $ribbe = 6$ .

**Vb [1].** Voor de inhoud zoek eerst een loodlijn van een driehoek. [met zijde 6].

Dat geeft:  $\sqrt{27}$  [= a]. Voor een loodlijn [h] uit het centrum van de bol op die driehoek volgt: [2]



$$h^2 = \left(\frac{diam}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \text{ dus: } h = \sqrt{10\frac{1}{2} + \sqrt{101\frac{1}{4}}}$$

$$opp(driehoek) = \sqrt{243}$$

Kijk nu naar de piramide met grondvlak een driehoek en het centrum van de bol als top:

$$inh(piramide) = \frac{1}{3} * h * opp.$$

$$\text{En dan: } inh(icsaëder) = 20 * \dots = 270 + \sqrt{40500} [= 471,2461 \dots][3]$$

$$\text{En dit is bijna } 471\frac{123}{500}$$

[1] Geen nummer, ook het volgende 'exempel' niet.

[2] Die loodlijn gaat door het zwaartepunt van zo'n driehoek.

[3] Dat volgt ook met:  $inh_{20v} = ribbe^3 * \frac{5}{12} (3 + \sqrt{5})$ . (Algemene formule)

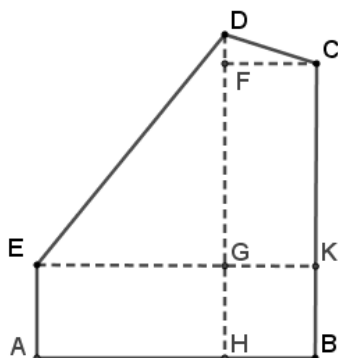
### Een ander Exempel.

Gegeven is een icsaëder met alle ribben 4. Wat is de inhoud? [Nu zeer verkort. Eerst driehoek, piramide]

Dan:  $inh(icsaëder) = 80 + \sqrt{3555\frac{5}{9}} [= 139,6284 \dots]$ . En dit is bijna  $139\frac{157}{250}$ .

**Vb 118.** Zie de figuur. Hoeken  $EAB$  en  $ABC$  zijn recht en verder:  $|AB| = \sqrt{972} + 8$ ,  $|AE| = \sqrt{192}$ .

$|ED| = \sqrt{1420} + \sqrt{150528}$ ,  $|CD| = \sqrt{152}$  [1],  $|BC| = \sqrt{1728}$ ,  $|CK| = \sqrt{768}$ . Vraag:  $|DH|$ ?



[2]

Stel:  $|CF| = 1x = |GK| = |HB|$ .

dan volgt:  $|EG| = |AH| = \sqrt{972} + 8 - 1x$ .

[Etc. en uiteindelijk:]

Dus:  $1x = 8 + \sqrt{12} = |FC|$ .

En dan:  $|DF| = 8 - \sqrt{12}$  en met  $|FH|$  volgt:

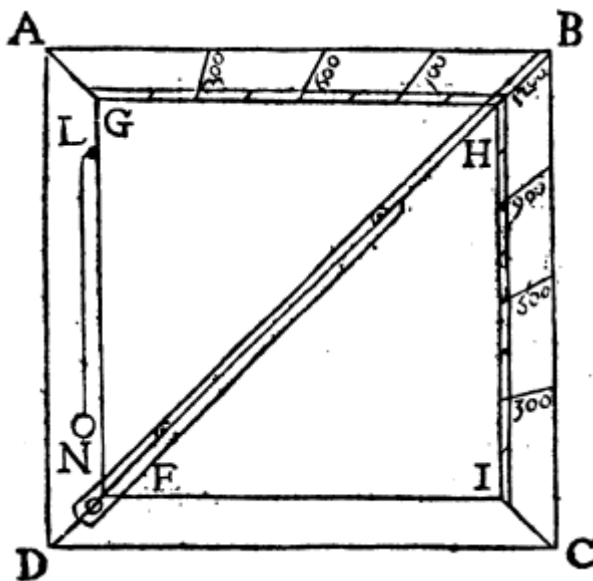
$|DH| = \sqrt{1452} + 8$ .

[1] Zetfout in de tekst. Daar staat de wortel uit 192

[2] Dit voorbeeld past niet na al die veelvlakken. Het is feitelijk voorbeeld 54 met andere getallen.

## Een gnomon gebruiken

**Vb 119.** Hoe men een instrument ofwel **gnomon** [1] kan maken, bedoeld voor alle afmetingen. Hoewel men elke hoogte, lengte, breedte, diepte en dikte op verschillende manieren en met diverse instrumenten kan meten is dit instrument echter het makkelijkste en 'seeckerste' om te gebruiken voor alle afmetingen. Het wordt gemaakt van goed droog hard hout, in een vierkant met alle hoeken recht [!] en van, 'met u welgevallen' van 3, 4 of 5 voet in het vierkant. Deel nu twee van de zijden in 600, 900 of 1200 gelijke stukken zoals u wenst en bij de grootte van het instrument past. Hoe groter het instrument en hoe meer stukken hoe dichter het bij de waarheid zal geraken. [hoe nauwkeuriger dus]



Ik zette bijvoorbeeld in het bijgaande meetkundige vierkant, dat binnen zijn lijst *GHFI* in het vierkant 4 voet is, in *F* een beweegbare wijzer die men op en neer kan schuiven.

Dat gaat zo dat allebei de lijnen *FG* en *FI* zich 'in 't centro des nagels' *F* snijden.

De beweegbare wijzer is dan *FH* die zo lang is als of langer moet zijn dan de diagonaal *BD*.

De zijden *HG* en *HI* zijn in 1200 gelijke stukken verdeeld.

Dat geeft  $diameter = |FH| = 1697$ . [2]

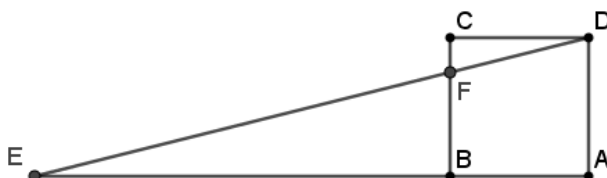
Hang nu een loodlijn *LN* om het instrument daarmee waterpas te stellen. Zet op de lijnen *FH* en *HI* elk twee rondjes ('*pinnules*') om daar door heen te kijken en het instrument is klaar.

[1] Een *gnomon* is een verticale stang of zuil waarvan de schaduw op een plat vlak valt, om de stand van de zon te bepalen. Het woord vindt zijn oorsprong in het Griekse woord *γνομον*, dat aanwijzer betekent. Bron: Wikipedia. Het nu te maken object staat loodrecht op de grond.

[2] Nu niet eerst  $\sqrt{2880000}$  maar meteen een afgeronde waarde  $1200\sqrt{2} = 1697,0562 \dots$

## Om de breedte van een rivier of de lengte van een stuk land te meten.

**Vb 120.** Men wil de lengte van *AE* weten, zie de figuur.



Zet de gnomon op het plein zodanig dat *AD* loodrecht staat. Kijk dan van *D* door de rondjes ofwel '*gaetjens*'. Laat de wijzer nu neerwaarts gaan en wel zo dat het einde, dat is *E*, te zien is.

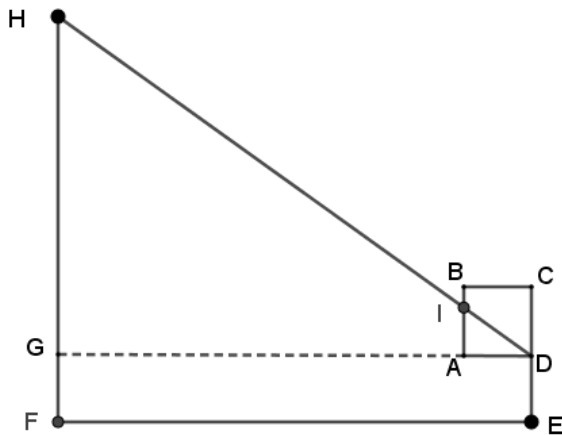
Kijk dan, zonder het instrument aan te raken (!), hoeveel stukken er zijn van *C* tot *F*.

In dit voorbeeld 300. Dan dus:  $|BF| = 900$ . En dan met  $|CF| : |CD| = |BF| : |BE|$  en  $|CD| = 4$  voet volgt:  $|BE| = 12$  voet, samen met  $|AB|$  geeft dat  $|AE| = 16$  voet.

Kan ook met  $|CF| : |CD| = |AD| : |AE|$ . Dat geeft  $|AE| = 16$  voet als eerder.

Om de hoogte op een plein of in vlak terrein te meten.

**Vb 121.** Gevraagd is een hoogte  $HF$  te meten, zie de figuur.



Plaats het instrument een beetje boven de grond  $FE$  en loodrecht. Beweeg de wijzer zo op en neer totdat u door  $DI$  punt  $H$  ziet.

Er geldt:  $|AD| : |AI| = |DG| : |GH|$ .

Als  $|GD| = 48$  voet en  $|AI| = 800$  stukken, dan volgt met  $|AD| = 4$  voet:

$$|HG| = 800 * \frac{48}{4} = 9600 \text{ voet.}$$

Met 1200 stukken gelijk aan 4 voet volgt:

$$|HG| = 32 \text{ voet.}$$

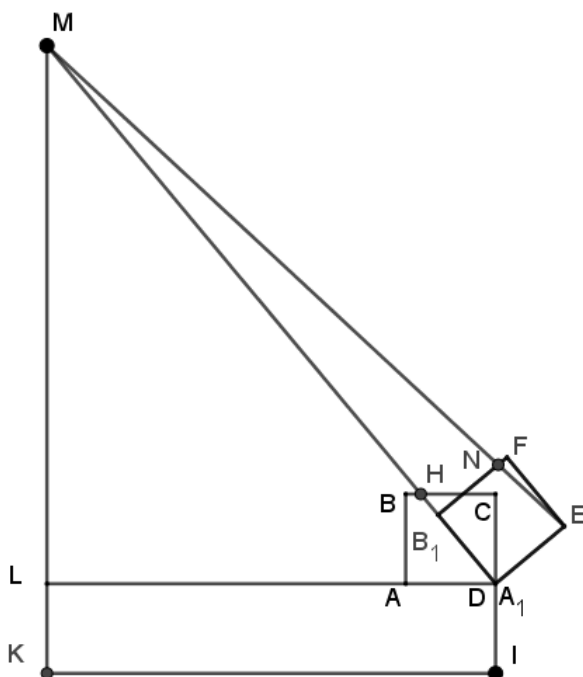
Hieraan toegevoegd  $|FG| = |DE| = 6$  voet. [1]

Er volgt:  $|HF| = 38$  voet.

[1] Dit staat er zomaar maar is mogelijk de ooghoogte van een mens  $\approx 1,8$  m. (?)

Om de hoogte van een toren te vinden, waar men niet bij kan komen.

**Vb 122.** Er is een hoogte  $MK$ , zie de figuur. Die wil men weten.



Zet nu eerst het instrument een beetje boven de grond (om 'ghenoeglijcker' te kunnen aflezen) zo dat  $CD$  loodrecht op  $LD$  staat. Kijk dan via  $D$  naar  $M$ , de hoogte van de toren, en bezie hoeveel stukken hypotenusa  $DH$  aanwijst.

Stel dat  $DH$  1680 stukken aanwijst. [1]

Plaats het instrument nu zo dat  $AB$  naar  $M$  wijst, zonder evenwel hoek  $A$  hoger of lager dan punt  $D$  als hiervoor te plaatsen.

Kijk dan weer via  $E$  naar  $M$  en ik vind [bijv.] de afstand  $FN$  180 punten [stukken].

Er volgt met  $|FN| : |FE| = |AE| : |AM|$

$$|AM| = 4 * \frac{1200}{180} = 26 \frac{2}{3} \text{ voet.}$$

En met  $|DH| : |DC| = |DM| : |ML|$

$$\text{volgt: } |ML| = 26 \frac{2}{3} * \frac{1200}{1680} = 19 \frac{1}{21} \text{ voet.}$$

En met hoogte  $|AI| = |LK| = 6 \frac{20}{21}$  voet [handig]

volgt:  $|MK| = 26$  voet voor de hoogte van de toren.

[1] Dit is **niet** af te lezen met het gemaakte instrument.

De tussenstap is eerst aflezen wat  $|HC|$  is. In dit geval 1175,7550 ... dus waarschijnlijk 1176 stukken.

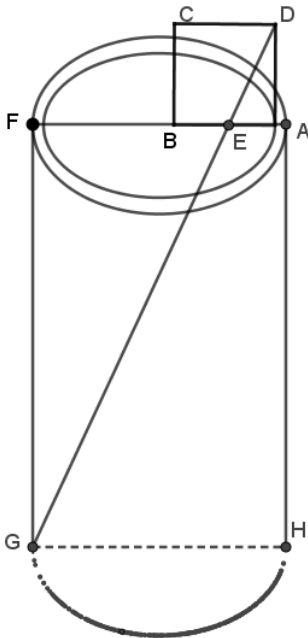
Dat geeft voor  $|DH|$  een waarde 1680,1714 ... Hij gebruikt 1680 stukken en dan  $|ML| = 19,0476$  ...

Hoe precies is het instrument?

Bij  $1175 < |HC| < 1176$  volgt:  $19,0456 \dots < |ML| < 19,0536 \dots$

Om de diepte van een put te meten.

**Vb 123.** Gegeven is een put waarvan met de diepte wenst te weten, zie de figuur. [1]



Stelt u het instrument loodrecht op een zijde van de put ofwel op diameter  $AF$  met  $|AF| = 6$  voet.

Dan ook  $|GH| = 6$ .

Omdat  $|AE| : |AD| = |GH| : |DH|$  [2]

volgt met gesteld  $|AE| = 420$  stukken:

$$|DH| = 6 * \frac{1200}{420} = 17\frac{1}{7} \text{ voet.}$$

Hier vanaf  $|AD| = 4$  voet volgt voor de diepte van de put:

$$|AH| = 13\frac{1}{7} \text{ voet.}$$

[1] Opmerkelijk: nu wordt in de tekening wel enig perspectief gebruikt. De cirkels zijn min of meer als ellipsen getekend. Vergelijk dat met voorbeeld 98.

[2] Zie de tekening. Die klopt niet helemaal.

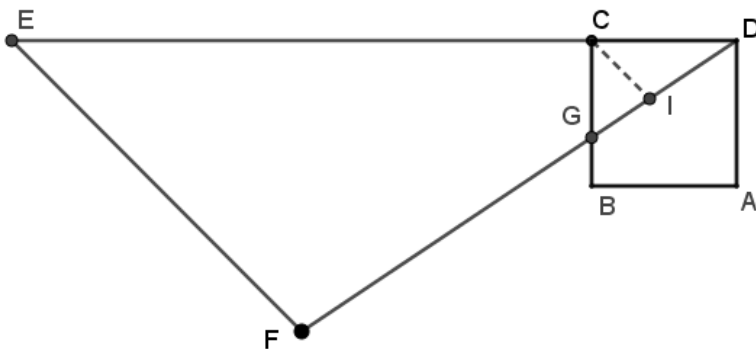
$AD$  moet in verlengde van  $HA$  liggen!

Of... de binnendiameter moet gebruikt worden.

Overigens: Petri tekent  $AD$  wel goed.

Om de afstand tussen twee plaatsen te meten zonder op een van die plaatsen te zijn.

**Vb 124.**  $E$  en  $F$  zijn de twee plaatsen en zelf sta je in  $D$ . Gevraagd:  $|EF|$ .



Zoek eerst de afstand  $|DE|$  en  $|DF|$ . Dat kan met de aanpak van voorbeeld 120.

We nemen aan dat gevonden is:  $|ED| = 50$  en  $|FD| = 38$  roeden.

Plaats het instrument daarna zo dat via  $DC$  punt  $E$  te zien is. De wijzer komt dan van  $D$  via  $F$  in  $G$ . Als  $CI$  evenwijdig is aan  $EF$  dan volgt:

$$|ED| : |CD| = |DF| : |DI|.$$

$$\text{Dus: } |DI| = 1200 * \frac{38}{50} = 912$$

stukken.

Daarmee is bekend waar punt  $I$  ligt. En dan volgt:  $|CI| = 720$  stukken. [1]

$$\text{En met } |ED| : |EF| = |CD| : |CI| \text{ volgt: } |EF| = 50 * \frac{720}{1200} = 30 \text{ roeden.}$$

[1] In de tekst staat dat dit gevonden is door meten. Ook  $|DI|$  uitzetten zal via meten zijn gegaan.

Hoe gaat dat dan? 1200 stukken staan voor 4 voet, dus 3 stukken staan voor  $\frac{1}{100}$  voet.

$912 \text{ st} \cong \frac{304}{100} \approx 3 \text{ voet}$ . En  $720 \text{ st} \cong \frac{240}{100} = 2 \frac{2}{5} \text{ voet}$ . Zo zou het kunnen zijn gegaan, maar...

