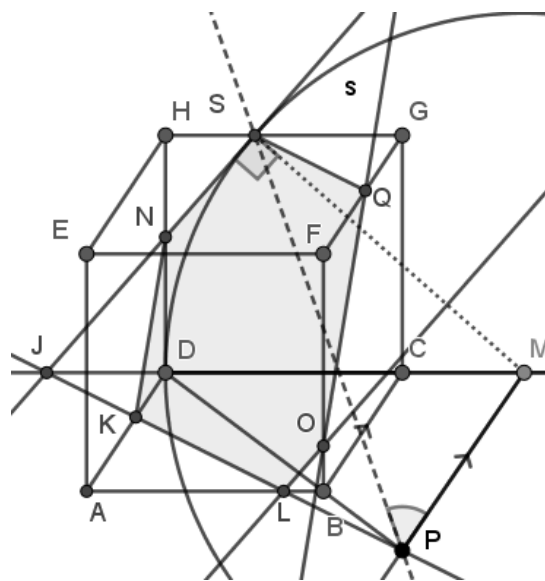
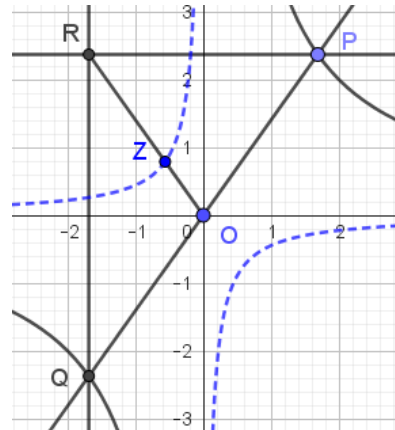
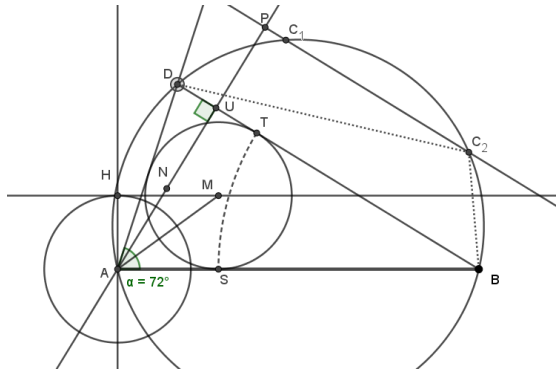


# Meetkunde

in de 60-er jaren



Fred Muijers

**Meetkunde in de 60-er jaren**

Fred Muijers

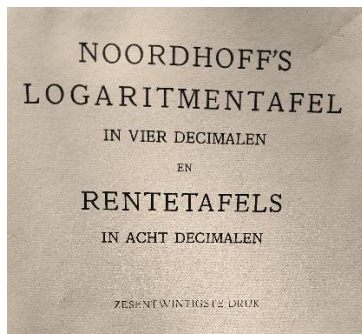
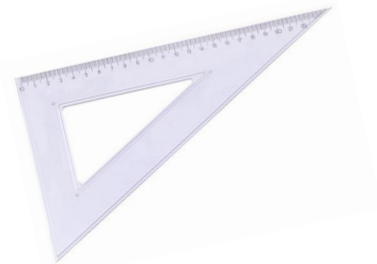
V1

## Voorwoord

Dit is een bundel meetkunde-opgaven van de jaren 1960-1971, waarmee een goed beeld gegeven wordt wat er op school gekend en gekund moest zijn voor meetkunde in die tijd. Het zijn opgaven van examens planimetrie van MULO-B en stereometrie en analytische meetkunde van HBS-B. De verzameling komt van ondergetekende, die enige examens zelf heeft 'ondergaan'.

Fred Muijers  
februari 2025

Indertijd toegestaan bij de examens:



## Inhoud

Voorwoord.....	2
Planimetrie in het uitgebreid lager onderwijs.....	4
Examenopgaven planimetrie MULO-B .....	5
Uitwerkingen examens planimetrie .....	10
Stereometrie in het middelbaar onderwijs .....	35
Examenopgaven stereometrie HBS-B.....	36
Uitwerkingen examens stereometrie .....	42
Analytische meetkunde in het middelbaar onderwijs .....	72
Examenopgaven analytische meetkunde HBS-B .....	73
Uitwerkingen examens analytische meetkunde .....	78
Nawoord .....	100

## Planimetrie in het uitgebreid lager onderwijs

### Inleiding.

In dit deel staan opgaven met uitwerkingen van het onderdeel planimetrie, vlakke meetkunde, van eindexamens MULO-B. Zo'n examen had ook een onderdeel algebra, maar dat is nu niet opgenomen.

De opgaven komen uit boekjes van de 'Stichting het R.K. MULO-examen'. Dat examen was niet vanuit het rijk georganiseerd, maar door die stichting. Er waren ook MULO-examens vanuit christelijke en openbare hoek. Formeel hoorde de (M)ULO<sup>1</sup> tot het lager onderwijs, maar wiskunde hiervan lijkt op de wiskunde van de onderbouw van de HBS, dat formeel tot het middelbaar onderwijs behoorde. De examens zijn van de jaren 1960 t/m 1965, 1968 en 1969. Het schooltype ULO is in 1968 afgeschaft t.g.v. de invoering van de Mammoetwet. Daarna zijn nog examens afgenomen t/m 1971.

Voor elk wiskundeonderdeel was 1,75 uur beschikbaar, soms 1,5 uur.

Er werd geen gebruik gemaakt van grafische of gewone rekenmachines: die bestonden nog niet. Ook de rekenliniaal was nog niet in gebruik. Berekeningen gingen met hulp van een gonio- en logaritmetabel. Formulebladen zijn nooit beschikbaar geweest.

Basiskennis voor planimetrie betrof: constructies P&L, trigonometrie, congruentie en gelijkvormigheid, cirkeleigenschappen, ... Verder het gebruik van de gradenboog (hoek uitzetten). Verwijzing naar basiskennis gebeurt hierna met het symbool @.

Uitwerkingen zijn nooit officieel openbaar gemaakt en zeker niet op internet: dat bestond nog niet. Er is wel een databank van wiskundeleraren met examens B én A met uitwerkingen vanaf 1907, gemaakt zeker na 1971. Zie <https://wisbase.nl/mulo/archief>

De hier getoonde uitwerkingen zijn van de schrijver dezes. Ze staan na de serie opgavenbladen. Daarbij is nu wel een gewone rekenmachine gebruikt. De tekeningen (constructies) zijn gemaakt met *GeoGebra*.

### Begrippen en notaties

In de examens kan AB staan voor de lijn door A en B, lijnstuk AB en voor de lengte van dat lijnstuk. Een lijnstuk(-lengte) kan worden aangeduid met een hoofdletter. Tegenwoordig zijn kleine letters meestal in gebruik voor lijnstuklengtes.

AB // CD betekent dat de lijn door A en B evenwijdig is aan de lijn door C en D.

Hoeken staan genoteerd in graden en minuten, dus niet in graden met decimalen. De antwoorden dienen ook zo gegeven te worden. Bij de uitwerkingen zijn nu wel decimalen gebruikt!

In de examens kan  $\angle ABC$  staan voor de hoek maar ook voor de grootte ervan.

Soms zijn in de opgaven lijnstukken of hoeken gegeven (getekend) om te gebruiken bij constructies. Dat wordt aangeduid met het symbool #.

---

<sup>1</sup> Meer Uitgebreid Lager Onderwijs: die niet-officiële term werd gebruikt door de stichting(-en: ook door christelijke en openbare), maar niet door het ministerie!

## Examenopgaven planimetrie MULO-B

### Jaar 1960 opgaven

M60-1

$\triangle ABC$  is scherphoekig.  $BE$  is de zwaartelijn uit  $B$  en  $CD$  is de hoogtelijn uit  $C$ .<sup>2</sup>  
 $BE = 13$ ;  $BD = 11$ ;  $\angle DBE = 16^\circ 39'$ .

Bereken:

- $DE$ ;
- $\angle BAC$ ;
- de oppervlakte van  $\triangle ABC$ .

(De uitkomsten van de berekende lijnstukken afronden op gehele getallen).

M60-2

Construeer  $\triangle ABC$  als gegeven is:

de som van de zijden  $AC$  en  $BC$  is gelijk aan  $p$ ; (# ongeveer 10 cm)

de halve omtrek van  $\triangle ABC$  is gelijk aan  $s$ ; (# ong. 8 cm)

de straal van de aangeschreven cirkel aan zijde  $BC$  is  $r_a$ . (# ong. 6 cm)

M60-3

$\triangle ABC$  is rechthoekig in  $A$  ( $AC < AB$ ). Met  $C$  als middelpunt en  $CA$  als straal is een cirkel beschreven. Deze cirkel snijdt het verlengde van  $AC$  in  $D$ , de zijde  $BC$  in  $E$  en het lijnstuk  $BD$  in  $F$ .

$AG$  is hoogtelijn in  $\triangle ABC$ .

Bewijs:

- vierhoek  $ABFG$  is een koordenvierhoek;
- vierhoek  $CDFG$  is een koordenvierhoek;
- $\angle FAE$  is de helft van  $\angle FDG$ .

### Jaar 1961 opgaven

M61-1

Vierhoek  $ABCD$  is een koordenvierhoek.

$AB = 10$ ,  $AD = 8$ ,  $BD = 12$ ,  $CD = 5$ .

Bereken:

- Hoek  $A$ .
- Hoek  $DBC$ .
- De straal  $R$  van de omgeschreven cirkel van de koordenvierhoek (2 dec.).

M61-2

Van een trapezium  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ) is  $E$  het midden van  $AD$  en  $F$  het midden van  $BC$ , terwijl  $G$  het midden is van  $DF$ .  $\angle A = 66^\circ$ .

De lijnstukken  $DF$  en  $EG$  zijn gegeven. (#  $DF$  ong. 8 cm; #  $EG$  ong. 6 cm)

Verder is  $DC = \frac{1}{2} BC$ .

- Construeer de hoek van  $66^\circ$ .
- Construeer het trapezium.

---

<sup>2</sup> Uit de papieren versies blijkt dat er geen formule-editor is gebruikt. Vrijwel alle letters en symbolen zijn gewoon getypt zonder cursivering of iets dergelijks.

M61-3

Vierhoek ABCD ( $AB \parallel DC$ ) is een trapezium.

AB en BD zijn diagonalen. Men laat de loodlijn DP neer uit D op AC en de loodlijn CQ uit C op BD.

Bewijs:

- Vierhoek DPQC is een koordenvierhoek.
- Vierhoek ABQP is een koordenvierhoek.
- $DP \times QA = BP \times CQ$ .

### Jaar 1962 opgaven

M62-1

In  $\triangle ABC$  ligt op BC een punt D zo, dat  $\angle CAD = 41^\circ 24'$  en  $\angle BAD = 15^\circ 40'$ .

CE staat loodrecht op AD.  $AE = 6$ . De oppervlakte van  $\triangle ABE$  is 12,15.

Bereken de zijden van  $\triangle ABC$ .

M62-2

Van koordenvierhoek ABCD is S het snijpunt der diagonalen. D ligt op de kleinste boog AC van de omgeschreven cirkel van vierhoek ABCD.

Construeer deze koordenvierhoek als gegeven is:

de straal van de omgeschreven cirkel is R; (# ong. 6 cm)

de diagonaal AC is  $p$ ; (# ong. 11,5 cm)

de diagonaal DB is bissectrice van  $\angle ADC$ ;

de oppervlakte van  $\triangle CSD$  is gelijk aan het vierde deel van de oppervlakte van  $\triangle BSA$ .

M62-3

In cirkel  $M^3$  zijn AB en CD twee middellijnen, die loodrecht op elkaar staan.

Op boog BC ligt een punt P.

AP snijdt CD in Q; DP snijdt BC in R.

Bewijs:

- CPRQ is een koordenvierhoek;
- $QR \parallel AB$ ;
- AC raakt aan de omgeschreven cirkel van de koordenvierhoek CPRQ.
- $AP : BP = PC : PR$ .

### Jaar 1963 opgaven<sup>4</sup>

M63-1

Van een cirkel met M als middelpunt is de straal 10.

P is een punt buiten de cirkel. PAB is een snijlijn en boog  $AB = 130^\circ$ .

PM snijdt de cirkel in C. De deellijn van  $\angle AMB$  snijdt AB in D en de cirkel in E.

$AC = 2,2$ .

Bereken:

- Koorde AB (in 1 dec. nauwkeurig).
- DE (in 1 dec. nauwkeurig).
- $\angle APC$ .

<sup>3</sup> Bedoeld is uiteraard een cirkel met middelpunt M.

<sup>4</sup> Dit zijn opgaven van het zogenaamde reservewerk I. Tijd is nu 1,5 uur.

M63-2

ABCD is een trapezium ( $AB \parallel DC$ ) en tevens een raaklijnvierhoek.

$$\angle A = 63^\circ, \angle ABD = 36^\circ.$$

Construeer ABCD, als  $AB = p$ . (# ong. 13 cm)

M63-3

Van cirkel M is AB een middellijn. S is een willekeurig punt van AM.

Koorde CE snijdt AB loodrecht in S. F is een willekeurig punt van boog BC.