Raar is dat in de tekst niet zichtbaar gebruik is gemaakt van punt  $G$ , terwijl dat punt wel staat ingetekend. Men was al bekend met trigonometrie. Met  $|CG| = 897$  stukken afgelezen volgt:

$$\tan(\sphericalangle CDG) = \frac{897}{1200} = 0,74750 \dots \text{ In de 17}^{\text{e}} \text{ eeuw met een tabel van 100000: } \tan = 74750.$$

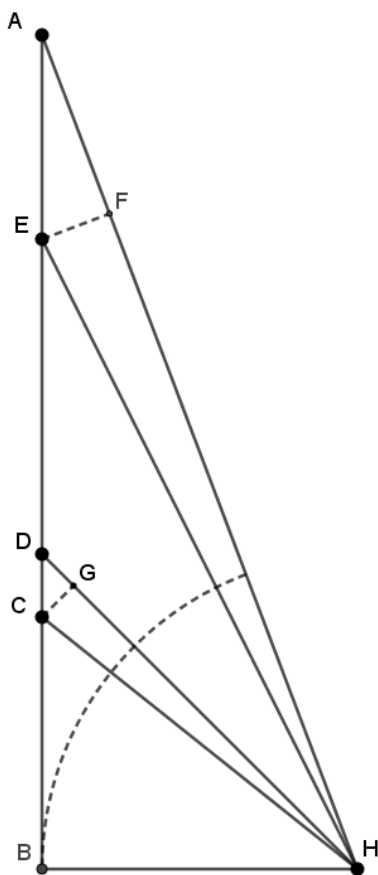
En daarmee  $\sphericalangle CDG \approx 36^\circ 46 \frac{1}{2}'$  en  $\cos(\sphericalangle CDG) \approx \frac{1200}{1498}$ . Ofwel:  $\cos = 80107$ .

En met de cosinusregel volgt dan:  $|EF| = 29,9990 \dots$  zeg 30 roeden.

**Vb 125.** Gegeven is een pilaar  $BE$ , 80 voet hoog. Op hoogte  $|BC| = 32$  voet staat een beeld met  $|CD| = 6$  voet lang. Boven op de pilaar staat een ander beeld  $AE$ .

Als men nu op afstand  $|HB| = 40$  voet staat, dan lijkt het ene beeld net zo groot als het andere. (\*)

Gevraagd:  $|AE|$ .



Met voorbeeld 1 volgt:

$$|CH| = \sqrt{2624}, |DH| = \sqrt{3044}, |EH| = \sqrt{8000}.$$

[Met  $CG \perp DH$  en  $EF \perp AH$  volgt:]

Driehoek  $DGC$  is gelijkvormig met  $DBH$ .

$$\text{Dus: } |DH| : |BH| = |DC| : |GC|.$$

$$\text{Gevolg: } |GC| = \frac{40 \cdot 6}{\sqrt{3044}} = \sqrt{18 \frac{702}{761}}.$$

Ook is driehoek  $EHF$  gelijkvormig met  $CHG$ . [1]

$$\text{Dus: } |CH| : |CG| = |EH| : |EF|.$$

$$\text{Gevolg: } |EF| = \sqrt{57 \frac{21543}{31201}}.$$

Stel nu:  $|AE| = 1x$ . Dan:  $|AB| = 80 + 1x$ .

Met driehoek  $AEF$  gelijkvormig met  $AHB$  volgt:

$$|HB| : |AB| = |EF| : |AF|.$$

$$\text{En dan: } |AF| = \sqrt{\frac{7200000 + 180000x + 1125x^2}{31201}}.$$

Met  $|AE|^2 = |AF|^2 + |EF|^2$  volgt dan:

$$31201x^2 = 9000000 + 180000x + 1125x^2.$$

$$\text{Ofwel: } 30076x^2 = 9000000 + 180000x.$$

$$\text{Dat geeft: } 1x = 20 \frac{40}{73} \text{ voet [= 20,5479 ...]}$$

voor het bovenste beeld  $AE$ .

[1] Eén rechte hoek en (\*) betekent dat de kijkhoek bij  $H$  naar het ene beeld en naar het andere beeld even groot is. De cirkelboogjes vanuit  $B$  zijn even groot.

Dit zelfde kan ook eenvoudig gevonden worden met de tangens-tabel.

Met  $|BH| = 40$ ,  $|BD| = 38$  volgt:  $\tan(DHB) = 95000$ , dus de hoek is  $43 \text{ graden } 32 \text{ min}$ . [afgerond].

En met  $|BC| = 32$  volgt:  $\tan(CHB) = 80000$ , dus de hoek is  $38 \text{ graden } 40 \text{ min}$ .

Dus hoek  $CHD$  ofwel  $EHA$  is  $4 \text{ graden } 52 \text{ min}$ .

Met  $|BH| = 40$ ,  $|BE| = 80$  volgt:  $\tan(EHB) = 200000$ , dus de hoek is  $63 \text{ graden } 26 \text{ min}$ .

Gevolg:  $hoek AHB = 4\text{ gr } 52\text{ m} + 63\text{ gr } 26\text{ m} = 68\text{ graden } 18\text{ min.}$

En dan:  $\tan(AHB) - \tan(EHB) = 251289$  [afgerond]  $- 200000 = 51289.$

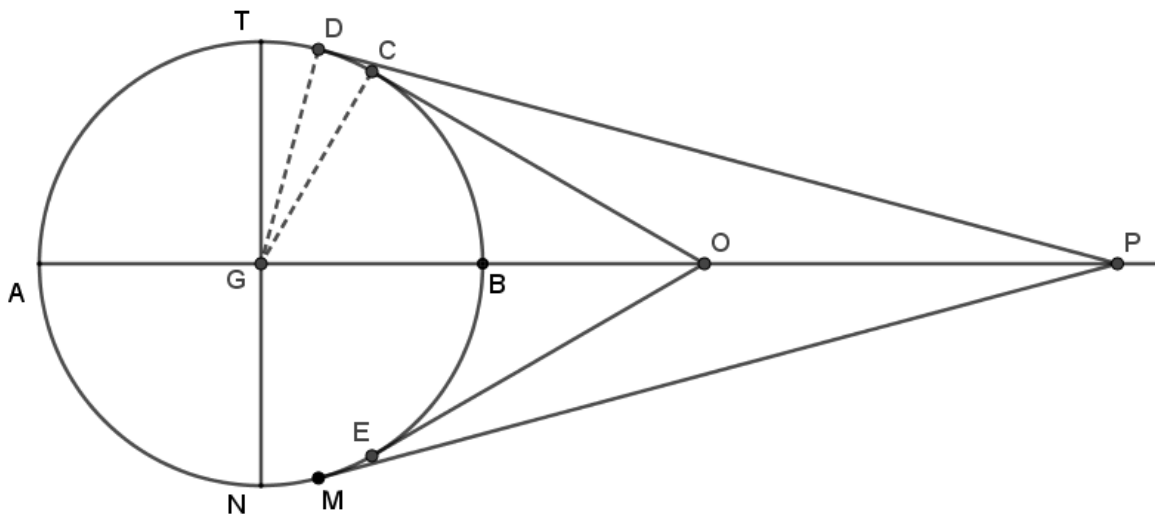
[Feitelijk]  $\frac{|AE|}{40} = \frac{|AB|}{40} - \frac{|EB|}{40} = \tan(AHB) - \tan(EHB) = 0,51289.$

Dus:  $|AE| = 40 * 0,51289 = 20 \frac{1289}{2500}$  [= 20,5156] voor het bovenste beeld, ongeveer als boven.

**Vb 126.** Gegeven is een bol waarvan de omtrek  $ATBN$  verdeeld is in 360 graden. Vanuit een punt  $O$  op een bepaalde afstand van de bol ziet men van de omtrek (de bol) 120 graden. Dat is boog  $CBE$ .

Ga men nu vanuit  $O$  in de zelfde lijn [1] 18 voet naar  $P$ , dan ziet men van de bol 150 graden.

Dat is boog  $DPM$ . Wat is de diameter van deze bol?



Boog  $CB$  is 60 graden. Er volgt:  $\secans(60^\circ) = 200000.$  [2]

Boog  $DB$  is 75 graden. Er volgt:  $\secans(75^\circ) = 386370.$  [Afgerond]

Gevolg:  $verschil = 186370.$

[Feitelijk met straal  $r$ ]  $\frac{|OP|}{r} = \frac{|GP|}{r} - \frac{|GO|}{r} = \sec(75^\circ) - \sec(60^\circ) = \frac{186370}{100000}.$

En met  $|OP| = 18$  voet volgt:  $|TN| = diameter = 2r = 2 * \frac{1800000}{186370} = 19 \frac{5897}{18637}$  voet.

[1] Bedoeld is in rechte lijn van  $G$  naar  $O$  door naar  $P$ .

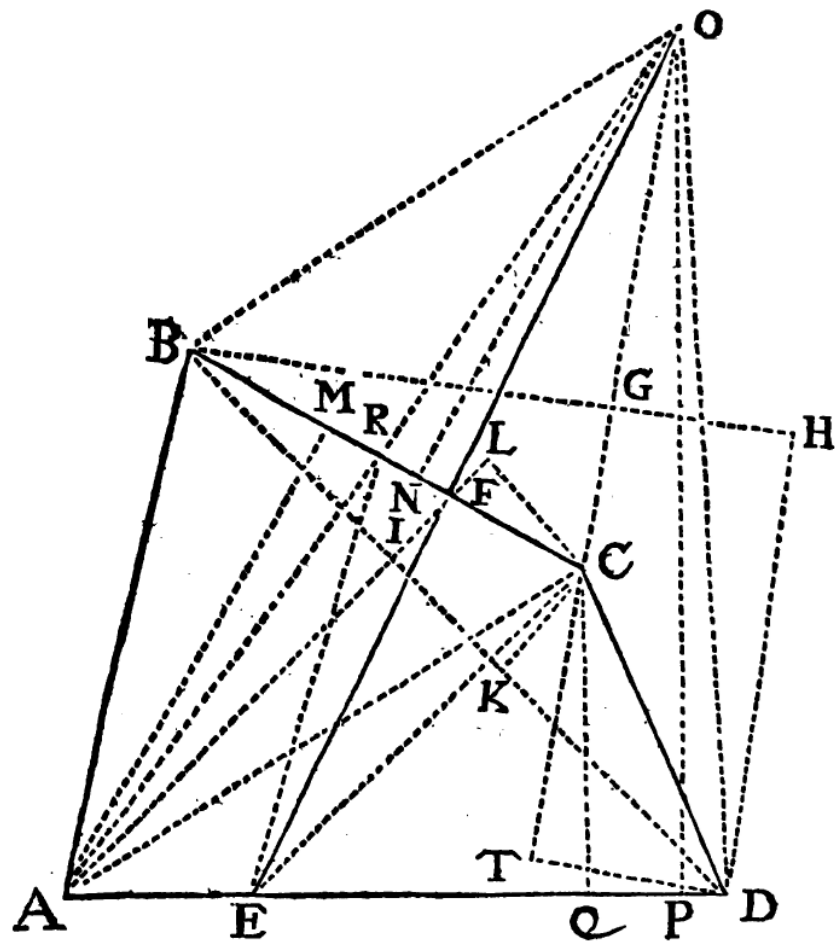
[2]  $\secans(x) = \frac{1}{\cos(x)}$  en  $\cscans(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ .

Einde voorbeelden uit de *Geometria* van Petri.

Zie bijlage 3 voor opmerkingen over verschillen tussen de Petri-tekst en de Brasser-tekst.

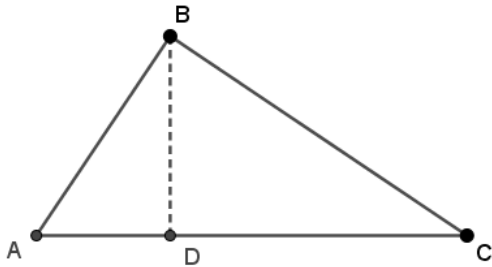
## Geometria per Cos

*Volgen noch eenige Geometrische Questien, waer in altoos 1x gestelt werdt voor 't begerde, ofte om tot het begerde te komen, waerom wy die noemen Geometria per Cos.*



## Voorbeelden met kwadratische vergelijkingen

**Vb 1.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ , rechthoekig in  $B$ . [1]  $BD$  is een loodlijn. Er geldt:  $|AD| = 9, |DC| = 16$ .  
Gevraagd:  $|BD|$ .



Stel:  $|BD| = 1x$ .

Dan volgt:  $|AB|^2 = 1x^2 + 81$  en  $|BC|^2 = 1x^2 + 256$ .

Dus:  $|AC|^2 = 625 = 2x^2 + 337$ .

Ofwel:  $2x^2 = 288, 1x^2 = 144$ .

Dus:  $|BD| = 1x = 12$ .

[1] In de tekening in de tekst is hoek  $B$  erg scherphoekig getekend en is er geen suggestie van 'recht' gegeven!  
Hiernaast is dat wel gedaan.

In de voorbeelden 1, 2, 3 en 4 wordt dezelfde driehoek gebruikt.

**Vb 2.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ , rechthoekig in  $B$ .  $BD$  is een loodlijn.  $|BD| = 12, |DC| = |AD| + 7$ .  
Gevraagd:  $|AB|, |BC|, |AC|$ .

Stel:  $|AD| = 1x$  dan volgt:  $|DC| = 1x + 7$ . Dus:  $|AB|^2 = 1x^2 + 144, |BC|^2 = 1x^2 + 14x + 49 + 144$ .

Met  $|AC|^2 = (2x + 7)^2$  volgt nu:  $4x^2 + 28x + 49 = 2x^2 + 14x + 337$ . Ofwel:  $1x^2 + 7x = 144$ .

Er volgt:  $|AD| = 1x = 9, |DC| = 16, |AC| = 25$ . En verder:  $|AB| = 15, |BC| = 20$ .

**Vb 3.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ , rechthoekig in  $B$ .  $BD$  is een loodlijn.  $|BD| = 7, |AB| + |BC| = 24$ .  
Gevraagd is de lengte van elke zijde.

Stel:  $|AB| = 12 - 1x$  [1] dan volgt:  $|BC| = 12 + 1x$ .

Er volgt:  $|AD| = \sqrt{|AB|^2 - |BD|^2} = \sqrt{95 - 24x + 1x^2}$ .

En:  $|DC| = \sqrt{|BC|^2 - |BD|^2} = \sqrt{95 + 24x + 1x^2}$ .

Dus:  $|AC| = \sqrt{95 - 24x + 1x^2} + \sqrt{95 + 24x + 1x^2} = \sqrt{(12 - 1x)^2 + (12 + 1x)^2}$ .

Na tweemaal kwadrateren en vereenvoudigen volgt:  $1x^4 + 6624 = 386x^2$ .

Er volgt:  $1x^2 = 18$  [2], dus:  $1x = \sqrt{18}$  en  $|AB| = 12 - \sqrt{18}, |BC| = 12 + \sqrt{18}, |AC| = 18$ .

[1] Er wordt dus verondersteld:  $1x < 12$ .

[2] Dat geeft  $x = 4,24 \dots < 12$ , ok dus.

De andere oplossing zou zijn:  $x^2 = \sqrt{368}, x = 19,18 \dots$  en die voldoet niet, maar dat blijft onvermeld.

De tweede oplossing  $|AB| = 12 + \sqrt{18}, |BC| = 12 - \sqrt{18}, |AC| = 18$  wordt niet vermeld.

### Opmerking:

De veronderstelling dat zeker één zijde vanuit  $B$  maximaal 12 kan zijn, maakt dat de aanpak zoals boven mooi is, maar er wordt een tweede oplossing gemist.

Als begonnen wordt met  $|AB| = x$ , dan volgt:  $x^4 - 48x^3 + 478x^2 + 2352x - 28224 = 0$ . (\*)

Door de  $x^3$ -term en de  $x$ -term is deze lastiger te hanteren en leidt de aanpak boven tot een hanteerbare vierkantsvergelijking in  $x^2$ . Overigens: vergelijking (\*) =  $(x^2 - 24x - 224)(x^2 - 24x + 126)$ .

Met als oplossingen:  $x_1 = 12 - \sqrt{18}$ ,  $x_2 = 12 + \sqrt{18}$ ,  $x_3 = 12 - \sqrt{368}$ ,  $x_4 = 12 + \sqrt{368}$ .  
Hierboven is gevonden  $x_1$  en gemist  $x_2$ . Niet voldoen:  $x_3 < 0$ ,  $x_4 > 24$ .

**Vb 4.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ , rechthoekig in  $B$ .  $BD$  is een loodlijn.  $|BD| = 7\frac{1}{2}$ ,  $|BC| = |AB| + 4$ .  
Gevraagd is de lengte van elke zijde.

Stel:  $|AB| = 1x - 2$  [1], dan volgt:  $|BC| = 1x + 2$ .

Er volgt:  $|AD| = \sqrt{|AB|^2 - |BD|^2} = \sqrt{1x^2 - 4x - 52\frac{1}{4}}$ .

En:  $|DC| = \sqrt{|BC|^2 - |BD|^2} = \sqrt{1x^2 + 4x - 52\frac{1}{4}}$ .