AF snijdt BC in P en EF snijdt AB in Q.

Bewijs:

1. PQBF is een koordenvierhoek.
2.  $PQ \parallel CE$ .
3. FB is buitendeellijn van  $\triangle CFE$ .

### Jaar 1964 opgaven

M64-1

In trapezium ABCD ( $AB \parallel DC$ ) staat AC loodrecht op BC.

$$AD = 10, CD = 6 \text{ en } \angle ADC = 126^\circ 52'.$$

Bereken:

- a. AC (1 dec. nauwkeurig);
- b. BC (1 dec. nauwkeurig);
- c. de oppervlakte van trapezium ABCD (2 dec. nauwkeurig).

M64-2

Van  $\triangle ABC$  is AD zwaartelijn en AE hoogtelijn.

Construeer  $\triangle ABC$ , als  $\angle DAE = 18^\circ$ ,  $AD = p$  en

de straal van de omgeschreven cirkel van  $\triangle ABC$  gelijk  $q$  is.

(#p ong. 8cm; #q ong. 5 cm).

M64-3

Van koordenvierhoek ABCD zijn  $\angle A$  en  $\angle B$  stomp. BD en AC snijden elkaar in S.

Op DS ligt een punt E zo, dat  $DE = \frac{1}{4}AD$  en op CS een punt F zo, dat  $CF = \frac{1}{4}BC$  is.

Bewijs:

- a.  $\triangle ADE$  is gelijkvormig met  $\triangle BCF$ ;
- b. ABFE is een koordenvierhoek;
- c.  $EF \parallel DC$ .

**Jaar 1965 opgaven**

M65-1

Van vierhoek ABCD is  $AB = 4$ ;  $BC = 6$ ;  $CD = 6$  en  $DA = 8$ .  $\angle DAB = 108^\circ 13'$ .

Bereken:

- $\angle C$ .
- De oppervlakte van ABCD.

M65-2

Van koordenvierhoek ABCD is  $\angle A = 72^\circ$ .

De straal van de ingeschreven cirkel van  $\triangle ABD$  is  $r$ . (# ong. 2,5 cm)

$AB = p$ . (# ong. 12,5 cm)

De oppervlakte van  $\triangle BCD$  is de helft van de oppervlakte van  $\triangle ABD$ .

Construeer ABCD.

M65-3

Van  $\triangle ABC$  is  $\angle C$  stomp.

Op het verlengde van AC ligt D zo, dat  $BD = BC$ .

Op het verlengde van BC ligt E zo, dat  $AE = AC$ .

EF is de bissectrice van  $\angle AEC$  (F ligt op AC).

DG is de bissectrice van  $\angle BDC$  (G ligt op BC).

Bewijs:

- ABDE is een koordenvierhoek.
- FGDE is een koordenvierhoek.
- $FG \parallel AB$ .

**Jaar 1968 opgaven**

M68-1

In trapezium ABCD ( $AB \parallel DC$ ) is diagonaal DB bissectrice van  $\angle B$ .

$\angle B = 73^\circ 44'$ ;  $BD = 20$  en de oppervlakte van  $\triangle ABC = 144$ .

Bereken:

- BC;
- AB;
- AD (1 dec.)

M68-2

In vierhoek ABCD loopt de bissectrice CE van  $\angle BCD$  (E op AB) evenwijdig aan DA.

BD en CE snijden elkaar in S.

$\angle BCD = 72^\circ$ .

$BD = p$ . (# ong. 8 cm)

$ES : AD = 2 : 5$ .

De oppervlakte van  $\triangle BES$  is de helft van de oppervlakte van  $\triangle BCS$ .

Construeer vierhoek ABCD.

M68-3

AB is koorde in een cirkel met middelpunt M. C is het midden van de kleinste boog AB.  
Koorde CD snijdt AB in P; koorde CE snijdt AB in R ( $CD > CE$ ).

De verlengden van AB en DE snijden elkaar in S.

Bewijs:

- vierhoek PRED is een koordenvierhoek;
- $SA \times SB = SP \times SR$ ;
- $\angle ADR = \angle PED$ .

### Jaar 1969 opgaven <sup>5</sup>

M69-1

In  $\triangle ABC$  is I het middelpunt van de ingeschreven cirkel.

$AI = 6$  en  $BI = 8$ .

De oppervlakte van  $\triangle ABI = 21,33$ .

Bereken:

- $\angle AIB$
- AB (afroeden op een geheel getal)
- $\angle ABC$
- BC (afroeden op twee decimalen)

M69-2

Van  $\triangle ABC$  ( $AC < BC$ ) snijdt de bissectrice van  $\angle C$  de omgeschreven cirkel in E.

De raaklijn in A aan deze cirkel snijdt het verlengde van CE in D.

De oppervlakte van  $\triangle ADB$  is gelijk aan de oppervlakte van een vierkant met zijde  $p$ . (# ong. 4,5 cm)

$AB = q$  (# ong. 6 cm).

$\angle ADB = \angle P$ . (# ong.  $43^\circ$ ).

Construeer  $\triangle ABC$ .

M69-3

In een cirkel is de scherphoekige  $\triangle ABC$  beschreven ( $AC < BC$ ).

CD is hoogtelijn op AB (D op AB).

E is het voetpunt van de loodlijn uit A op de raaklijn in C.

G is het voetpunt van de loodlijn uit C op de raaklijn in B.

Bewijs:

- vierhoek ADCE is een koordenvierhoek.
- $DE \parallel BC$ .
- $\triangle DGC \sim \triangle ABC$ .

---

<sup>5</sup> Eindexamen van de schrijver dezes.

## Uitwerkingen examens planimetrie

### Jaar 1960 uitwerking

M60-1

$\triangle ABC$  is scherphoekig.  $BE$  is de zwaartelijn uit  $B$  en  $CD$  is de hoogtelijn uit  $C$ .

$BE = 13$ ;  $BD = 11$ ;  $\angle DBE = 16^\circ 39'$ . Bereken:

a.  $DE$ ;

b.  $\angle BAC$ ;

c. de oppervlakte van  $\triangle ABC$ .

(De uitkomsten van de berekende lijnstukken afronden op gehele getallen).

1a. Met de cos-regel (@):

$$DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2 * BD * BE * \cos(\angle DBE). \text{ Met } \angle DBE = 16,65^\circ.$$

Invullen en rekenen<sup>6</sup>:  $DE^2 = 15,991 \dots$  Dus  $DE = 4$  verder te gebruiken (?).