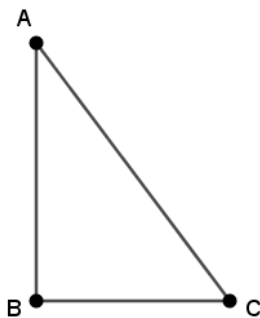
Dus:  $|AC| = \sqrt{1x^2 - 4x - 52\frac{1}{4}} + \sqrt{1x^2 + 4x - 52\frac{1}{4}} = \sqrt{2x^2 + 8}$ .

Na tweemaal kwadrateren en vereenvoudigen volgt:  $1x^4 = 120\frac{1}{2}x^2 + 434$ .

Er volgt:  $1x^2 = 124$  [1], dus  $1x = \sqrt{124}$  en  $|AB| = \sqrt{124} - 2$ ,  $|BC| = \sqrt{124} + 2$ ,  $|AC| = 16$ .

[1] De andere oplossing is:  $x^2 = -3\frac{1}{2}$ . Die wordt uiteraard niet vermeld...

**Vb 5.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ , rechthoekig in  $B$ . De zijden zijn samen  $24 + \sqrt{288}$ .  
Verder geldt:  $|AB| - |BC| = |AC| - |AB|$ . Gevraagd is de lengte van elke zijde.



Er volgt:  $|AB| = \frac{24 + \sqrt{288}}{3} = 8 + \sqrt{32}$ . [1]

Dus:  $|AC| + |BC| = 16 + \sqrt{128}$ .

Stel nu:  $|BC| = 1x$ . Dan volgt met:  $|AB|^2 = |AC|^2 - |BC|^2$

$(8 + \sqrt{32})^2 = (16 + \sqrt{128} - 1x)^2 - 1x^2$ .

Ofwel:  $2x + \sqrt{2x^2} = 18 + \sqrt{288}$ . Deel nu door  $2 + \sqrt{2}$  [!]

En dan volgt:  $|BC| = 1x = 6 + \sqrt{18}$ .

En:  $|AC| = 10 + \sqrt{50}$ .

[1] Dit volgt meteen. Met  $a$  tegenover  $A$  etc. volgt uit het gegeven:  $c - a = b - c$ , dus  $a + b = 2c$ .

En met  $a + b + c = \text{som}$  volgt:  $3c = \text{som}$ . Dus  $c = |AB| = \frac{1}{3} \text{som}$ .

**Vb 6.** Zelfde driehoek en vraag als hierboven.  $|AB| + |BC| = 16$ , opp +  $|AC| = 40$ . [\*]

Met  $|AB| = 8 + 1x$ ,  $|BC| = 8 - 1x$  volgt:  $|AC| = \sqrt{128 + 2x^2}$ .

Opp( $\Delta ABC$ ) =  $\frac{1}{2}|AB| * |BC| = 32 - \frac{1}{2}x^2$ . Dus:  $32 - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{128 + 2x^2} = 40$ .

Er volgt:  $1x^4 + 2x^2 = 256$ . En dan:  $1x^2 = 8$  [of  $1x^2 = -32$ ] dus  $1x = \sqrt{8}$ .

Dus:  $|AB| = 8 + \sqrt{8}$ ,  $|BC| = 8 - \sqrt{8}$ ,  $|AC| = 12$ .

**Opmerking** bij [\*]:

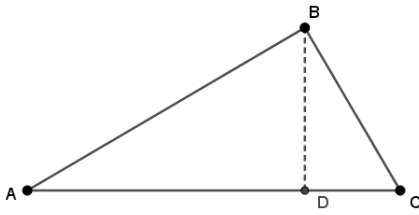
Vaak gaan deze vraagstukken over concrete stukken land maar dat zou nu tot verwarring leiden.

Er zou dan staan met  $a$ ,  $b$  en  $c$  getallen:  $a$  vierkante voet +  $b$  voet =  $c$  ???.

Alleen bij abstracte objecten vallen eenheden en dimensies weg en kan gelden:  $a + b = c$ .

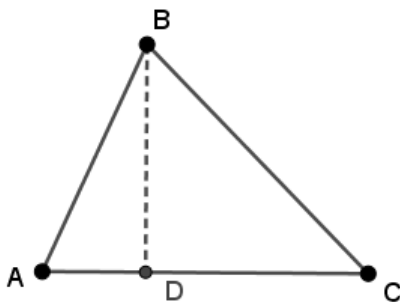
De vergelijkingen zijn dus los van concrete fysieke situaties te zien, een sprong voorwaarts in de 17<sup>e</sup> eeuw.

**Vb 7.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ , rechthoekig in  $B$ .  $BD$  is een loodlijn.  $|DC| = 18$ ,  $|AB| = 40$ .  
Gevraagd:  $|AD|$ ,  $|BC|$ ,  $|BD|$ .



Stel:  $|AD| = 1x$ . Dan volgt:  $|AC| = 18 + 1x$ .  
 $|BD|^2 = 1600 - 1x^2$ .  
 Dus:  $|BC|^2 = |BD|^2 + |DC|^2 = 1924 - 1x^2$ .  
 $|AC|^2 = 1600 + 1924 - 1x^2 = (18 + 1x)^2$ .  
 Ofwel:  $1x^2 + 18x = 1600$ .  $|AD| = 1x = 32$ .  
 En:  $|BC| = 30$ ,  $|BD| = \sqrt{576} = 24$ .

**Vb 8.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ .  $|AB| + |BC| = 112$ .  $BD$  is een loodlijn met  $|BD| = 48$ .  
En  $|AD| : |DC| = 5 : 9$ . Gevraagd is de lengte van elke zijde.



Stel:  $|AB| = 1x$ . Dan volgt:  $|BC| = 112 - 1x$ .  
 $|AD| = \sqrt{1x^2 - 2304}$ .  
 $|DC| = \sqrt{12544 - 224x + 1x^2 - 2304}$ .  
 Met  $9 * |AD| = 5 * |DC|$  volgt:  
 $\sqrt{81x^2 - 186624} = \sqrt{256000 - 5600x + 25x^2}$ .  
 Dat geeft:  $1x^2 + 100x = 7904$ . En:  $|AB| = 1x = 52$ .  
 Dus:  $|BC| = 60$ ,  $|AD| = 20$ ,  $|DC| = 36$ ,  $|AC| = 56$ .  
 En inderdaad:  $|AD| : |DC| = 5 : 9$ .

In de voorbeelden 8, 9, 10 en 11 wordt dezelfde driehoek gebruikt.

**Vb 9.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ .  $|AB| + |BC| = 132$ .  $BD$  is een loodlijn met  $|BD| = 48$ .  
 $|DC| = |AD| + 44$ . Gevraagd is de lengte van elke zijde.

Stel:  $|AD| = 1x$ . Dan volgt:  $|DC| = 1x + 44$ .  
 $|AB| = \sqrt{1x^2 + 2304}$ .  $|BC| = \sqrt{1x^2 + 88x + 1936 + 2304}$ .  
 Dus:  $\sqrt{1x^2 + 2304} + \sqrt{1x^2 + 88x + 1936 + 2304} = 132$ .  
 Na tweemaal kwadrateren [veel werk en vereenvoudiging] volgt:  $1x^2 + 44x = 1280$ .  
 Er volgt:  $|AD| = 1x = 20$ ,  $|DC| = 64$ ,  $|AC| = 84$ ,  $|AB| = 52$ ,  $|BC| = 80$ .

**Vb 10.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ .  $|BC| = |AB| + 24$ .  $BD$  is een loodlijn met  $|BD| = 45$ .  
 $|DC| = |AD| + 36$ . Gevraagd is de lengte van elke zijde.

[Feitelijk een zelfde vraagstuk als het vorige]. Met:  $|AB| = 1x$ ,  $|BC| = 1x + 24$  volgt:  
 $1x^2 + 24x = 3825$ . En dan:  $|AB| = 1x = 51$ ,  $|BC| = 75$ ,  $|AD| = 24$ ,  $|DC| = 60$ ,  $|AC| = 84$ .

**Vb 11.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ .  $|AB| + |AD| = 50$ ,  $|BC| + |DC| = 80$ ,  $|BD| + |DC| = 70$ .  
Gevraagd is de lengte van elke zijde.

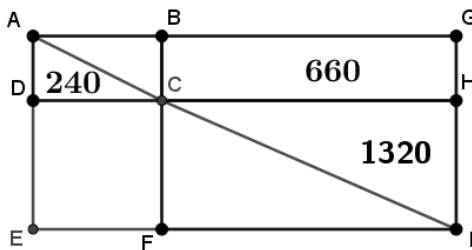
Stel:  $|AD| = 1x$ . Dan volgt:  $|AB| = 50 - 1x$ .  
 Dan volgt:  $|BD| = \sqrt{|AB|^2 - |AD|^2} = \sqrt{2500 - 100x}$ . Dus:  $|DC| = 70 - \sqrt{2500 - 100x}$ .  
 $|BC|^2 = |BD|^2 + |DC|^2 = 9900 - 200x - \sqrt{49000000 - 1960000x}$ .  
 En dan:  $|BC| = 80 - (70 - \sqrt{2500 - 100x}) = \sqrt{9900 - 200x - \sqrt{49000000 - 1960000x}}$ .

Na kwadrateren en vereenvoudigen volgt:  $7300 - 100x = \sqrt{64000000 - 2560000x}$ .

Na nogmaals kwadrateren en vereenvoudigen:  $1x^2 + 110x = 1071$ .

Er volgt:  $|AD| = 1x = 9, |AB| = 41, |BD| = 40, |DC| = 30, |AC| = 39, |BC| = 50$ .

**Vb 12.** Gegeven zijn drie lijnen [1] waarvan de eerste en de tweede een rechthoekige vierhoek  $ABCD$  insluiten ('begrijpen').  $Opp(ABCD) = 240$ . De eerste en de derde sluiten de rechthoekige vierhoek  $BCHG$  in.  $Opp(BCHG) = 660$ . De tweede en de derde sluiten de rechthoekige vierhoek  $FCHI$  in. [2]  $Opp(FCHI) = 1320$ . Gevraagd is de lengte van de lijnstukken [van de rechthoeken]. Zie de figuur. [2]



Stel:  $|BC| = 1x$ . Dus:  $|CD| = |CF| = \frac{240}{1x}$ . (\*)

Er volgt:  $|CH| = \frac{Opp(FCHI)}{|CF|} = 5\frac{1}{2}x$ .

Dus:  $Opp(BCHG) = 1x * 5\frac{1}{2}x = 5\frac{1}{2}x^2 = 660$ .

En met  $1x^2 = 120$  volgt:  $|BC| = 1x = \sqrt{120}$ . [3]

En  $|CD| = |CF| = \frac{240}{1x} = \sqrt{480}$ .

En  $|CH| = 5\frac{1}{2}x = \sqrt{3630}$ .

[1] Waarschijnlijk zijn bedoeld lijnstukken: eerste is  $BC$ , tweede is  $CD$ , derde is  $CH$ .

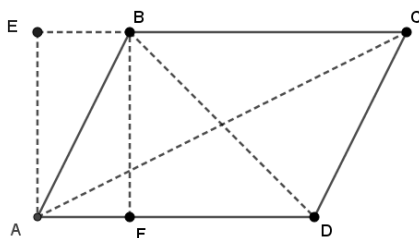
Tweede en derde geven rechthoek  $FCHI$  dus  $|CF| = |CD|$ . Dit blijkt ook uit (\*).  $CDEF$  is een vierkant.

[2] In de tekst lijkt  $A - C - I$  een rechte lijn, maar dat is niet zo.

Als dat wel zo zou zijn, dan zou volgen:  $Opp(CDEF) = 660$  en  $Opp(ABCD) = 330$ . Tegenspraak.

[3] Zetfout: in de tekst staat  $|BD| = 1x$ .

**Vb 13.** Gegeven is een parallellogram  $ABCD$  met overstaande zijden aan elkaar gelijk. [Redundantie!]  $Opp(ABCD) = 252$ . Voor de diagonalen geldt:  $|BD| = 20, |AC| = \sqrt{820}$ . Gevraagd is de lengte van elke zijde.



Stel:  $|AD| = |BC| = 1x$ . Er volgt:  $|AE| = |BF| = \frac{252}{1x}$ . [1]

$|EC| = \sqrt{|AC|^2 - |AE|^2} = \sqrt{820 - \frac{63504}{1x^2}} = \sqrt{\frac{820x^2 - 63504}{1x^2}}$ .

En:  $|DF| = \sqrt{|BD|^2 - |BF|^2} = \sqrt{\frac{400x^2 - 63504}{1x^2}}$ .

$|EC| + |FD| = |BC| + |EB| + |FD| = |BC| + |AD| = 2x$ .

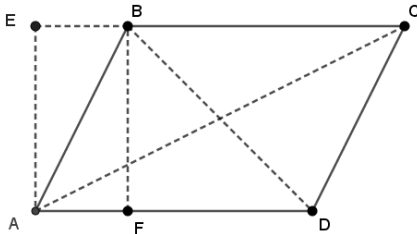
Dus:  $\sqrt{\frac{820x^2 - 63504}{1x^2}} + \sqrt{\frac{400x^2 - 63504}{1x^2}} = 2x$ . Na kwadrateren, vereenvoudigen, etc. volgt:

$1x^4 + 74529 = 610x^2$ . Dus:  $1x^2 = 441$  of  $169$ . Dus [keuze]:  $|BC| = |AD| = 1x = 21, |AB| = |CD| = 13$ .

[1] Blijkbaar  $AE \perp AD$  en  $BF \perp AD$ .

## Voorbeelden met vergelijkingen van graad 3 en 4

**Vb 14.** Gegeven is een parallellogram  $ABCD$  met overstaande zijden aan elkaar gelijk.  
 $Opp(ABCD) = 168$ ,  $|AB| + |BC| = |AD| + |CD| = 27$ . En  $|BD| : |AC| = \sqrt{45} : \sqrt{101}$ .  
 Gevraagd is de lengte van elke zijde.



Stel:  $|AD| = |BC| = 1x$ . Er volgt:  $|AE| = |BF| = \frac{168}{1x}$ .

En:  $|AB| = 27 - 1x$ .

$$|BE| = |AF| = \sqrt{|AB|^2 - |BF|^2} = \sqrt{\frac{1x^4 - 54x^3 + 729x^2 - 28224}{1x^2}}$$

En met:  $|EC| = |BE| + |BC| = |BE| + 1x$

En:  $|FD| = 1x - |AF|$ .

Dan volgt:  $|AC|^2 = |AE|^2 + |EC|^2 = \left(\frac{168}{1x}\right)^2 + \left(1x + \sqrt{\frac{1x^4 - 54x^3 + 729x^2 - 28224}{1x^2}}\right)^2$ .

En:  $|BD|^2 = |BF|^2 + |FD|^2 = \left(\frac{168}{1x}\right)^2 + \left(1x - \sqrt{\frac{1x^4 - 54x^3 + 729x^2 - 28224}{1x^2}}\right)^2$ .

En met  $|AC|^2 : |BD|^2 = 101 : 45$  volgt nu:

$$101 * \left(\left(\frac{168}{1x}\right)^2 + \left(1x - \sqrt{\frac{1x^4 - 54x^3 + 729x^2 - 28224}{1x^2}}\right)^2\right) = 45 * \left(\left(\frac{168}{1x}\right)^2 + \left(1x + \sqrt{\frac{1x^4 - 54x^3 + 729x^2 - 28224}{1x^2}}\right)^2\right)$$

[Dit wordt netjes uitgewerkt tot]

$$72720x^4 - 3926880x^3 + 43868304x^2 + 246903552x - 4073090112 = 0.$$

En dan nog verder naar:  $1x^4 - 54x^3 + 603\frac{126}{505}x^2 + 3395\frac{133}{505}x - 56010\frac{298}{505} = 0$ . [1]

Dit is te delen door  $(1x^2 - 27x - 307\frac{379}{505})$  en er zal resteren:  $1x^2 - 27x + 182 = 0$ .

Ofwel:  $1x^2 + 182 = 27x$  dus  $|AD| = |BC| = 1x = 14$  en  $|AB| = |CD| = 13$ . [2]

[1] De uitwerking zodanig dat er  $1x^4 \dots$  staat is nodig omdat de methode om derde- en vierdegraads vergelijkingen op te lossen zo werkt en begint en dat is vooraf behandeld door Brassers.

[2] Dit is een keuze. Ook  $|AD| = |BC| = 1x = 13$  en  $|AB| = |CD| = 14$  zou goed zijn.

### Opmerking 1:

Over de situatie  $1x^2 - 27x - 307\frac{379}{505} = 0$  wordt verder niets opgemerkt.

Er zou volgen:  $x_1 \approx -8,636 \dots$  Die waarde valt uiteraard af. Voor Brassers is die 'valsche'.

En:  $x_2 \approx 35,636 \dots$  Die valt af omdat  $|AD| + |CD| = 27$  dus  $|AD| = 1x < 27$ .

### Opmerking 2:

Elke vierdegraads veelterm is te ontbinden in vier eerstegraads of twee tweedegraads veeltermen.