1b. Met de sin-regel (@):

$$\frac{BE}{\sin(\angle BDE)} = \frac{DE}{\sin(\angle DBE)}. \text{ Met de DE-waarde uit 1a. Dus: } \sin(\angle BDE) = 0,9312 \dots$$

$$\angle BDE \approx 111,38^\circ. \text{ En er volgt: } \angle ADE \approx 68,62^\circ.$$

Zie de figuur:  $\triangle ADC$  is rechthoekig in  $D$ . Dan met Thales (@):

$$AE = EC = ED \text{ (straal omgeschreven cirkel van } \triangle ADC \text{ @)}$$

Dus:  $\triangle ADE$  is gelijkbenig en dus volgt:  $\angle DAE \approx 68,62^\circ$  (dus  $68^\circ 37'$ ) En dat is hoek  $BAC$ .

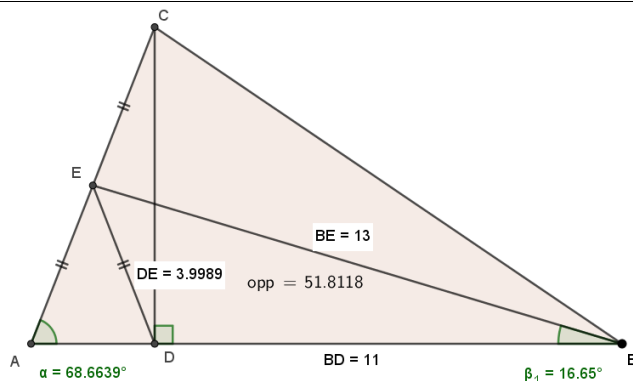
1c. In  $\triangle ADC$ :  $AC = 8$ .

Dan volgt:  $AD = AC * \cos(\angle DAE) \approx 2,916$ . Dus  $AD = 3$  te gebruiken.

$$Opp(\triangle ABC) = \frac{1}{2} * AB * AC * \sin(\angle DAE).$$

Met  $AD = 3$  dus  $AB = 14$ : **Opp  $\approx 52,146$ .** (\*)

Meer precies, zie de figuur hiernaast. De afwijking (\*) t.o.v. figuurresultaat is klein. De vraag had kunnen luiden: rond de oppervlakte af op een geheel getal...



Opmerking:

Niet heel duidelijk is of er doorgerekend moet worden met of zonder afgeronde waarden.

Er had kunnen staan: rond af op gehele getallen en reken daarmee verder...

Voor 1c moet 1b gelukt zijn.

<sup>6</sup> Indertijd met goniotabel met waarden in 4 decimalen en berekeningen met logaritmen: tijdrovend!



M60-3

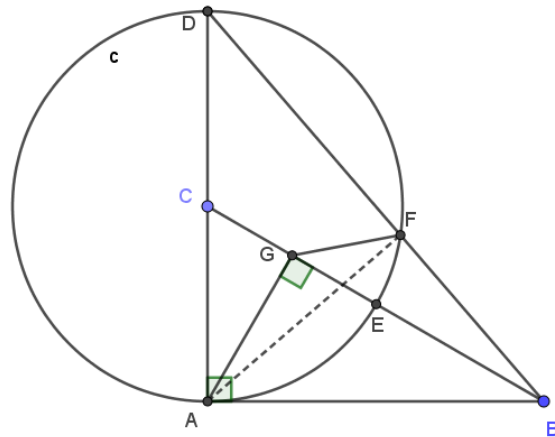
$\triangle ABC$  is rechthoekig in A ( $AC < AB$ ). Met C als middelpunt en CA als straal is een cirkel beschreven. Deze cirkel snijdt het verlengde van AC in D, de zijde BC in E en het lijnstuk BD in F.

AG is hoogtelijn in  $\triangle ABC$ .

Bewijs:

- vierhoek ABFG is een koordenvierhoek;
- vierhoek CDFG is een koordenvierhoek;
- $\angle FAE$  is de helft van  $\angle FDG$ .

3a. Zie de analysefiguur.  
Hoek AGB is recht: gegeven.  
Dus er gaat een cirkel k met middellijn AB door A, B en G. (Thales @)  
Ook hoek AFD is recht, weer vlg's Thales.  
Dus hoek AFB is recht.  
Dus er gaat een cirkel met middellijn AB door A, B en F en dat is dus cirkel k.



3b. Resultaat van 3a is nu te gebruiken.

$\angle ABF + \angle AGF = 180^\circ$ . (koordenvierhoek eigenschap @)

Dus:  $\angle CGF = 360^\circ - \angle AGC - \angle AGF = 360^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \angle ABF) = 90^\circ + \angle ABF$ .

En:  $\angle CDF = 90^\circ - \angle ABF$ . Want  $\triangle ABC$  is rechthoekig.

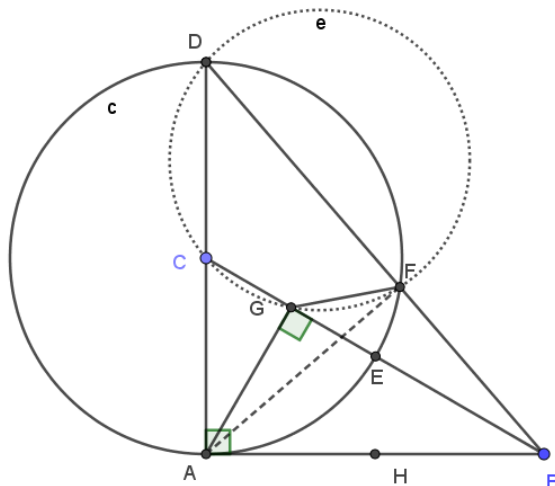
Dus:  $\angle CGF + \angle CDF = 180^\circ$ . Overstaande hoeken samen 180 graden.

Gevolg: CDFG is een koordenvierhoek.(@)

3c. Zie de analysefiguur met cirkel e uit 3b ingetekend.

Hoek FAE op koorde FE van cirkel c dus de helft van hoek FCE. (omtrekshoek @)  
 $\angle FCE = \angle FCG = \angle FDG$ . Want die staan op dezelfde koorde GF in cirkel e.

Dus: hoek FAE is ook de helft van hoek FDG.



### Jaar 1961 uitwerkingen

M61-1

Vierhoek ABCD is een koordenvierhoek.

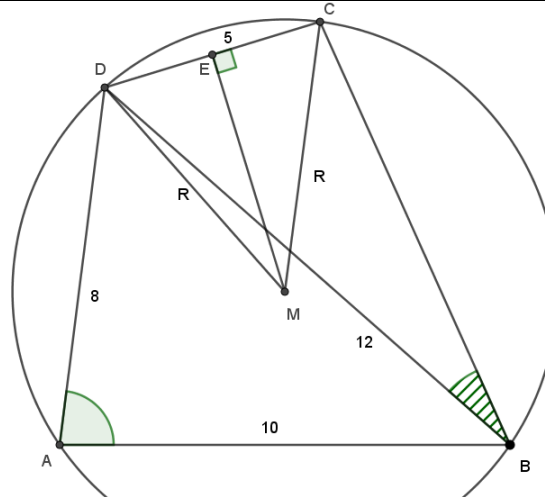
$AB = 10$ ,  $AD = 8$ ,  $BD = 12$ ,  $CD = 5$ .