Maar ontbinden naar  $(x^2 + px + q)(x^2 + px + r) = 0$  stelt, dat de factoren voor de  $x$ -termen gelijk zijn!

Dat betekent voor de vierdegraads veelterm:  $x^4 + 2px^3 + (p^2 + q + r)x^2 + (pq + pr)x + qr = 0$ .

In het voorbeeld:  $p = -27$ . En er volgt: (1)  $729 + q + r = 603\frac{126}{505}$  én (2)  $-27(q + r) = 3395\frac{133}{505}$ .

Zowel (1) als (2) moeten nu **dezelfde waarde** voor  $(q + r)$  geven en dat is zo:  $q + r = -125\frac{379}{505}$ .

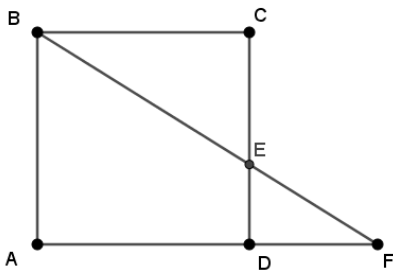
Met  $qr = -56010\frac{298}{505}$  zijn er twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Dat geeft:  $q = 182, r = -307\frac{379}{505}$ .

Een voorwaarde voor zo'n ontbinding van  $(x^4 + 2Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$  is dus:

$$B - A^2 = \frac{C}{A}$$

**Vb 15.** Voor het gegeven vierkant geldt:  $|AB| = |AD| = 12$ ,  $|EF| = 5$ .  
 Gevraagd:  $|DE|$ ,  $|EC|$ ,  $|DF|$ ,  $|BE|$ .



Stel:  $|DF| = 1x$ . Dus:  $|AF| = 12 + 1x$ .  
 Er geldt:  $|AF| : |AB| = |DF| : |DE|$   
 Dus:  $|DE| = \frac{12x}{12+1x}$ . En dan:  $|DE|^2 = |EF|^2 - |DF|^2$   
 dus:  $25 - 1x^2 = \frac{144x^2}{144+24x+1x^2}$ .  
 Dit wordt:  $1x^4 + 24x^3 + 263x^2 - 600x - 3600 = 0$ .  
 Dit is uit te delen door  $(1x^2 + 25x + 300)$  [1] en er resteert:  
 $1x^2 - 1x - 12 = 0$  ofwel:  $1x^2 = 1x + 12$ .  
 Er volgt:  $|DF| = 1x = 4$ . [2]  
 $|DE| = 3$ . En  $|EC| = 9$ ,  $|BE| = 15$ .

[1] Hoe dat gevonden is beschrijft Brassier hier niet. De oplossingen van  $1x^2 + 25x + 300 = 0$  zijn niet reëel dus voldoen niet.

[2] De andere oplossing van de vergelijking is negatief (-3) dus die voldoet niet.

**Opmerking:**

Omdat  $263 - 144 \neq -\frac{600}{12}$  is er geen ontbinding zoals in het vorige voorbeeld.

Nieuwe poging:  $x^4 + 24x^3 + 263x^2 - 600x - 3600 = (x^2 + 25x + q)(x^2 - x + r)$ .

Dit geeft:  $x^4 + 24x^3 + (q + r - 25)x^2 + (25r - q)x + qr$ .

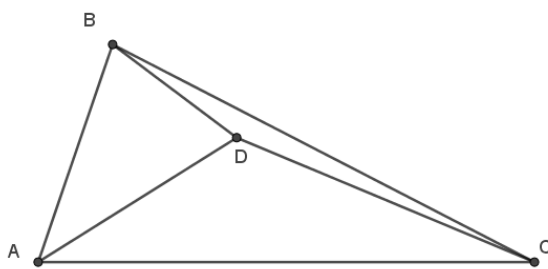
Dus er zou moeten gelden:  $q + r - 25 = 263$ ,  $25r - q = -600$ . Dat geeft:  $r = -12$ ,  $q = 300$ .

En inderdaad:  $qr = -3600$ . Dus de ontbinding is gevonden.

**Vb 16.** Gegeven is een driehoek  $ABC$  die verdeeld is in drie driehoeken  $ADB$ ,  $BDC$  en  $ADC$ .

Er geldt verder:  $|AB| = 37$ ,  $|AD| = \sqrt{1424}$ ,  $|BD| = 25$ ,  $|BC| = \sqrt{5849}$ ,  $|CD| = 52$ . [1]

Gevraagd:  $|AC|$ .



Stel:  $|AC| = 1x$ . Nu worden de oppervlaktes van elke driehoek apart gezocht en wel op de manier zoals geleerd van *Nicolaus Petri* in voorbeeld vier van de *Geometria*.

Dus:  $opp(ABC) = \sqrt{902\frac{1}{4}x^2 - 1254400 - \frac{1}{16}x^4}$ . [!!]

$Opp(ADB) = 440$ ,  $opp(BDC) = 160$ ,

$opp(ADC) = \sqrt{516x^2 - 102400 - \frac{1}{16}x^4}$ .

Dus:  $\sqrt{902\frac{1}{4}x^2 - 1254400 - \frac{1}{16}x^4} = 600 + \sqrt{516x^2 - 102400 - \frac{1}{16}x^4}$ .

Dit gekwadeerd, vereenvoudigd en dat nogmaals geeft:

$239189\frac{1}{16}x^4 + 2433600000000 = 1911060000x^2$ . [Klopt volgens *WolframAlpha*...]

Ofwel:  $1x^4 + 10174378\frac{4598}{17009} = 7989\frac{12699}{17009}x^2$ . En dan:  $1x^2 = 6400$ . [2]

Dus zijde  $|AC| = 1x = 80$ .

[1] Uiteindelijk komt er een 'mooie' waarde voor  $|AC|$ . Dit soort opgaven zijn dus duidelijk van achter naar voren 'geconstrueerd' want zulke getallen verzin je niet even...

[2] De vierdegraads vergelijking heeft ook nog als positieve oplossing:  $x_2 = \sqrt[4]{1589 \frac{12699}{17009}} = 39,872 \dots$

Maar die voldoet niet.

Met enige trigonometrie volgt, en zo had dit probleem ook aangepakt kunnen worden:

driehoek  $ADB$  ligt vast met de gegeven zijden en er volgt:  $\sphericalangle ADB = 68,8775 \dots^\circ$ ,

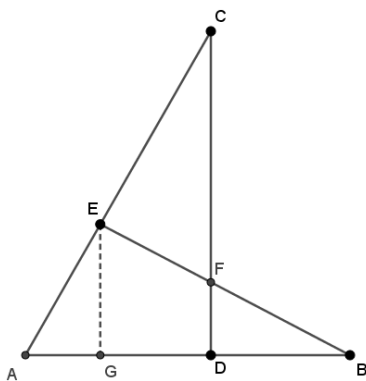
driehoek  $BDC$  ligt vast met de gegeven zijden en er volgt:  $\sphericalangle BDC = 165,7515 \dots^\circ$ .

Dus resteert:  $\sphericalangle ADC = 125,3710 \dots^\circ$ . Wel met de nodige afronding.

En dan volgt met de cosinus-regel:  $|AC| = 79,9987 \dots$   $x_2$  valt dan dus zeker af.

**Vb 17.** Voor de gegeven figuur geldt:  $|AC| = 3900$ ,  $|AB| = 3380$ ,  $|DC| = 3360$ ,  $|BE| = 2912$ ,  $|AD| = 1980$ ,  $|DB| = 1400$ ,  $|AE| = 1716$ ,  $|EC| = 2184$ . [1]

Gevraagd:  $|DF|$ ,  $|FC|$ ,  $|FB|$ ,  $|EF|$ .



$EG$  staat loodrecht op  $AD$ . Gezocht is eerst  $|EG|$ .

Er volgt:  $|EG| = 1478 \frac{2}{5}$ . [2]

En  $|AG| = \sqrt{|AE|^2 - |EG|^2} = 871 \frac{1}{5}$ .

Dus:  $|DG| = 1108 \frac{4}{5}$ .

Omdat  $|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2$  geldt:  $CD \perp AD$ .

Stel nu:  $|FD| = 1x$ .

Met de regel  $|DB| : |FD| = |BG| : |EG|$

volgt:  $|EG| = \frac{2508 \frac{4}{5}}{1400} x = 1 \frac{99}{125} x = 1478 \frac{2}{5}$ .

Dus:  $224x = 184800$ . En dan:  $|DF| = 1x = 825$ . En  $|CF| = 2535$ .

Er volgt verder:  $|FB| = \sqrt{|FD|^2 + |DB|^2} = 1625$ . Dus:  $|EF| = 1287$ .

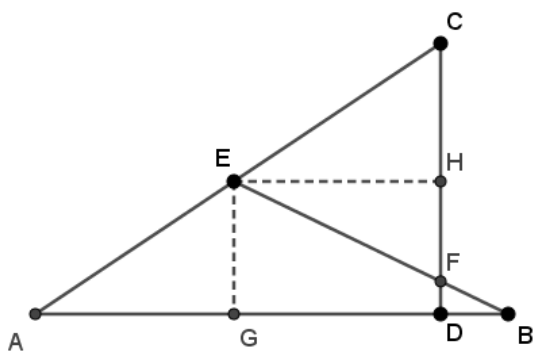
[1] Dat  $|EC| = 2184$  volgt uit  $|AC| - |AE|$ , dus een overbodig gegeven. Ook  $|DB|$  is overbodig.

[2] Met de regel van Heron volgt:  $opp(\triangle ABE) = 2498496 = \frac{1}{2} |AB| * |EG|$ .

**Vb 18.** Gegeven is [zie de figuur]:  $|FC| = 225$ ,  $|FB| = 10$ ,  $|EG| = 132$ ,  $|GD| = 168$ .

$EG$  is een loodlijn en hoek  $FDB$  is recht. [dus ook  $CD \perp AB$ .]

Gevraagd:  $|AE|$ ,  $|AC|$ ,  $|AD|$ ,  $|AB|$ ,  $|EF|$ ,  $|FD|$ .



Stel:  $|DB| = 1x$ . Dan volgt:  $|GB| = 168 + 1x$ .

En:  $|FD| = \sqrt{|FB|^2 - |DB|^2} = \sqrt{100 - 1x^2}$ .

En met  $|DB| : |DF| = |BG| : |EG|$  volgt:

$$|EG| = \sqrt{\frac{2822400 + 33600x - 28124x^2 - 336x^3 - x^4}{x^2}} = 132.$$

Gekwadrateerd en uitgewerkt wordt dit:

$$1x^4 + 336x^3 + 45548x^2 - 33600x - 2822400 = 0.$$

Gedeeld door  $(1x^3 + 344x^2 + 48300x + 352800)$  [1]

resteert:  $1x - 8 = 0$ . Dus  $|DB| = 1x = 8$ ,  $|FD| = 6$ .

$|BF| = 10$ .

En dan:  $|CH| = |CD| - |HD| = |CD| - |EG| = 225 + 6 - 132 = 99$ .  $|EB| = \sqrt{132^2 + 176^2} = 220$ .

$|EF| = |EB| - |BF| = 210$ .  $|EC| = \sqrt{99^2 + 168^2} = 195$ .

En met  $|CH| : |EH| = |CD| : |AD|$  volgt:  $|AD| = \frac{168 \cdot 231}{99} = 392$ . Dus:  $|AB| = 400$ .

Met  $|CH| : |EC| = |EG| : |AE|$  volgt:  $|AE| = \frac{195 \cdot 132}{99} = 260$ . Dus:  $|AC| = 455$ .

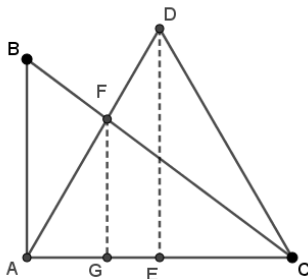
[1] Hoe dit gevonden is wordt niet vermeld. Echter als gevonden is dat 8 een oplossing is, dan is de factor  $(1x - 8)$  uit te delen en die levert dan de derdegraads vergelijking.

Oplossen van de derdegraads vergelijking geeft één negatieve  $x$ -waarde en twee niet-reële  $x$ -waarden.

**Vb 19.** Gegeven is een driehoek  $ABC$ , rechthoekig in  $A$  met  $|AB| = 39$ ,  $|AC| = 52$ .

Op de basis  $AC$  is een gelijkzijdige driehoek gemaakt met elke zijde van lengte 52.

Gevraagd:  $|AF|$ ,  $|FD|$ ,  $|BF|$ ,  $|FC|$ .



$$|BC| = \sqrt{|AB|^2 + |AC|^2} = 65. \quad |DE| = \sqrt{|AD|^2 - |AE|^2} = \sqrt{2028}.$$

$$\text{Stel: } |FC| = 1x.$$

$$\text{Met } |BC| : |AB| = |FC| : |FG| \text{ volgt: } |FG| = \frac{39 \cdot 1x}{65} = \frac{3}{5}x.$$

$$\text{En } |BC| : |AC| = |FC| : |GC| \text{ volgt: } |GC| = \frac{52 \cdot 1x}{65} = \frac{4}{5}x.$$

$$\text{Dus: } |AG| = 52 - \frac{4}{5}x.$$

$$\text{Met } |AG| : |FG| = |AE| : |DE| \text{ volgt: } |DE| = \frac{78x}{260 - 4x} = \sqrt{2028}.$$

$$\text{Dat geeft: } \sqrt{32448x^2 + 78x} = \sqrt{137092800}$$

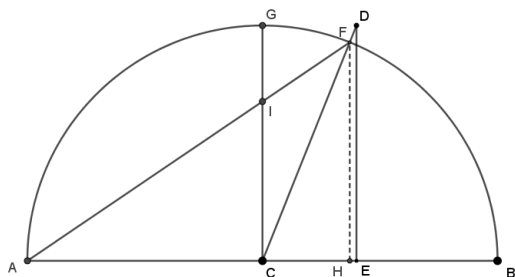
$$\text{Dus: } \sqrt{5\frac{1}{3}x^2 + 1x} = \sqrt{22533\frac{1}{3}}. \text{ Beide delen nu gedeeld door } (\sqrt{5\frac{1}{3}} + 1) \text{ geeft: } |FC| = 1x = 80 - \sqrt{1200}.$$

$$\text{Er volgt: } |BF| = \sqrt{1200 - 15}.$$

$$\text{En met } |DE| : |AD| = |FG| : |AF| \text{ volgt: } |AF| = \frac{52 \cdot \frac{3}{5} \cdot (80 - \sqrt{1200})}{\sqrt{2028}} = \sqrt{3072} - 24. \text{ En: } |FD| = 76 - \sqrt{3072}.$$

**Vb 20.** Voor de gegeven halve cirkel geldt dat de diameter  $|AB| = 12$ . Het lijnstuk  $DE$  staat loodrecht op  $AB$  en  $|DE| = |GC|$ . [1]  $|CE| = 2$ .  $CD$  snijdt de halve cirkel in  $F$ . Lijnstuk  $AF$  snijdt  $GC$  in  $I$ .

Gevraagd:  $|AI|$ ,  $|IF|$ ,  $|GI|$ ,  $|IC|$ .



$$|CD| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}.$$

$$\text{Met } |CD| : |DE| = |CF| : |FH| \text{ volgt: } |FH| = \sqrt{32\frac{2}{5}}.$$

$$\text{Met } |CD| : |CE| = |CF| : |CH| \text{ volgt: } |CH| = \sqrt{3\frac{3}{5}}.$$

$$\text{Dus: } |AH| = 6 + \sqrt{3\frac{3}{5}}.$$

$$\text{Stel: } |IC| = 1x. \text{ En dan met } |AC| : |IC| = |AH| : |FH| \text{ volgt: } |FH| = 1x + \sqrt{\frac{1}{10}x^2} = \sqrt{32\frac{2}{5}}.$$

$$\text{De 'partijen' gedeeld door } (1 + \sqrt{\frac{1}{10}}) \text{ geeft: } |IC| = 1x = \sqrt{40} - 2. \text{ Dus: } |IG| = 8 - \sqrt{40}.$$

$$\text{En dan: } |AF| = \sqrt{|FH|^2 + |AH|^2} = \sqrt{72 + \sqrt{518\frac{2}{5}}}. \text{ En: } |AI| = \sqrt{|IC|^2 + |AC|^2} = \sqrt{80 - \sqrt{640}}.$$

$$\text{En dus: } |IF| = |AF| - |AI| = \sqrt{72 + \sqrt{518\frac{2}{5}}} - \sqrt{80 - \sqrt{640}} = \sqrt{8 - \sqrt{6\frac{2}{5}}}. [2]$$

[1] In de figuur in de tekst lijkt  $D$  op en  $F$  binnen de cirkel te liggen. Dat is niet zo, blijkt uit de uitwerking van het voorbeeld.

[2] Brasser schrijft dit zomaar op, maar waarom is dat zo?

Een bewijs op moderne wijze:

$$\sqrt{80 - \sqrt{640}} = \sqrt{8 * 10 - 8 * \sqrt{10}} = 2\sqrt{2}\sqrt{10 - \sqrt{10}} = a.$$

$$\sqrt{72 + \sqrt{518\frac{2}{5}}} = \sqrt{36 * 2 + \sqrt{\frac{2592}{5}}} = \sqrt{36 * 2 + 36\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{6}{\sqrt{5}}\sqrt{10 + \sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10+2}}{\sqrt{5}}(\sqrt{10 - \sqrt{10}}) = b.$$

$$\text{En dan: } b - a = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{10 - \sqrt{10}} = \sqrt{\frac{40}{5} - \frac{160}{25}} = \sqrt{8 - \sqrt{6\frac{2}{5}}}.$$

**Vb 21.** [Dezelfde figuur als in vb 20.] Voor de gegeven halve cirkel geldt dat de diameter  $|AB| = 12$ . Het lijnstuk  $DE$  staat loodrecht op  $AB$  en  $|DE| = |GC|$ .  $CD$  snijdt de halve cirkel in  $F$ . Lijnstuk  $AF$  snijdt  $GC$  in  $I$ .  $|AI| = \sqrt{45}$ . Gevraagd:  $|CE|$ .

$$\text{Stel: } |CE| = 1x. |IC| = \sqrt{|AI|^2 - |AC|^2} = 3. |CD| = \sqrt{|DE|^2 + |CE|^2} = \sqrt{1x^2 + 36}.$$

$$\text{Met } |CD| : |DE| = |CF| : |FH| \text{ volgt: } |FH| = \sqrt{\frac{1296}{1x^2 + 36}}.$$

$$\text{Met } |CD| : |CE| = |CF| : |CH| \text{ volgt: } |CH| = \sqrt{\frac{36x^2}{1x^2 + 36}}. \text{ Dus: } |AH| = 6 + \sqrt{\frac{36x^2}{1x^2 + 36}}.$$

$$\text{Met } |AC| : |IC| = |AH| : |FH| \text{ volgt: } |FH| = 3 + \sqrt{\frac{9x^2}{1x^2 + 36}} = \sqrt{\frac{1296}{1x^2 + 36}}.$$

$$\text{Dat geeft: } 1296 - 216x + 9x^2 = 9x^2 + 324. \text{ Dus: } 216x = 972. \text{ En } |CE| = 1x = 4\frac{1}{2}.$$

**Vb 22.** [Dezelfde figuur als in vb 20.] Voor de gegeven halve cirkel geldt dat de diameter  $|AB| = 12$ . Het lijnstuk  $DE$  staat loodrecht op  $AB$  en  $|DE| = |GC|$ .  $CD$  snijdt de halve cirkel in  $F$ . Lijnstuk  $AF$  snijdt  $GC$  in  $I$ .  $|AI| : |IF| = 3 : 1$ . [1] Gevraagd:  $|AI|, |IF|, |IC|, |IG|, |CE|$ .

$$\text{Stel: } |IF| = 1x. \text{ Dan volgt: } |AI| = 3x, |AF| = 4x.$$

$$|IC| = \sqrt{|AI|^2 - |AC|^2} = \sqrt{9x^2 - 36}. \text{ En met } |AI| : |IC| = |AF| : |FH| \text{ volgt: } |FH| = \sqrt{16x^2 - 64}.$$

$$\text{En met } |AI| : |AC| = |AF| : |AH| \text{ volgt: } |AH| = 8, |CH| = 2.$$

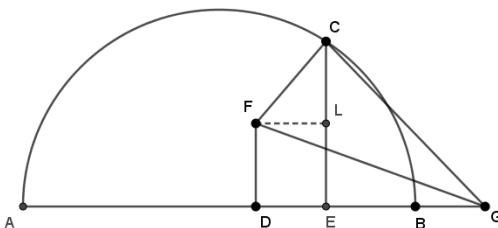
$$|CF|^2 = |FH|^2 + |CH|^2 = 16x^2 - 64 + 4 = 36. \text{ Dus: } 16x^2 = 96. \text{ En } 1x^2 = 6.$$

$$\text{Dus: } |IF| = 1x = \sqrt{6}, |AI| = 3x = \sqrt{54}, |IC| = \sqrt{9x^2 - 36} = \sqrt{18}, |IG| = 6 - \sqrt{18}.$$

$$\text{En } |FH| = \sqrt{16x^2 - 64} = \sqrt{32}. \text{ En met } |FH| : |CH| = |DE| : |CE| \text{ volgt: } |CE| = \sqrt{4\frac{1}{2}}.$$

[1] Zetfout in de tekst. Daar staat  $|AI| : |ID|$ .

**Vb 23.** In de gegeven figuur is  $FD$  een loodlijn.  $|FD| = 5, |FG| = \sqrt{425}, |EB| = 7\frac{1}{2}, |FC| : |CG| = 2 : 3$ .  $EC$  is de middenparallel van  $AE$  en  $EB$ .  $|AD| = 22$ . Gevraagd:  $|FC|, |CG|$ .



$$\text{Stel: } |CE| = 1x. \text{ Dus: } |AE| = \frac{|CE|^2}{|EB|} = \frac{2}{15}x^2.$$

$$\text{Er volgt: } |FL| = |DE| = \frac{2}{15}x^2 - 22. [FL \perp CE]$$

$$\text{En: } |EG| = 42 - \frac{2}{15}x^2 [1], |CL| = 1x - 5.$$

$$|FC|^2 = |FL|^2 + |CL|^2 = \frac{4}{225}x^4 - 4\frac{13}{15}x^2 - 10x + 509.$$



**Een mogelijke moderne benadering:**

Elke vierdegraads veelterm is te ontbinden in twee tweedegraads veeltermen.

Er volgt:  $(x^2 + px + r)(x^2 + qx + s) = x^4 + (p + q)x^3 + (r + pq + s)x^2 + (ps + qr)x + rs$ .

En dit moet gelijk zijn aan:  $x^4 - 88x^2 - 2736x - 51308$ .

Zie de  $x^3$ -term:  $p + q = 0$ . Ofwel:  $q = -p$ .

Zie de  $x$ -term:  $s - r = -\frac{2736}{p} = -\frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 19}{p}$ . Een geheel getal? Dan moet  $p = 1, 2, 3, 4, 6, \dots$

Zie de  $x^2$ -term:  $r + s = -88 + p^2$ . Alles met gehele getallen?

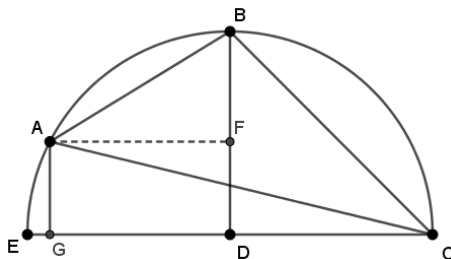
Dat geeft:  $(p, r, s) = (2, -726, 642), (4, -378, 306), (6, -254, 202), (8, -183, 159), (12, -86, 142)$ .

Zie de constante term:  $rs = -51308 = -254 \cdot 202$ . Dus alleen  $p = 6$  voldoet.

De ontbinding wordt:  $(x^2 - 6x - 254)(x^2 + 6x + 202)$ .

De tweede veelterm heeft geen reële wortels.

**Vb 25.** Gegeven is een driehoek  $ABC$  binnen een halfcirkel.  $|AB| = 2 \cdot |AG|$  met  $AG$  'recht-opstaende'.  $|EG| = 4, |BD| = |ED| = |DC|$ .  $BD$  is rechtopstaand. Gevraagd is de lengte van de driehoek zijden.



Omdat  $|AB| = 2 \cdot |AG|$  is boog  $AB$  het  $\frac{1}{6}$  van de gehele cirkel en [boog]  $AE$  het  $\frac{1}{12}$ -deel. Daarom is  $|AB|$  gelijk aan een zijde van een gelijkzijdige zeshoek in dezelfde cirkel. En dus gelijk aan een halve diameter  $|ED|, |DC|$  of  $|BD|$ . Stel:  $|AB| = 1x$ .

Dan volgt:  $|EC| = 2x, |GC| = 2x - 4, |AG| = \frac{1}{2}x$ .

Er volgt [t.g.v. middelevenredigheid]:  $|AG| = \sqrt{|EG| \cdot |GC|} = \sqrt{8x - 16} = \frac{1}{2}x$ .

Dus:  $8x - 16 = \frac{1}{4}x^2, 1x^2 + 64 = 32x$ . Dus:  $|AB| = |BD| = 1x = 16 + \sqrt{192}$ . [1]

$|EC| = 2x = 32 + \sqrt{768}, |GC| = 2x - 4 = 28 + \sqrt{768}, |AG| = \frac{1}{2}x = 8 + \sqrt{48}$ .

En dan:  $|AC| = \sqrt{|GC|^2 + |AG|^2} = \sqrt{864} + \sqrt{800}, |BC| = \sqrt{|BD|^2 + |DC|^2} = \sqrt{512} + \sqrt{384}$ .

[1] Omdat  $|AB| = |DE| > |EG| = 4$  voldoet de andere oplossing niet:  $x_2 = 16 - \sqrt{192} = 2,14 \dots$

**Vb 26.** Bezie de figuur hier boven. Gegeven is een driehoek  $ABC$  binnen een halfcirkel.  $|AB| = \sqrt{320}$  en  $|AG|$  is de middelevenredige tussen  $|EG|$  en  $|GC|$  met  $|EG| = 4$ . Gevraagd:  $|AC|, |BC|$ .

Stel:  $|GC| = 1x^2$  [!]. Dan volgt:  $|EC| = 1x^2 + 4, |DB| = |ED| = \frac{1}{2}x^2 + 2, |AG| = |FD| = 2x [= \sqrt{4 \cdot 1x^2}]$ .

En:  $|BF| = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right) - 2x = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2, |GD| = |AF| = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right) - 4 = \frac{1}{2}x^2 - 2$ .

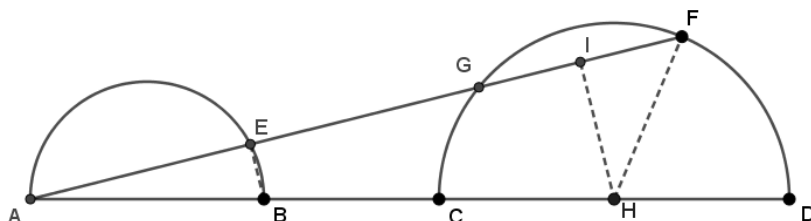
Er volgt:  $|AB|^2 = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 8 = 320$ .

Dus:  $1x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x - 624 = 0$ . Dit gedeeld door  $(1x^3 - 2x^2 + 20x + 104)$  geeft:

$1x - 6 = 0, 1x = 6$ . En dan:  $|AC| = \sqrt{|GC|^2 + |AG|^2} = \sqrt{6^4 + 12^2} = \sqrt{1440}$ .

$|BD| = |CD| = \frac{1}{2}x^2 + 2 = 20, |BC| = \sqrt{|BD|^2 + |DC|^2} = \sqrt{800}$ .

**Vb 27.** Op een rechte lijn staan twee halve cirkels 'als'  $AEB$  en  $CGFD$ . Diameters zijn:  $|AB| = 4$ ,  $|CD| = 6$ . En  $|AD| = 13$ . De rechte  $AF$  is getrokken en  $|EG| = 4$ . Gevraagd:  $|AE|$ ,  $|GF|$ .



Stel:  $|AE| = 1x$ .  
 Dan volgt:  
 $|AG| = 1x + 4$ .  
 $|AH| = 10$ .  
 $[H \text{ middelpunt}]$ .

$$|BE| = \sqrt{|AB|^2 - |AE|^2} = \sqrt{16 - 1x^2}. \text{ En met } |AB| : |EB| = |AH| : |IH| \text{ volgt: } |IH| = \sqrt{\frac{400 - 25x^2}{4}}.$$

$$\text{En } |IF| = \sqrt{|HF|^2 - |IH|^2} = \sqrt{\frac{25x^2 - 364}{4}}. \text{ En er geldt: } |AF| * |AG| = |AC| * |AD| \text{ [1] waaruit volgt:}$$

$$|AF| = \frac{91}{1x+4}. \text{ En met } |GF| = |AF| - |AG| = 2 * |IF| \text{ volgt: } \frac{75 - 8x - 1x^2}{1x+4} = \sqrt{25x^2 - 364}.$$

$$\text{Dit uitgewerkt geeft uiteindelijk: } 24x^4 + 184x^3 + 122x^2 - 1712x - 11449 = 0.$$

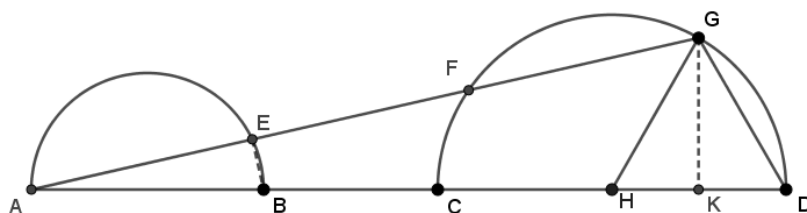
$$\text{Herschreven: } 1x^4 + 7\frac{2}{3}x^3 + 5\frac{1}{12}x^2 - 71\frac{1}{3}x - 477\frac{1}{24} = 0.$$

$$\text{Dit gedeeld door } (1x^2 + 4\frac{2}{3}x + 17\frac{5}{6}) \text{ resteert: } 1x^2 + 3x - 26\frac{3}{4} = 0.$$

$$\text{Ofwel: } 1x^2 + 3x = 26\frac{3}{4}. \text{ Dus: } |AE| = 1x = \sqrt{29} - 1\frac{1}{2}. \text{ En } |GF| = \sqrt{25x^2 - 364} = \sqrt{261} - 12\frac{1}{2}.$$

[1] Dit is de macht van punt  $A$  t.o.v. de grote cirkel. Het is een gevolg van propositie 36, boek III van Euclides. Die luidt kortweg: *De rechthoek gevormd met  $|AF|$  en  $|AG|$  is gelijk aan het vierkant op de raaklijn uit  $A$ .* En dat geldt dus ook voor de rechthoek gevormd met  $|AC|$  en  $|AD|$ .

**Vb 28.** Op een rechte lijn staan twee halve cirkels met diameters:  $|AB| = 4$ ,  $|CD| = 6$ .  $|GD| = |HD|$  en  $|EF| = |AB|$ . Gevraagd:  $|BC|$ ,  $|AE|$ ,  $|FG|$ .



Stel:  $|AC| = 1x$ .  
 Dan volgt:  
 $|AK| = 1x + 4\frac{1}{2}$ .  
 $|AK|^2 = 1x^2 + 9x + 20\frac{1}{4}$ .

$$\text{Er volgt: } |AG| = \sqrt{|AK|^2 + |KG|^2} = \sqrt{1x^2 + 9x + 20\frac{1}{4} + (9 - 2\frac{1}{4})} = \sqrt{1x^2 + 9x + 27}.$$

$$\text{Met } |AG| : |AK| = |AB| : |AE| \text{ volgt: } |AE| = \frac{4x+18}{\sqrt{1x^2+9x+27}}. \text{ En dan: } |AF| = |AE| + 4.$$

$$\text{En nu volgt: } |AD| * |AC| = |AF| * |AG|. \text{ [Zie [1] vb 27.]}$$

$$\text{Dus: } (1x + 6) * 1x = \left(4 + \frac{4x+18}{\sqrt{1x^2+9x+27}}\right) * (\sqrt{1x^2 + 9x + 27}).$$

$$\text{En dit verder uitgewerkt geeft [uiteindelijk]: } 1x^4 + 4x^3 - 48x^2 - 216x - 108 = 0.$$

$$\text{Hierbij opgeteld: } (28x^2 + 168x + 252) \text{ [1]}$$

$$\text{geeft: } 1x^4 + 4x^3 - 20x^2 - 48x + 144 = 28x^2 + 168x + 252.$$

$$\text{Trek nu uit beide delen de wortel en er volgt: } 1x^2 + 2x - 12 = \sqrt{28x^2} + \sqrt{252}.$$

$$\text{Dus: } 1x^2 = \sqrt{28x^2} - 2x + \sqrt{252} + 12. \text{ Dus: } |AC| = 1x = \sqrt{7} - 1 + \sqrt{20 + \sqrt{112}}. \text{ [2]}$$

Dus:  $|BC| = |AC| - 4 = \sqrt{7} - 5 + \sqrt{20 + \sqrt{112}}$ .

En:  $|AK| = |AC| + |CK| = \sqrt{7} + 3\frac{1}{2} + \sqrt{20 + \sqrt{112}}$ .

Dus:  $|AG| = \sqrt{|AK|^2 + |KG|^2} = \sqrt{7} + 2 + \sqrt{35 + \sqrt{343}}$ .