Bereken:

- Hoek A.
- Hoek DBC.
- De straal R van de omschreven cirkel van de koordenvierhoek (2 dec.).

1a. cos-regel in  $\triangle ABD$ : (@)  
 $144 = 64 + 100 - 160 * \cos(\angle A)$ .  
 Dus:  
 $\cos(\angle A) = \frac{1}{8}$ .  
 $\angle A = 82,8192 \dots^\circ$ .  
 Ofwel:  **$82^\circ 49'$** .

1b. Deel 1a moet gelukt zijn!  
 ABCD is een koordenvierhoek, dus  
 $\angle C = 180^\circ - \angle A$ . (@)  
 Dan met sin-regel in  $\triangle BCD$ : (@)  
 $\frac{5}{\sin(\angle DBC)} = \frac{12}{\sin(\angle C)} = \frac{12}{\sin(\angle A)}$ .  
 $\sin(\angle DBC) = \frac{5}{12} * \sin(\angle A) =$   
 $0,4134 \dots$   
 $\angle DBC = 24,4185 \dots^\circ \approx \mathbf{24^\circ 25'}$ .



1c. Zie de figuur.

Omtrekshoek bij B is de helft van hoek DMC (@).

Met ME hoogtelijn in  $\triangle DMC$ , ook bissectrice in gelijkbenige driehoek (@), volgt:

$$\sin(\angle CME) = \frac{2,5}{R}$$

$$R = \frac{2,5}{0,4134} = 6,0474 \dots$$

Antwoord:  **$R = 6,05$** .

M61-2

Van een trapezium ABCD ( $AB \parallel DC$ ) is E het midden van AD en F het midden van BC, terwijl G het midden is van DF.  $\angle A = 66^\circ$ .

De lijnstukken DF en EG zijn gegeven. (# DF ong. 8 cm; EG ong. 5,5 cm)

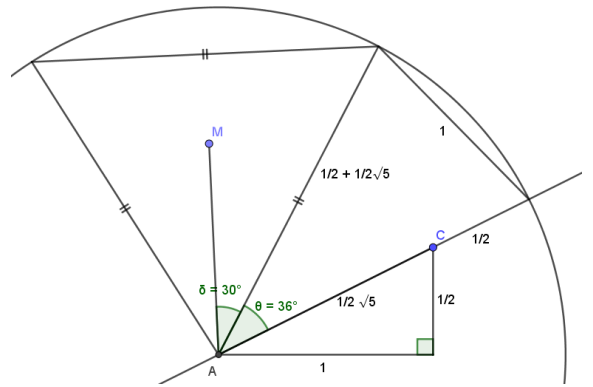
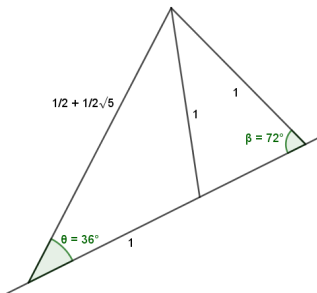
Verder is  $DC = \frac{1}{2} BC$ .

- a. Construeer de hoek van  $66^\circ$ .
- b. Construeer het trapezium.

2a. [Deze vraag is a-typisch: heeft niets met de overige gegevens te maken!]

$66 = 30 + 36$ .

Een hoek van 36 graden is met kennis van de gulden snede te maken. (@?) Zie hieronder.



De gevraagde hoek is hoek CAM.

2b. Zie analysefiguur.

Hoek FED is ook 66 graden: F-hoek.

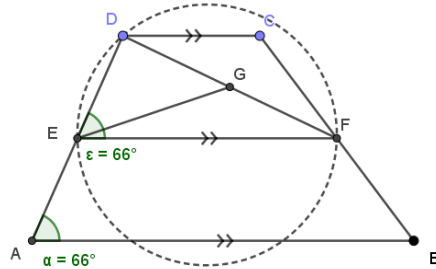
Met DF gegeven ligt punt E op een cirkel met koorde DF en omtrekshoek 66 graden.

Dat geeft een standaardconstructie: (@)

Een been van de hoek bij D aan koorde is een raaklijn aan de cirkel: cirkel is te maken.

Vanuit G lijnstuk GE omcirkelen: E bekend.

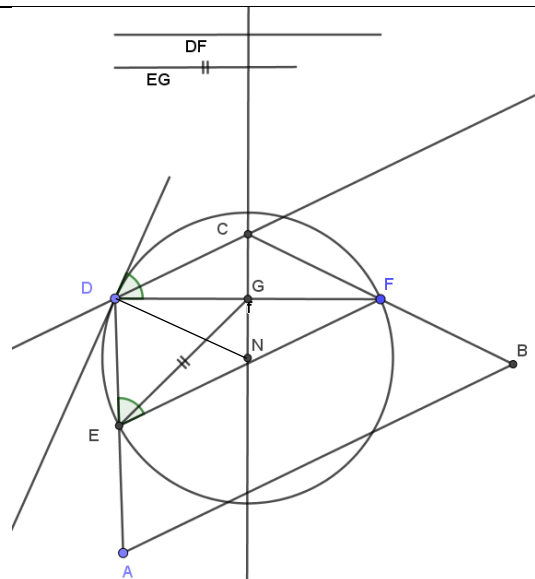
Rest volgt eenvoudig...



Analysefiguur

Stappen:

1. DF plaatsen
2. Hoek van 66 graden bij D: raaklijn.
3. Loodlijn te D en mddll in G: punt N.
4. Cirkel (N, ND) snijden met cirkel (G, GE).
5. E bekend, dan D gespiegeld geeft A.
6. Door D lijn evenwijdig aan EF.
7. Snijdt mddll van DF in C.
8. C bekend, dan in F gespiegeld geeft B.
9. A en B verbinden.
10. Trapezium ABCD is gemaakt.



M61-3

Vierhoek ABCD (AB // DC) is een trapezium.

AB en BD zijn diagonalen. Men laat de loodlijn DP neer uit D op AC en de loodlijn CQ uit C op BD.

Bewijs:

- Vierhoek DPQC is een koordenvierhoek.
- Vierhoek ABQP is een koordenvierhoek.
- $DP \times QA = BP \times CQ$ .

3a. Zie de analysefiguur.