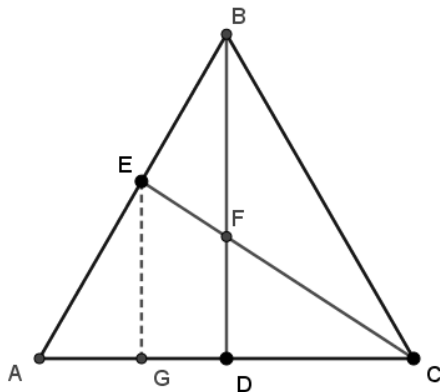
En er volgt:  $|AF| = \frac{|AC| \cdot |AD|}{|AG|} = 3\frac{5}{19} + \sqrt{4\frac{348}{361}} + \sqrt{2\frac{354}{361}} + \sqrt{8\frac{11240}{130321}}$ . En:  $|AE| = |AF| - 4$ .

En:  $|FG| = |AG| - |AF| = \sqrt{\frac{63}{361}} - 1\frac{5}{19} + \sqrt{18\frac{297}{361}} + \sqrt{27\frac{19980}{130321}}$ . [!]

[1] Een bijzondere 'truc'. Deze veelterm is gelijk aan  $28(x + 3)^2$ . Dus het rechterlid heeft een 'mooie' wortel maar blijkbaar het linkerlid nu ook en dat is het doel.

[2] De andere oplossing van de vergelijking is negatief.

**Vb 29.** Gegeven is een driehoek  $ABC$  waarvan elke zijde gelijk is aan 2. Uit  $C$  is de lijn  $CE$  getrokken die de loodlijn  $BD$  snijdt in een punt  $F$ , en wel zo dat  $|AE| = |BF|$ . Gevraagd:  $|AE|$ .



Stel:  $|AE| = |BF| = 1x$ . Dan volgt:  $|AG| = \frac{1}{2}x$ ,  $|BD| = \sqrt{3}$ .

Met  $|AB| : |BD| = |AE| : |EG|$  volgt:  $|EG| = \sqrt{\frac{3}{4}}x^2$ .

En ook  $|GC| : |EG| = |DC| : |FD|$ .

Dus:  $|FD| = \frac{\sqrt{3}x^2}{4-1x} = \sqrt{3} - 1x$ .

Dat geeft [na uitwerking]:

$$1x^2 + \sqrt{48} = 4x + \sqrt{12}x^2.$$

Dus:  $|AE| = |BF| = 1x = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{7}$  [1]

[1] Dus  $|AE| = 1,08 \dots < 2 = |AB|$ . De andere oplossing van de vergelijking:  $x_2 = 6,3778 \dots > 2$ .

Dan ligt  $E$  op het verlengde van  $AB$  en snijpunt  $F$  op het verlengde van  $DB$ , en dat is nu niet bedoeld.

**Vb 30.** Bezie de figuur hierboven. Nu geldt:  $|EB| = |FD|$ . Gevraagd:  $|EB|$ .

Stel:  $|EB| = |FD| = 1x$ . Dan volgt:  $|AE| = 2 - 1x$ ,  $|AG| = 1 - \frac{1}{2}x$ ,  $|GC| = 1 + \frac{1}{2}x$ .

Met  $|AB| : |BD| = |AE| : |EG|$  volgt:  $|EG| = \sqrt{3} - \sqrt{\frac{3}{4}}x^2$ .

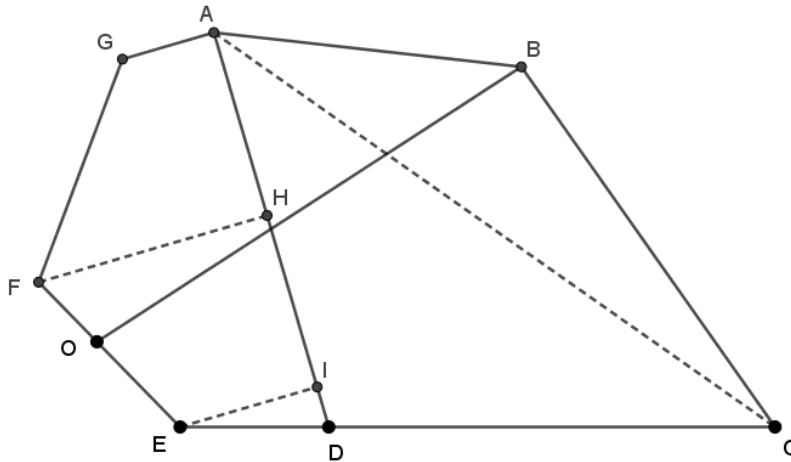
En met  $|GC| : |EG| = |DC| : |FD|$  volgt:  $|FD| = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}x^2}{2+1x} = 1x$ .

Er volgt:  $1x^2 + 2x + \sqrt{3}x^2 = \sqrt{12}$ .

En dan:  $|EB| = |DF| = -1 - \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\sqrt{27} + 1\frac{3}{4}}$  [1]

[1] Dus  $|EB| = 0,76 \dots$ . De andere oplossing van de vergelijking is negatief.

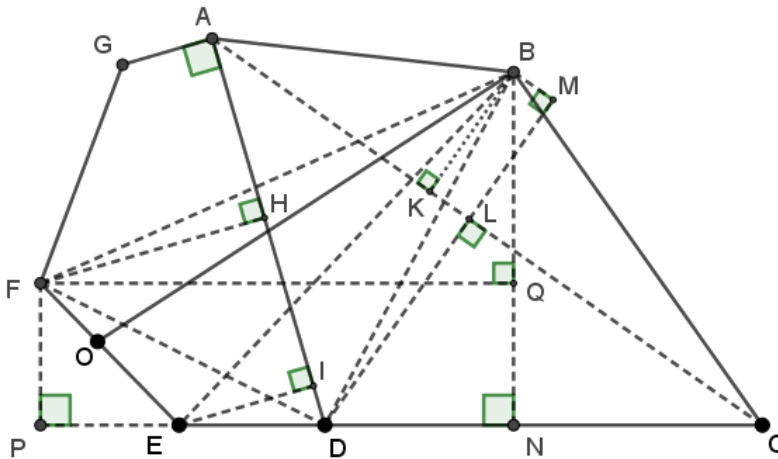
**Vb 31.** Gegeven zijn twee figuren tegen elkaar gelegen:  $DEFGA$  en  $ABCD$ . Met  $|ED| = 12\frac{1}{2}$ ,  $|EF| = 17$ ,  $|FG| = 20$ ,  $|GA| = 8$ ,  $|AB| = 26$ ,  $|BC| = 37$ ,  $|CD| = 37\frac{1}{2}$ ,  $|AD| = 34\frac{1}{2}$ ,  $|AH| = 16$ ,  $|HI| = 15$ ,  $|ID| = 3\frac{1}{2}$ .  $AD$  hebben ze gemeen en hoek  $GAH$  is recht. Loodlijn  $|FH| = 20$ ,  $|EI| = 12$ , diagonaal  $|AC| = \sqrt{3321}$ . [1] De twee figuren wil men verdelen door een lijn uit  $B$  ( $BO$ ) zodanig dat geldt:  $opp(OFGAB) = opp(DEFGA)$  en  $opp(BCDEO) = opp(ABCD)$ . Waar zal de 'scheyd'-lijn  $BO$  komen?



[Een erg gekunstelde vraag en de uitwerking beslaat twee pagina's in de tekst.

Brasser maakt een tweede figuur met allerlei extra lijntjes. De markering van de rechte hoeken is van de schrijver dezes.

Er wordt enkel gerekend.]



$$\begin{aligned} opp(trap HFAG) &= 224 \\ &= \frac{1}{2}(|GA| + |FH|) * |AH|. \\ opp(trap HFEI) &= 240. \\ opp(\Delta DIE) &= 21. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dus: } opp(AGFED) &= 485. \\ &= opp(OFGAB). \end{aligned}$$

Allerlei lengtes worden berekend [2]:  $|KB|$ ,  $|DL|$ , daarmee  $|DM| = \sqrt{1159\frac{5}{41}}$ .

En met  $|AK|$ ,  $|LC|$  volgt  $|BM| = |KL| = \sqrt{17\frac{21}{166}}$ . Dus:  $|BD| = \sqrt{1176\frac{1}{4}}$ .

En daarmee:  $opp(BCDEO) = opp(ABCD) = \frac{1}{2}|DM| * |AC| = \sqrt{962361} = 981$ . (\*)

Met  $|BD|$ ,  $|BC|$  en  $|CD|$  volgt  $|BN| = 30\frac{6}{25}$  en daarmee:  $opp(EBC) = \frac{1}{2}|EC| * |BN| = 756$ .

Dus met (\*) volgt nu:  $opp(\Delta OBE) = 981 - 756 = 225$ . (\*\*)

Er volgt ook nog:  $|DN| = \sqrt{|BD|^2 - |BN|^2} = 16\frac{9}{50}$ . En:  $|EB| = \sqrt{|BN|^2 + |EN|^2} = \sqrt{1737}$ .

Via  $|FH|$ ,  $|HD|$ ,  $|FD| = \sqrt{742\frac{1}{4}}$  volgt:  $|FP|(=|QN|) = 12\frac{4}{25}$ ,  $|PE|$  en  $|PN| = |FQ| = 40\frac{14}{25}$ .

Dus:  $|BF| = \sqrt{|FQ|^2 + |BQ|^2} = \sqrt{1972}$ .

Er volgt met [2]  $|FE| = 17, |FB| = \sqrt{1972}, |EB| = \sqrt{1737}: opp(\Delta FBE) = 354$ .

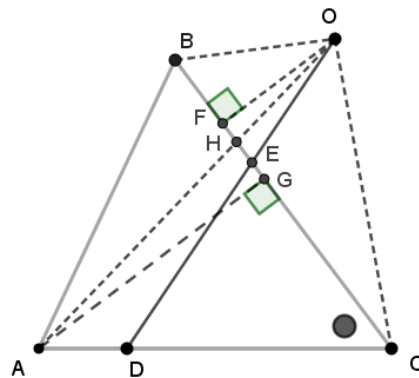
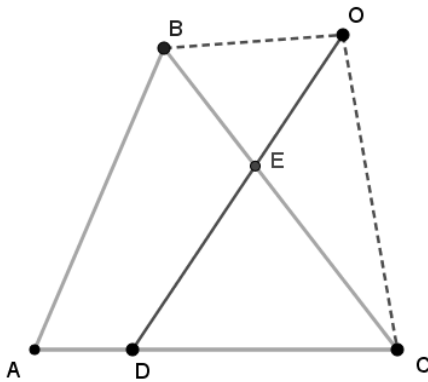
En nu met (\*\*):  $opp(\Delta FBO) = 354 - 225 = 129$ .

Omdat geldt:  $opp(\Delta FBE) : opp(\Delta FBO) = |FE| : |FO|$  volgt:  $|FO| = 17 * \frac{129}{354} = 6 \frac{23}{118}$ .

[1] De lengtes van  $FH$  en  $EI$  zijn te berekenen en hoeven niet gegeven te worden. Het bespaart wel rekenwerk, maar er blijft nog genoeg te rekenen over...

[2] Hier wordt de formule van Heron gebruikt.

**Vb 32.** Gegeven is een driehoek  $ABC$  met  $|AB| = 65, |BC| = 75, |AC| = 70$ . Men wil die verdelen in twee gelijke stukken in oppervlakte door een rechte lijn uit punt  $O$ . Er geldt:  $|BO| = \sqrt{1360}, |CO| = \sqrt{3385}$ .  
 Gevraagd: Waar worden de zijden van de driehoek gesneden?



In de tweede figuur zijn loodlijnen getrokken en er volgt:

$$|AG| = 56, |FO| = 28, |BG| = 33, |GC| = 42, |BF| = 24, |FC| = 51, |FG| = 9. [1]$$

Er geldt:  $|FO| : |AG| = |FH| : |HG| = 1 : 2$ . Dus:  $|FH| = 3, |HG| = 6$ .

En daarmee:  $|BH| = 27, |HC| = 48$ .

Er volgt nog:  $|HO| = \sqrt{|OF|^2 + |FH|^2} = \sqrt{793}, |AH| = \sqrt{|AG|^2 + |GH|^2} = \sqrt{3172}$ .

$$Opp(\Delta DEC) = \frac{1}{2} opp(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} * 56 * 75 \right) = 1050. (*)$$

$$Opp(\Delta AHC) = \frac{1}{2} * 56 * 48 = 1344.$$

Dus:  $opp(\Delta AHC) = 1344 - 1050 = 294$ .

En:  $opp(\Delta AOC) = opp(\Delta AHC) + opp(\Delta CHO) = 1344 + 672 = 2016$ .

Nu volgt:  $(|AC| * |HC|) : (|DC| * |EC|) = opp(\Delta AHC) : opp(\Delta DEC)$ . [2]  
 'Overmits' de gemeenschappelijk hoek bij  $C$ .

Stel nu:  $|DC| = 1x$ . Dan volgt:  $(70 * 48) : (1x * |EC|) = 1344 : 1050$ .

$$\text{Dus: } |EC| = \frac{2625}{1x}. \text{ En dan: } opp(\Delta OEC) = \frac{1}{2} |FO| * |EC| = \frac{36750}{1x}.$$

$$\text{Met (*) volgt dan: } opp(\Delta ODC) = \frac{1050x + 36750}{1x}.$$

$$\text{Met } |DC| : |AC| = 1x : 70 = opp(\Delta ODC) : opp(\Delta OAC) \text{ volgt: } 2016x = 70 * \left( \frac{1050x + 36750}{1x} \right).$$

$$\text{Dus: } 2016x^2 = 73500x + 2572500 \text{ ofwel: } 1x^2 = 36 \frac{11}{24}x + 1276 \frac{1}{24}.$$

$$\text{Dat geeft: } |DC| = 1x = 58 \frac{1}{3}, |AD| = 11 \frac{2}{3}, |EC| = 45, |BE| = 30.$$

[1] Hierbij is weer de formule van Heron gebruikt voor de hoogtelijn. Verder ook Pythagoras.

[2] Dit is een gevolg van propositie 5, boek VI Euclides.

Modern gebruik:  $Opp(\Delta) = \frac{1}{2}ab \cdot \sin(\gamma)$ . Met als hoek  $\gamma$  de hoek tussen  $a$  en  $b$ .

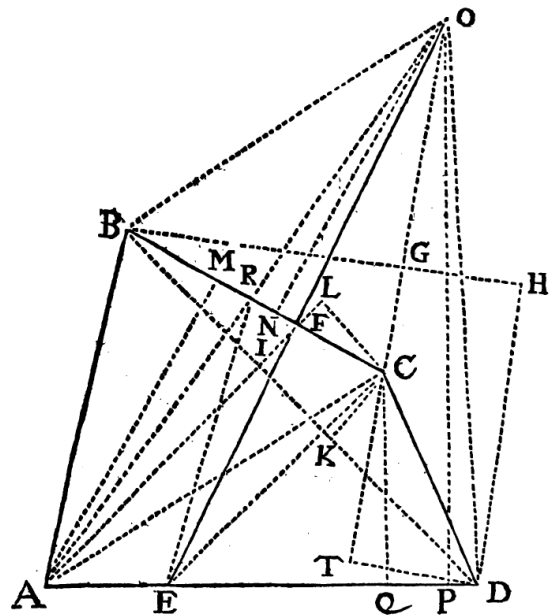
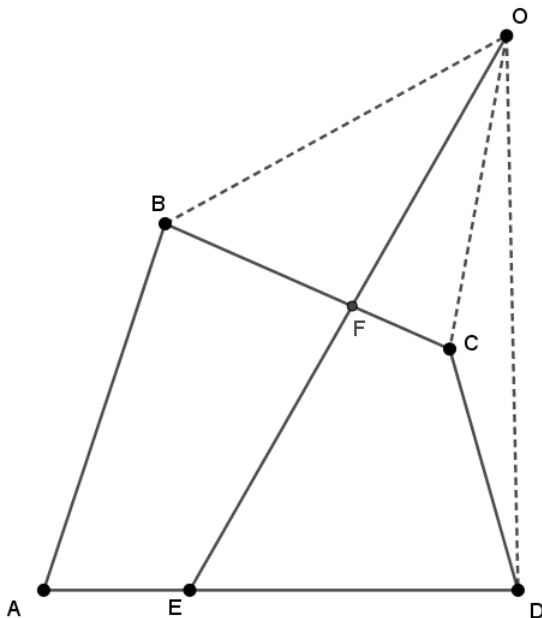
**Opmerking:**

Dit vraagstuk werd door S.H. Cardinael (1578-1647) zuiver meetkundig en dus zonder (cossische) getallen opgelost voor een punt  $O$  binnen de driehoek gelegen. Zie kwestie 92 in zijn prachtige boek "Hondert geometrische questien met hare solutien" (1612).

**Vb 33.** Gegeven is een vierhoek  $ABCD$  met  $|AB| = 41, |BC| = 34, |CD| = 26, |AD| = 49$ . Men wil die verdelen in twee gelijke stukken in oppervlakte door een rechte lijn uit punt  $O$ . Daarvoor geldt:

$$|BO| = \sqrt{1754\frac{7}{9}}, |CO| = \sqrt{1618\frac{7}{9}}, |OD| = \sqrt{4128\frac{1}{9}}. [1]$$

Gevraagd: Waar worden de zijden van de vierhoek gesneden?