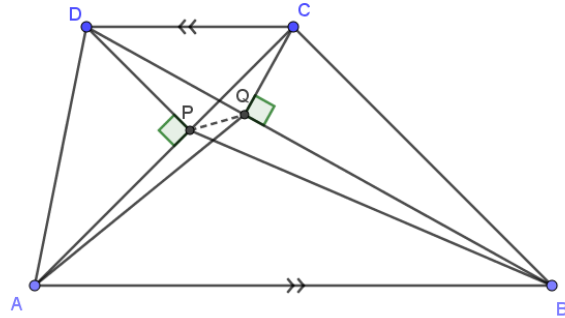
Hoek DPC is recht.

Dus er gaat een cirkel k door D, P en C met CD als middellijn. (Thales @)

Hoek DQC is recht.

Dus er gaat een cirkel n door D, Q en C met CD als middenlijn. Blijkbaar  $k = n$  want ze hebben dezelfde middellijn.

Conclusie: DPQC op één cirkel en die vierhoek is dus een koordenvierhoek.



Analysefiguur

3b.  $\angle DQP = \angle DCP$ . Uit 3a en op dezelfde koorde DP. (@)

$\angle DCP = \angle PAB$ : Z-hoek in het trapezium.

Dus:  $\angle PQB + \angle PAB = \angle PQB + \angle DQP = 180^\circ$ .

Overstaande hoeken in vierhoek samen  $180^\circ$ .

Dus ABQP is een koordenvierhoek.(@)

3c: combineer 3a en 3b... [te gebruiken zelfs als niet alles bewezen is.]

$\angle PBQ = \angle PAQ$  want op zelfde koorde PQ in cirkel van 3b.

$\angle PDQ = \angle PCQ$  want op zelfde koorde PQ in cirkel van 3a.

Gevolg:

$\triangle AQC$  is gelijkvormig met  $\triangle BPD$  : geval hh.

En er volgt:

$$\frac{AQ}{BP} = \frac{QC}{PD} \text{ ofwel: } AQ \times DP = BP \times CQ.$$

## Jaar 1962 uitwerking

M62-1

In  $\triangle ABC$  ligt op  $BC$  een punt  $D$  zo, dat  $\angle CAD = 41^\circ 24'$  en  $\angle BAD = 15^\circ 40'$ .

$CE$  staat loodrecht op  $AD$ .  $AE = 6$ . De oppervlakte van  $\triangle ABE$  is 12,15.

Bereken de zijden van  $\triangle ABC$ .

Zie de figuur.

Eerst  $AC$ :  $\cos(41,4^\circ) = \frac{6}{AC}$ . (@)

Dus:  **$AC = 7,9988$**  ...

$EG$  is een hoogtelijn in  $\triangle ABE$ .

$\frac{EG}{AE} = \sin(15\frac{2}{3}^\circ)$ .

Dus:  $EG = 1,6202$  ...

$Opp(\triangle ABE) = 12,15 = \frac{1}{2}EG * AB$ .

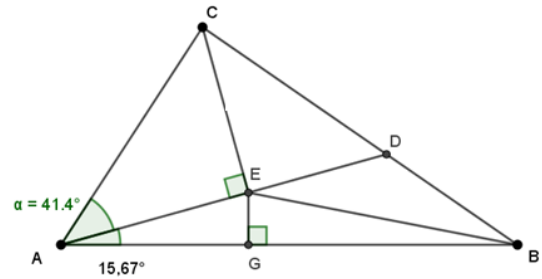
Dus:  **$AB = 14,9977$**  ...

$BC$  met de cos-regel (@).

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB * AC * \cos(57,07^\circ)$ .

$BC^2 = 158,4735$ ...

**$BC = 12,5886$**  ....



M62-2

Van koordenvierhoek ABCD is S het snijpunt der diagonalen. D ligt op de kleinste boog AC van de omgeschreven cirkel van vierhoek ABCD.

Construeer deze koordenvierhoek als gegeven is:

de straal van de omgeschreven cirkel is  $R$ ; (# ong. 6 cm)

de diagonaal AC is  $p$ ; (# ong. 11,5 cm)

de diagonaal DB is bissectrice van  $\angle ADC$ ;

de oppervlakte van  $\triangle CSD$  is gelijk aan het vierde deel van de oppervlakte van  $\triangle BSA$ .

Zie de analysefiguur.

**Constructie 1:**

Met gegeven AC en straal  $R$  is middelpunt  $M$  snel te vinden: vanuit  $A$  en  $C$  cirkel met straal geeft  $M$  en daarmee de omgeschreven cirkel van ABCD.

**Constructie 2:**

DB is bissectrice: boog AB = boog BC. B dus te vinden: middelloodlijn van AC snijdt de cirkel in B.

$\triangle CSD$  is gelijkvormig met  $\triangle BSA$  (hh).  
Want: Hoeken op koorde BC en bij S twee overstaande hoeken gelijk. (@)  
Dan zijn de zijden van  $\triangle CSD$  met een factor  $\lambda$  vermenigvuldigd om de zijden van  $\triangle BSA$  te krijgen, ook hoogtelijnen.  
De oppervlakte van  $\triangle BSA$  is dan  $\lambda^2$  keer die van  $\triangle CSD$ .

$$Opp(\triangle CSD) * 4 = opp(\triangle BSA).$$

Dus:  $\lambda = 2$ .

Gevolg:  $AS : SC = 2 : 1$ .

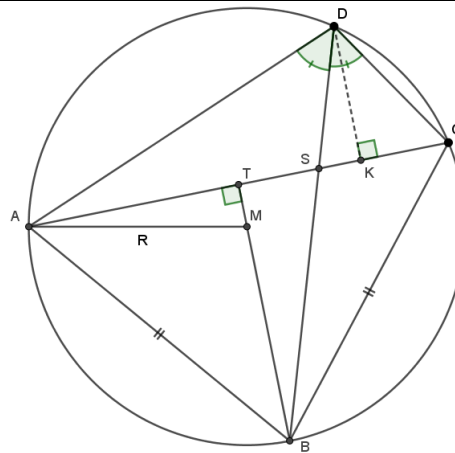
**Constructie 3:**

Daarmee is S op AC te maken.

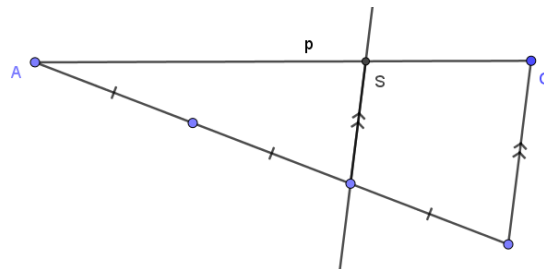
**Constructie 4:**

En lijn BS geeft D op de cirkel.

ABCD is geconstrueerd.



Analysefiguur



Constructie 3 even apart getoond.

Opmerking: Vrij bewerkelijk want zeker 18 passer- en liniaalhandelingen nodig.

Constructie 1 heeft 4 handelingen: lijnstuk overnemen, cirkel, cirkel, eindcirkel.

Constr2 heeft 3 handelingen: cirkel, cirkel, lijn.

Constr3 heeft 6 handelingen: lijn, 3x lijnstuk afpassen, lijn, evenwijdige lijn (met Z-hoek).

Constr4 heeft 5 handelingen: lijn, vier zijden.

M62-3

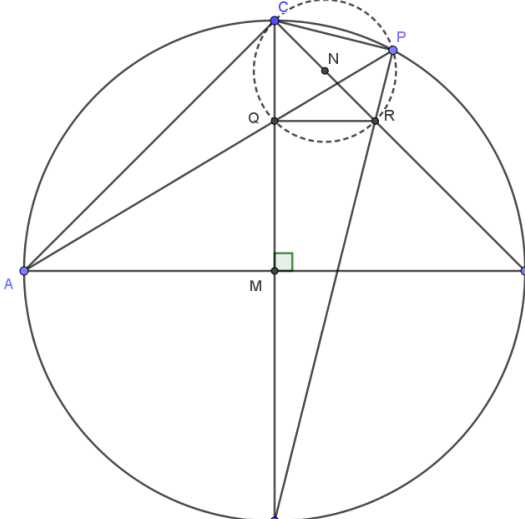
In cirkel M zijn AB en CD twee middellijnen, die loodrecht op elkaar staan.

Op boog BC ligt een punt P.

AP snijdt CD in Q; DP snijdt BC in R.

Bewijs:

- CPRQ is een koordenvierhoek;
- QR // AB;
- AC raakt aan de omschreven cirkel van de koordenvierhoek CPRQ.
- $AP : BP = PC : PR$ .

<p>3a. <math>\angle APR = 45^\circ</math>.  Omtrekshoek op kwartcirkel. (@)  Idem: <math>\angle BCD = 45^\circ</math>.  Dus twee gelijke hoeken op koorde QR.  Dan liggen Q, R en P en C op één cirkel. (@)</p> <p>NB: Hoek RPC is recht. Mp van de cirkel is N, het midden van RC. (Thales @)</p>	
<p>3b. <math>\angle PQR = \angle PCR</math>: op koorde PR.  <math>\angle PCR = \angle PAB</math>: op zelfde boog BP. (@)  Dus: <math>\angle PQR = \angle PAB</math>.  Dan QR // AB (F-hoek @)</p>	
<p>3c. Omdat NC de straal van de cirkel bij 3a is en dat AC loodrecht op BC staat (ADBC is een vierkant) volgt: NC loodrecht op AC.  Dus AC raakt de cirkel van 3a.</p>	
<p>3d. Uit de analysefiguur volgt:  <math>\angle BAP = \angle RCP</math>: op zelfde boog BP.  <math>\angle APB = \angle CPR = 90^\circ</math>:  hoeken op middellijnen AB resp. CD. (Thales @)  Dus: <math>\triangle CPR</math> is gelijkvormig met <math>\triangle APB</math>.  En er volgt:  <math>AP : PB = CP : PR</math>.</p>	

Analysefiguur

## Jaar 1963 uitwerking

M63-1

Van een cirkel met M als middelpunt is de straal 10.

P is een punt buiten de cirkel. PAB is een snijlijn en boog AB = 130°.

PM snijdt de cirkel in C. De deellijn van  $\angle AMB$  snijdt AB in D en de cirkel in E.

AC = 2,2.

Bereken:

1. Koorde AB (in 1 dec. nauwkeurig).
2. DE (in 1 dec. nauwkeurig).
3.  $\angle APC$ .

Zie de analysefiguur.

1. Deellijn van hoek AMB is ook mddll van AB. (@)

Dus:

$$AB = 2 * AD = 2 * 10 * \sin(65^\circ).$$

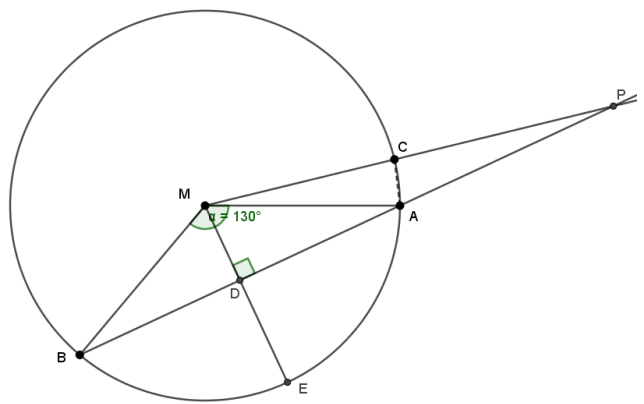
$$AB = 18,1261 \dots$$

Op 1 dec: **AB = 18,1**

2.  $MD = 10 * \cos(65^\circ) = 4,2261 \dots$

$$DE = 10 - 4,2261 \dots = 5,773 \dots$$

Op 1 dec: **DE = 5,8**



3.  $\sin\left(\frac{1}{2} \angle AMC\right) = \frac{1,1}{10}$ .

Dus:  $\angle AMC = 12,6306 \dots^\circ$

Hoek APC ligt ook in  $\triangle MPB$ .

$$\angle APC = 180^\circ - \angle B - \angle BMP.$$

Dat geeft:  $\angle APC = 12,369 \dots^\circ \approx 12^\circ 22'$ .

M63-2

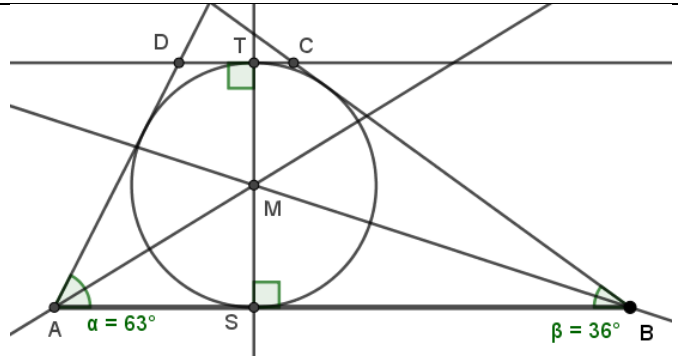
ABCD is een trapezium ( $AB \parallel DC$ ) en tevens een raaklijnvierhoek.

$\angle A = 63^\circ$ ,  $\angle ABD = 36^\circ$ .