Eerst wordt gezocht de lengte van loodlijn  $BG$  en  $CG$  en  $GO$ .

$$\text{Er volgt: } |BG| = \sqrt{995\frac{277}{857}}, |CG| = \sqrt{160\frac{580}{857}}, |GO| = \sqrt{759\frac{3506}{7713}}. [2]$$

$$\text{Met driehoek } OCD \text{ is de loodlijn } TD \text{ te vinden: } |TD| = \sqrt{156\frac{13380}{14569}}, |CT| = \sqrt{519\frac{1189}{14569}}. [2]$$

$$\text{Dus: } |GT| = |GC| + |CT| = \sqrt{1257\frac{5167}{14569}}. \text{ En: } |BH| = |BG| + |GH| = \sqrt{1942\frac{9402}{14569}}.$$

$$\text{En daarmee volgt: } |BD| = \sqrt{|BH|^2 + |GT|^2} = \sqrt{3200}. [!]$$

$$\text{Er volgt: } |AI| = \sqrt{1200\frac{1}{2}}, |CK| = \sqrt{98}. \text{ Dus: } |AL| = |AI| + |IL| = |AI| + |CK| = \sqrt{1984\frac{1}{2}}. (*)$$

$$\text{En: } |CL| = |DI| - |DK| = \sqrt{112\frac{1}{2}}. [3]$$

$$\text{Dus: } |AC| = \sqrt{|AL|^2 + |CL|^2} = \sqrt{2097}.$$

$$\text{Met (*) volgt: } opp(ABCD) = \frac{1}{2}|BD| \cdot |AL| = \sqrt{1587600} = 1260.$$

$$\text{Dus: } opp(DEF C) = opp(ABFE) = 630.$$

Verder volgt na berekeningen:  $|AM| = 39\frac{9}{17}$ ,  $|BM| = 10\frac{15}{17}$ ,  $|MC| = 23\frac{2}{17}$ . [3]

En:  $|ON| = 37\frac{1}{3}$ ,  $|BN| = 19$ . Dus:  $|MN| = 8\frac{2}{17}$ .

En dan met  $|MR| : |RN| = |AM| : |ON| = 39\frac{9}{17} : 37\frac{1}{3}$  volgt:  $|MR| = 4\frac{104}{595}$ ,  $|RN| = 3\frac{33}{35}$ .

Dus:  $|BR| = |BM| + |MR| = 15\frac{2}{35}$ ,  $|RC| = |BC| - |BR| = 18\frac{33}{35}$ .

En ook:  $|RO| = \sqrt{1409\frac{3571}{11025}}$ ,  $|AO| = \sqrt{5973\frac{7}{9}}$ ,  $|AR| = \sqrt{1580\frac{4}{1225}}$  [3]

En opnieuw naar de oppervlakten toe.

$$Opp(ARFE) = opp(ABFE) - opp(\Delta BRA) = 630 - \frac{1}{2}|AM| * |BR| = 332\frac{2}{5}.$$

Stel nu:  $|AE| = 1x$ . Dan volgt:  $|DE| = 49 - 1x$ .

$$|OP| = 64, |CQ| = 24. [3]$$

En dan:  $opp(\Delta AOE) = \frac{1}{2}|OP| * |AE| = 32x$ . (\*\*)

En met  $|AR| : |RO| = opp(\Delta ARE) : opp(\Delta ROE)$  volgt:

$$opp(\Delta ARE) = \frac{|AR|}{|AO|} * opp(\Delta AOE) = \frac{\sqrt{1580\frac{4}{1225}}}{\sqrt{5973\frac{7}{9}}} * 32x = 16\frac{16}{35}x.$$

$$Dus: opp(\Delta ERF) = opp(ARFE) - opp(\Delta ARE) = 332\frac{2}{5} - 16\frac{16}{35}x.$$

$$Verder: opp(\Delta EFC) = opp(EFCD) - opp(\Delta ECD) = 630 - \frac{1}{2}|CQ| * |DE| = 12x + 42.$$

En dan met  $|FC| : |RC| = opp(\Delta EFC) : opp(\Delta ERC)$  volgt:

$$|FC| = 18\frac{33}{35} * \frac{12x+42}{374\frac{2}{5} - 4\frac{16}{35}x} = \frac{102x+357}{168-2x}. \text{ En: } |RF| = \frac{98889-4896x}{5880-70x}. [4]$$

Tenslotte:  $opp(\Delta AOE) = opp(\Delta RFO) + opp(ARFE) = \frac{1}{2}|NO| * |RF| + 332\frac{2}{5} = 32x$ . Zie (\*\*)

$$Dus: \frac{54292-1638x}{84-1x} = 32x \text{ ofwel: } 32x^2 + 54292 = 4326x \text{ en dus: } 1x^2 + 1696\frac{5}{8} = 135\frac{3}{16}.$$

Er volgt:  $|AE| = 1x = 14$ ,  $|ED| = 35$ ,  $|FC| = 12\frac{1}{4}$ ,  $|BF| = 21\frac{3}{4}$ .

[1] Hoe kom je daarop? Het voorbeeld beslaat ruim twee pagina's in de tekst. In de tweede figuur zijn de hoeken bij  $G, H, I, K, L, M, N, P, Q$  en  $T$  recht.

[2] Hierbij is weer de formule van Heron gebruikt voor de hoogtelijn. Verder ook Pythagoras.

Overigens is dit niet leesbaar in de kopie van de tekst. Na reconstructie zijn de breuken gevonden.

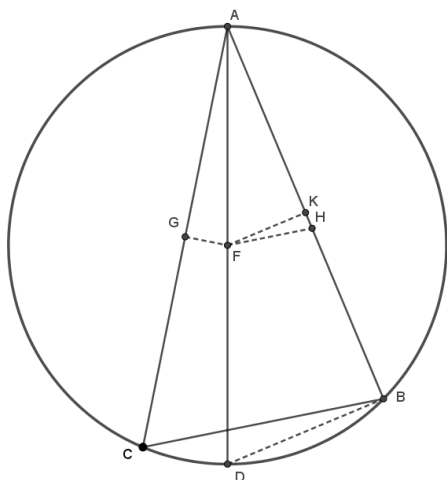
[3] De berekening is nu weggelaten.

[4] Zetfouten: in de tekst staat in de noemer 186 en bij 4896 ontbreekt de  $x$ . Er is wel verder met de juiste getallen doorgerekend.

### Opmerking:

Een van de meest bewerkelijke voorbeelden van Brasser en alles is handmatig gedaan door hem... maar het klopt allemaal en het eindigt met mooie getallen. Meesterlijk!

**Vb 34.** Driehoek  $ABC$  heeft een omgeschreven cirkel met diameter  $|AD| = 16$ . Er geldt:  $|BC| = 9$  en  $\text{hoek } CAB = 3 * \text{hoek } CAD$ . Gevraagd:  $|AB|, |AC|$ .



Stel:  $|CD| = 1x$ . Dan volgt:  $|GF| = \frac{1}{2}x$ . [1]

Met  $|AH| = |AF| = 8$  volgt:  $|FH| = 2 * |GF| = 1x$ . [2]

Dus van driehoek  $AFH$  zijn nu drie zijden bekend.

$FK$  is een loodlijn en er volgt:  $|FK| = \sqrt{1x^2 - \frac{1}{256}x^4}$ . [3]

En:  $|AK| = 8 - \frac{1}{16}x^2$ . [3]

$|AB| = 2 * |AK| = 16 - \frac{1}{8}x^2$ .

En:  $|DB| = 2 * |FK| = \sqrt{4x^2 - \frac{1}{64}x^4}$ .

$ABCD$  is een koordenvierhoek dus er geldt:

$|AC| * |BD| + |AB| * |CD| = |AD| * |BC|$ . [4]

$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 - |CD|^2} = \sqrt{256 - 1x^2}.$$

$$\text{En er volgt: } (\sqrt{256 - 1x^2}) * \left( \sqrt{4x^2 - \frac{1}{64}x^4} \right) + \left( 16 - \frac{1}{8}x^2 \right) * 1x = 144.$$

Uitgewerkt wordt dat:  $1x^3 - 192x + 576 = 0$ . [12 is een oplossing.]

Dit gedeeld door  $(1x - 12)$  [5] geeft:  $1x^2 + 12x - 48 = 0$  ofwel:  $1x^2 + 12x = 48$ .

Dus:  $|CD| = 1x = \sqrt{84} - 6$ . [6] En dan:  $|AB| = \sqrt{189} + 1, |AC| = \sqrt{108} + \sqrt{28}$ .

[1]  $G$  is het midden van  $AC$ , dus  $FG \perp AC$ .

[2] Driehoek  $GAF$  'past' tweemaal in driehoek  $FAH$  want  $\text{hoek } FAH = 2 * \text{hoek } GAF$ .

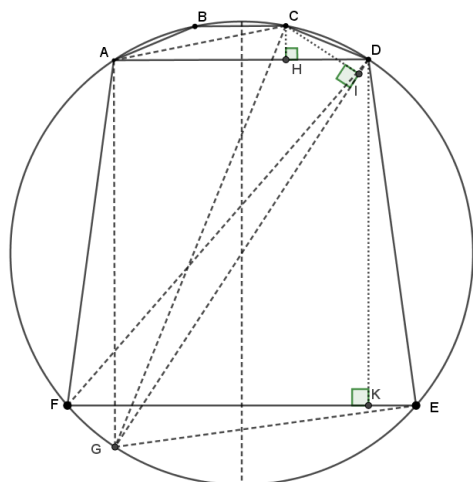
[3] Voorwaarde:  $x \leq 16$ . En dat is zo in de gegeven figuur.

[4] De stelling van Ptolemeus.

[5] In de figuur is te zien dat  $\text{hoek } DAB < 90^\circ$  en bijgevolg  $\text{hoek } CAD < 45^\circ$ . Als  $|CD| = 12$  dan zou volgen:  $\text{hoek } CAD > 45^\circ$ . Dus de oplossing  $x = 12$  valt af.

[6] De andere oplossing van de vergelijking is negatief.

**Vb 35.** In de gegeven cirkel geldt: diameter  $|DG| = 32, |AD| = 15\frac{15}{32}, |AB| = |BC| = |CD|$  en  $|AF| = |FE| = |ED|$ . Gevraagd:  $|AB|, |AF|$ .



[Markering van de rechte hoeken is van de schrijver dezes.]

Stel:  $|AB| = |BC| = |CD| = 1x$ .

Dan volgt:  $|HD| = \frac{1}{2}(|AD| - 1x) = 7\frac{47}{64} - \frac{1}{2}x$ . [ $BC \parallel AD$ ]

En:  $|AH| = 7\frac{47}{64} + \frac{1}{2}x$ .

Er volgt:  $|AC|^2 = |AH|^2 + |CH|^2 = |AH|^2 + |CD|^2 - |HD|^2$ .

Dus:  $|AC| = \sqrt{1x^2 + 15\frac{15}{32}x}$ .

En ook:  $|GC| = \sqrt{|DG|^2 - |CD|^2} = \sqrt{1024 - 1x^2}$ .

En er geldt:  $|CI| = \frac{1}{2}|AC|$ . (\*) [1]

Driehoek  $CID$  is gelijkvormig met driehoek  $GCD$ .

Dan volgt:  $|GD| : |GC| = |CD| : |CI|$ . En dan:  $|CI| = \sqrt{1x^2 - \frac{1}{1024}x^4}$ .

En met (\*) volgt:  $\sqrt{4x^2 - \frac{1}{256}x^4} = \sqrt{1x^2 + 15\frac{15}{32}x}$ .

Uitgewerkt wordt dat:  $1x^4 - 768x^2 + 3960x = 0$ . [2]

Ofwel:  $1x^3 - 768x + 3960 = 0$ . Dit gedeeld door  $(1x + 30)$  geeft:  $[-30$  is een oplossing.]

$1x^2 - 30x + 132 = 0$  ofwel  $1x^2 + 132 = 30x$ .

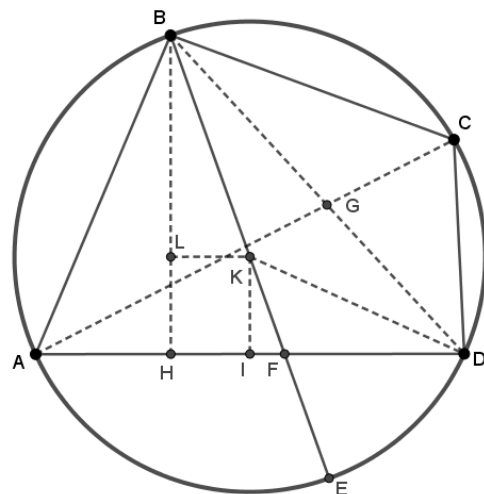
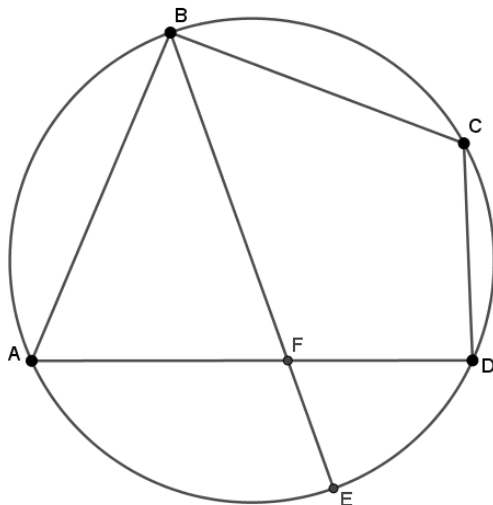
Dus:  $|AB| = 1x = 15 - \sqrt{93}$ . [2]

Om aan te tonen dat de vergelijking voor de lange zijde  $AF$  hetzelfde is als die voor de korte  $AB$ , volg dan de bewerkingen met  $|AF| = |DE| = 1x$ . Met  $|FK| = \frac{1}{2}x + 7\frac{47}{64}$  en  $|KE| = \frac{1}{2}x - 7\frac{47}{64}$  volgt wederom  $1x^3 - 768x + 3960 = 0$ , als boven. En nu volgt:  $|AF| = x_3 = 15 + \sqrt{93}$ .

[1] Want:  $\sphericalangle DCI = 90^\circ - \sphericalangle CDG = \sphericalangle CGD = \sphericalangle BAC$ . (omtrekshoeken) En:  $|CD| = |AB|$ .

[2]  $x_1 = 0$  en  $x_2 = -30$  voldoen niet.  $x_3 = 15 + \sqrt{93}$  is te groot.

**Vb 36.** Gegeven is een vierhoek  $ABCD$  besloten in een cirkel met  $|AB| = 44\frac{1}{5}$ ,  $|BC| = 35$ ,  $|CD| = 26$  en  $|AD| = 47\frac{3}{5}$ . De diameter  $BE$  snijdt de zijde  $AD$  in  $F$ . Gevraagd:  $|AF|$ ,  $|FD|$ ,  $|BF|$ ,  $|FE|$ .



Stel:  $|GC| = 1x$ . Met  $|CD| : |GC| = |AB| : |BG|$  volgt:  $|BG| = 1\frac{7}{10}x$ .

En met  $|BC| : |GC| = |AD| : |GD|$  volgt:  $|GD| = 1\frac{9}{25}x$ . Dus:  $|BD| = 3\frac{3}{50}x$ .

En met  $|CD| : |GD| = |AB| : |AG|$  volgt:  $|AG| = 2\frac{39}{125}x$  en dan:  $|AC| = 3\frac{39}{125}x$ .

En nu met  $|AB| * |CD| + |AD| * |BC| = |AC| * |BD|$  [Stelling van Ptolemeus] volgt:

$44\frac{1}{5} * 26 + 47\frac{3}{5} * 35 = 3\frac{39}{125}x * 3\frac{3}{50}x$ . Er volgt:  $31671x^2 = 8797500$ .

Ofwel:  $1x^2 = 277\frac{7}{9}$ . En dan:  $|GC| = 1x = 16\frac{2}{3}$ ,  $|AC| = 55\frac{1}{5}$ ,  $|BD| = 51$ .

In driehoek  $ABD$  is de hoogtelijn  $|BH| = 40\frac{4}{5}$ . En dan ook  $|AH| = 17$ ,  $|HD| = 30\frac{3}{5}$ .

[Met  $K$  het middelpunt van de cirkel dus het midden van  $BE$  volgt...]

$$|LK| = |HI| = \frac{1}{2}|AD| - |AH| = 6\frac{4}{5}.$$

Er geldt:  $|AB| * |BD| = |BH| * |BE|$  [1]. Dus:  $|BE| = 55\frac{1}{4}$ . En dit is de diameter van de cirkel.

$$|IK| = \sqrt{|KD|^2 - |ID|^2} = \sqrt{196\frac{1121}{1600}} = 14\frac{1}{40}. \text{ Dus: } |BL| = 40\frac{4}{5} - 14\frac{1}{40} = 26\frac{31}{40}.$$

Omdat driehoek  $BKL$  gelijkvormig is met driehoek  $BFH$  volgt:  $|BL| : |BK| = |BH| : |BF|$ .

$$\text{Dus: } |BF| = 40\frac{4}{5} * 27\frac{5}{8} \div 26\frac{31}{40} = 42\frac{2}{21} \text{ en dus } |BE| = 13\frac{13}{84}.$$

$$\text{En met } |BL| : |LK| = |BH| : |HF| \text{ volgt: } |HF| = 10\frac{38}{105}.$$

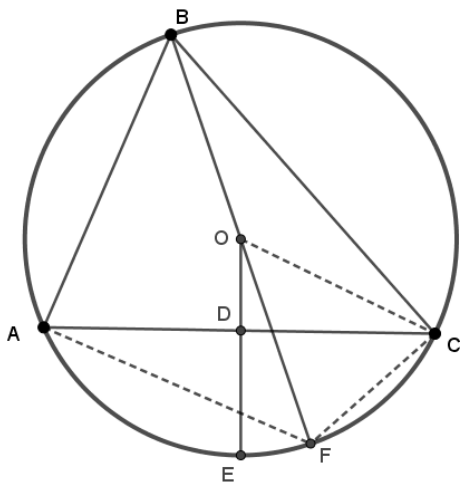
$$\text{En er volgt: } |AF| = |AH| + |HF| = 27\frac{38}{105} \text{ en } |FD| = |AD| - |AF| = 20\frac{5}{21}.$$

[1] Zetfout in de tekst. Daar staat  $|BC|$  i.p.v.  $|BD|$ .

De regel geldt omdat  $\Delta BHD \sim \Delta BAE$  (hh).

De regel komt ook voor in voorbeeld 40 in de *Geometria* van Petri.

**Vb 37.** Gegeven is een driehoek  $ABC$  met omschreven cirkel met  $|AB| = 8$ ,  $|BC| = 10$ . De loodlijn  $DE$  uit het middelpunt  $O$  snijdt  $AC$  in het midden en  $|DE| = 3$ . Gevraagd:  $|AC|$ .



Stel: diameter  $|BF| = 1x$ .

$$\text{Dan volgt: } |OC| = \frac{1}{2}x.$$

En dan:

$$|AC| = 2\sqrt{|OC|^2 - |OD|^2} = \sqrt{12x - 36}.$$

$$|AF| = \sqrt{1x^2 - 64}, |FC| = \sqrt{1x^2 - 100}.$$

En dan volgt [Stelling van Ptolemeus]:

$$8 * \sqrt{1x^2 - 100} + 10 * \sqrt{1x^2 - 64} = 1x * \sqrt{12x - 36}.$$

Ofwel:

$$12x^3 - 36x^2 = 164x^2 - 12800 + \sqrt{25600x^4 - 4198400x^2 + 163840000}.$$

Verder uitgewerkt wordt dat:  $144x^6 - 4800x^5 + 14400x^4 + 307200x^3 - 921600x^2 = 0$ .

En nog verder [met  $x \neq 0$ ]:  $1x^4 - 33\frac{1}{3}x^3 + 100x^2 + 2133\frac{1}{3}x - 6400 = 0$ .

Dit gedeeld door  $(1x^2 - 30x + 80)$  [1] geeft:  $1x^2 - 3\frac{1}{3}x - 80 = 0$  ofwel:  $1x^2 = 3\frac{1}{3}x + 80$ .

Dus diameter  $|BF| = 1x = 1\frac{2}{3} + \sqrt{82\frac{7}{9}}$ . [2] En dan:  $|AC| = \sqrt{\sqrt{11920} - 16}$ .

[1] De deling wordt volledig uitgewerkt in de tekst.

Deze tweedegraads veelterm heeft als wortels:

$$x_1 = 15 + \sqrt{145}, x_2 = 15 - \sqrt{145}$$

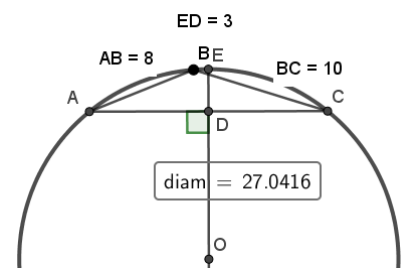
Uit het verhaal volgt:  $x^2 - 100 > 0$  dus  $x > 10$ .

Daarmee valt  $x_2 = 2,95 \dots$  af bij deze figuur.

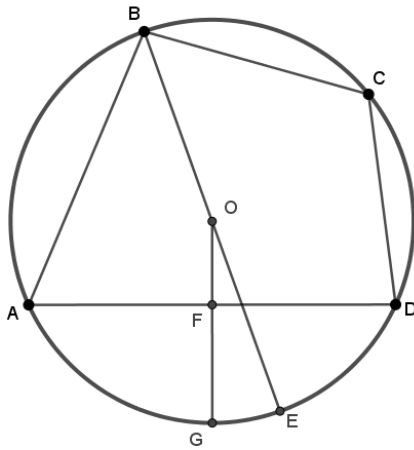
Bij  $x_1 = 27,0416 \dots$  hoort de figuur hiernaast.

Punt  $E$  ligt nu anders dan bedoeld.

[2] De diameter = 10,76 ... De andere oplossing is negatief.



**Vb 38.** Gegeven is een vierhoek  $ABCD$  in een cirkel geschreven met  $|AB| = 52$ ,  $|BC| = 33$ ,  $|CD| = 39$ . Uit het middelpunt  $O$  is een loodlijn op  $AD$  gezet en verlengd tot de cirkel in punt  $G$  zodat  $|FG| = 16$ . Gevraagd: diameter cirkel en  $|AD|$ .



Antwoord:  $|AD| = 56$ , diameter  $|BE| = 65$ .

Er volgt géén uitwerking.  
Brasser besluit met de tekst hieronder.

Zie ook de volgende pagina.

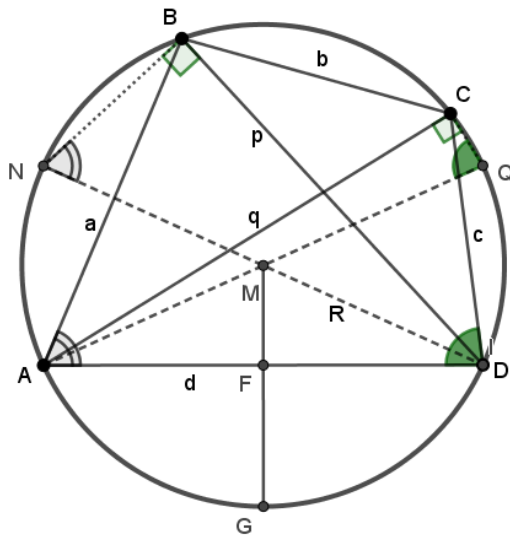
*Stelle deze voor de liefhebbers te ontbinden/ om haer selver te beproeven of zij in 't leeren al yets gevordert hebben; ende gelijck de kinderen die gewent zijn van een ander ghelert te werden/ nu wel alleenigh sonder een anders hulpe kunnen gaen; want wij onze voorgaende voostellen altoos uytgewrocht hebben om de swacke te goede te komen/ wille deze hier mede sluyten/ wenshende 't selve met soo goede aengenaemheydt mach ontfangen werden/ als het van goeder herten wert mede ghedeelt door*

*U.E. Dienstwilligen*

*J.R. Brasser, Lantmeeter.*

Einde *Geometria per Cos.*

**Uitwerking voorbeeld 38.**



Op moderne wijze door de schrijver dezes.

Alles draait hier om de oppervlakte van koordenvierhoek  $ABCD = O$ .

$$O = \frac{1}{2} ab * \sin(\sphericalangle B) + \frac{1}{2} cd * \sin(\sphericalangle D).$$

Omdat  $\sphericalangle B = 180^\circ - \sphericalangle D$  volgt:

$$O = \frac{1}{2} (ab + cd) \sin(\sphericalangle D).$$

Analoog:

$$O = \frac{1}{2} (ad + bc) \sin(\sphericalangle A).$$

Merk op:

$$p = 2R * \sin(\sphericalangle N) = 2R * \sin(\sphericalangle A).$$

$$q = 2R * \sin(\sphericalangle Q) = 2R * \sin(\sphericalangle D).$$

En er geldt (Ptolemeus):

$$ac + bd = pq = 4R^2 \sin(\sphericalangle A) \sin(\sphericalangle D).$$

Dit allemaal bij elkaar geeft:

$$(ab + cd)(ad + bc)(ac + bd) = \frac{2O}{\sin(\sphericalangle D)} * \frac{2O}{\sin(\sphericalangle A)} * 4R^2 \sin(\sphericalangle A) \sin(\sphericalangle D) = 16 R^2 O^2.$$

Met een formule bekend van Brahmagupta (598-670):  $O = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$  volgt voor de formule van de straal van de omschreven cirkel van een koordenvierhoek:

$$R^2 = \frac{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}{16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

In het voorbeeld:  $(a, b, c, d) = (52, 33, 39, d)$  en  $s = 62 + \frac{1}{2}d$  en  $R^2 = (R - 16)^2 + \frac{1}{4}d^2$ .

Ingevuld in de formule volgt met  $|AD| = d$ :

$$\left(8 + \frac{d^2}{128}\right)^2 = \frac{(52*33+39d)(52d+33*39)(52*39+33d)}{(20+d)(58+d)(46+d)(124-d)}.$$

WolframAlpha geeft als oplossingen van de vergelijking van graad 8:

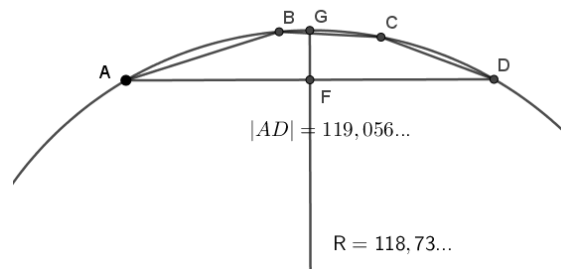
$d_1 = 56, d_2 = 119,056 \dots$ , twee negatieve en vier complexe waarden.

Met  $|AD| = 56$  volgt:  $R = 32\frac{1}{2}$  (diameter = 65).

Dit is bedoeld door Brassier.

Met  $|AD| = 119,056 \dots$  volgt:  $R = 118,7369 \dots$  (diameter = 237,47 ...)

Zie de figuur hiernaast. Nu ligt  $G$  wel anders dan bedoeld in de oorspronkelijke tekening.



## Nawoord

Het gedeelte *Geometria per Cos* eindigt met voorbeeld 38, waarna nog een aantal vooral rekenkundige vraagstukken van een zekere schoolmeester G.E. Backer volgt.

De hele tekst is bedoeld als studie in de nieuwe dan opkomende methode van de Regel Cos.

Hoe normaal het gebruik van variabelen tegenwoordig ook is, aan deze tekst is te zien dat in de beginfase men o.a. door de koppeling aan meetkunde heel voorzichtig opereert: een getal stelt lengte voor en is dus positief, wortelgetallen tel je niet zomaar op, elke berekening heeft een meetkundig equivalent.

Het is de tijd van overgang van rekenkunde, met natuurlijke en rationale getallen, en meetkunde volgens de *Elementen van Euclides* naar algebra en, zoals het nu heet, analytische meetkunde.

Leerlingen zouden het nu zonder hulp kunnen...

*(“nu wel alleenigh sonder een anders hulpe konnen gaen”)*

Aan de voorbeelden is te zien dat er veel met breuken onder wortels gewerkt wordt. Zeer lastig en zonder computeralgebra-hulp te lastig voor de schrijver dezes, eerlijk gezegd. In die tijd waren er blijkbaar nog echte rekenmeesters!

Computeralgebra is ook gebruikt om soms te reconstrueren welke breuken bedoeld worden, aangezien die vaak te klein en daardoor vrijwel onleesbaar zijn afgedrukt.

Al met al blijft het boeiend en inspirerend te lezen hoe men rond 1600 stoeide met meetkunde en stappen richting algebra zette, zoals prof. H. Bos dat ook beschrijft in *Redefining Geometrical Exactness* (2001).

Bij de pioniers zoals Viète, Fermat en Descartes zijn (school-)meesters zoals Nicolaus Petri en Jacob Brassier zeker nodig geweest voor het succes van het verhaal.

Over de auteur:

Fred Muijrsers was tot zijn pensioen docent aan de eerste- en tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen.

## Bijlage 1: Meester Petri

Pietersz. (Claes), als schrijver zich in 't latijn noemende **Nicolaus Petri Daventriensis**, geboren vóór het midden van de 16e eeuw te Deventer en overleden te Amsterdam in 1602.

Reeds vóór 1567 heeft hij zich als schoolmeester te Amsterdam gevestigd, waar hij vooral als rekenmeester opgang maakte en in genoemd jaar een Hollands rekenboekje publiceerde. Dit zeldzaam geworden boekje is het oudste algemeen verspreide rekenboekje in de volkstaal.

Nog een ander onderwerp werd door hem voor het eerst in het Nederlands behandeld: hij schreef in 1588 een handleiding bij het gebruik van de hemel- en aardeglobe.



In 1576 publiceert hij een handleiding over boekhouden.

Die beleefde twee herdrukken in 1588 en 1595, de *Arithmetica* eveneens in 1590 en 1606.

De beide onderwerpen zijn opnieuw behandeld in een zeer verbreid handboekje, de *Practicque om te leeren rekenen, cijpheren ende boeckhouwen* enz., waarin ook de 'regel cos', dit is algebra, en de geometrie zijn opgenomen. Het is het oudste Nederlandse algemene wiskundeleerboek.

Het verscheen in 1583 en werd herdrukt in 1591, daarop nagedrukt te Alkmaar in 1596, weer in 1598, 1605 en 1635. Tijdgenoten en lateren schreven er veel over.

J.R. Brasser nam in 1663 nog het gehele deel *Geometria* in zijn werk *Regula cos* over.

[...]

Dit is een gedeelte van een tekst uit het Nieuw Nederlandsch biografisch woordenboek.

Voor meer zie [https://www.dbnl.org/tekst/molh003nieu01\\_01/molh003nieu01\\_01\\_2126.php](https://www.dbnl.org/tekst/molh003nieu01_01/molh003nieu01_01_2126.php)

Werk van Petri en anderen is te vinden op de site van prof. J.P. Hogendijk.

Zie <https://www.jphogendijk.nl/list.html>

## Tot den Konst-lievenden Leser



**H**ET sal by avonture eenighe vreemt schijnen dat ick voorghevende om in de Algebre ofte Cos Reeckeninge te sulen onderwijfen, aen het uyt-trecken der Wortelen beginne, oock de Spetien der Surdische ende Twee-namige Getallen laet voorgaen, ghelijck ofte die oock een ghedeelte van Algebra waren, dat sy nochtans niet en zijn; maer is ghedaen om dat het in de Cossische Exempelen bysonder in de Vergelijkinghen dickwils gheschiedt, dat daer Surdische ende oock Twee-namighe Getallen voortkomen, ende oock somtijds eenighe Wortel moet uyt-ghetrocken wesen: Op datmen aldan sulcks voorvallende niet behoeve het werck nae te laeten, maer ghelijcke wel tot een goedt eynde brenghen, ende de Quëstie solveeren.

[...]

Ende al-hoewel voor desen wel eenighe van de Algebre hebben gheschreven in onse Nederduytsche, als oock in andere Taelen, maer niet met soo klare uytwerckinghen tot vergenoegen; hebbe daerom niet willen nae laten dese Onderwijsinghe in 't licht te brengen, die ick met korte, lichte, ende klare Exempelen te samen gesocht hebbe, ende ghestelt, soo ick vertrouwe, dat den Leerlingh die lichtelijck sal kunnen begripen.

## Bijlage 3: Verschillen

Brasser neemt de *Geometria* op in zijn tekst in 1663, maar die verschilt op sommige plaatsen met de tekst van Petri. In zijn *Practique, om te leeren...* van Petri begint het meetkundige deel met

“Hier volghet d'instructie vande Geometrie, verciert met vele lustighe vraeghen/ ende mathematischen exempelen. Het derde deel. Anno M.D.LXXXIII.”

Deze oorspronkelijke versie verschilt van latere versies, maar er zijn ook enige verschillen tussen de tekst van Brasser (B) en die van Petri (P) in de herdruk van 1635:

- P bevat vaak minder uitleg en geeft sneller een antwoord.
- Enige notaties zijn anders. P: *triangel A. B. C.* (B: *ABC*) en bijvoorbeeld P: *basis A. C.* (B: *AC*).
- Brasser heeft minder (gestippelde) hulplijntjes in een figuur. Petri plaatst geregeld lengtes in de figuren, Brasser niet.
- Benaderingen kunnen verschillen.  
Brasser in vb 30 (B30) gebruikt 86603, Petri (P30) gebruikt 86602.  
Zie ook B31-32-33, B37, B105, B108: andere benaderingen in B dan in P.  
B35 bij zevenhoek  $51^{\circ}25\frac{5}{7}'$  geeft zijde 43389, P35 gebruikt  $51^{\circ}26'$  en vindt 43392.  
Zie ook de notitie bij vb 70.  
B114 doet een poging exact te blijven, P114 gaat sneller over op een benadering en rekent daarmee verder.



Voorbeeld uit de *Geometria* van Petri.