Construeer ABCD, als  $AB = p$ . (#p ong. 13 cm)

Stappen:

1. Zet AB uit.
2. Maak hoeken bij A en B.  
(met gradenboog anders [1])
3. Maak bissectrices bij A en B.
4. Snijpunt M is mp cirkel.
5. Loodlijn uit M op AB: punt S.
6. Maak cirkel (M, MS).
7. Lijn bij 5 snijdt ook in T.
8. Lijn door T evenwijdig aan AB geeft C en D.



[1]

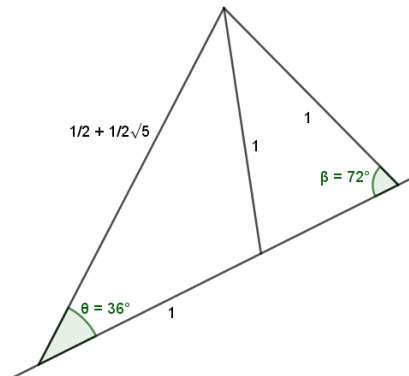
60 graden kan via gelijkzijdige driehoek.

Hoek van  $60 - 36 = 24$  graden is te maken.

24 drie keer halveren geeft hoek van 3 graden.

Dus hoek van  $60 + 3 = 63$  graden is te maken.

Een hoek van 36 graden is met kennis van de gulden snede te maken. (@?) Zie hieronder.



M63-3

Van cirkel M is AB een middellijn. S is een willekeurig punt van AM.  
 Koorde CE snijdt AB loodrecht in S. F is een willekeurig punt van boog BC.  
 AF snijdt BC in P en EF snijdt AB in Q.

Bewijs:

1. PQBF is een koordenvierhoek.
2.  $PQ \parallel CE$ .
3. FB is buitendeellijn van  $\triangle CFE$ .

Zie de figuur.

$$1. SC = SE (@)$$

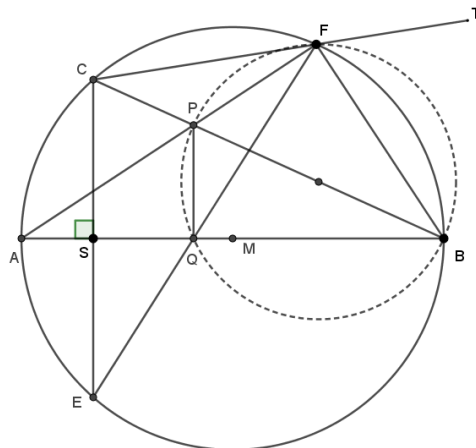
Dus *boog SA = boog AE*.

$$\text{Gevolg: } \angle AFE = \angle CBA.$$

Deze hoeken staan op lijnstuk PQ.

Omtrekshoeken dus van een cirkel waarvan PQ een koorde is.

Gevolg: PQBF is een koordenvierhoek.



Analysefiguur

2. Merk op: hoek AFB is recht (Thales @).

Dus het mp van de cirkel bij 1 is midden van BP. Dan ook hoek PQB recht!

PQ loodrecht op AB. CE ook loodrecht op AB. Dus:  $PQ \parallel CE$  (F-hoek @).

$$4. \angle BFQ = \angle BPQ \text{ (op koorde BQ).}$$

$$\text{En } \angle BPQ = 90^\circ - \angle PBQ.$$

$$\text{Dus: } \angle BFQ = 90^\circ - \angle PBQ \text{ [1]}$$

$$\angle BFT = 180^\circ - 90^\circ (= \angle AFB) - \angle CFA = 90^\circ - \angle CBA \text{ (op koorde AC).}$$

$$\text{Maar ook: } \angle CBA = \angle PBQ.$$

$$\text{Dus: } \angle BFT = 90^\circ - \angle PBQ. \text{ [2]}$$

Uit [1] en [2]: FB is een deellijn van hoek EFT en dat is een buitenhoek van  $\triangle CFE$ .

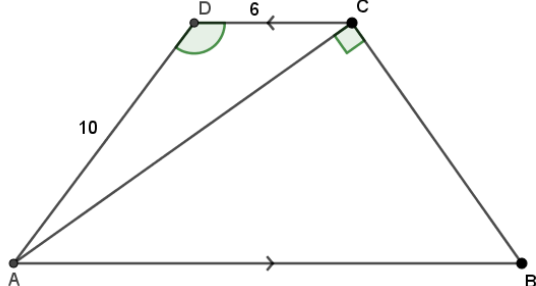
## Jaar 1964 uitwerking

M64-1

In trapezium ABCD ( $AB \parallel DC$ ) staat AC loodrecht op BC.AD = 10, CD = 6 en  $\angle ADC = 126^\circ 52'$ .

Bereken:

- AC (1 dec. nauwkeurig);
- BC (1 dec. nauwkeurig);
- de oppervlakte van trapezium ABCD (2 dec. nauwkeurig).

<p>1a. cos-regel (@):  <math>AC^2 = 100 + 36 - 120 * \cos(126,8667^\circ)</math>.  <math>AC^2 = 207,9945 \dots</math></p> <p><math>AC = 14,4220 \dots \approx \mathbf{14,4}</math></p>	
<p>1b. Noem <math>\angle CAD = \theta</math>. Dan met sin-regel: <math>\frac{6}{\sin(\theta)} = \frac{14,4}{\sin(126,8667^\circ)}</math>.  <math>\sin(\theta) = 0,3333 \dots</math> Dus: <math>\theta = 19,4691 \dots^\circ</math>.  En dus: <math>\angle BAC = 180^\circ - 126,8667^\circ - 19,4691^\circ = 33,6372 \dots^\circ</math>  <math>\tan(33,6372^\circ) = \frac{BC}{14,4}</math>.  Dus: <math>BC = 9,5808 \dots</math>  Afgerond: <math>BC = \mathbf{9,6}</math>.</p>	
<p>1c. <math>Opp(ABCD) = opp(\triangle ACD) + opp(\triangle ABC)</math>.  <math>\dots = \frac{1}{2} * 6 * 10 * \sin(126,8667^\circ) + \frac{1}{2} * 14,4 * 9,6 = 93,1210 \dots</math>  Afgerond: <b>Opp = 93,12</b></p>	

Opmerking: Bij 1c op 2 decimalen nauwkeurig? Met GRM of GeoGebra:

 $AC = 14,42202$  en  $\angle BAC = 33,69218^\circ$  volgt  $BC = 9,615446$  en  $opp = 93,33808$ .

Afronding zou geven: 93,34.

Met een verschillend aantal decimalen doorrekenen geeft dus verschillende antwoorden.

Hoe door te rekenen is niet vermeld: zijn de afgeronde waarden verder te gebruiken of niet?

Bij antwoord 1c had gevraagd kunnen worden: rond af op een geheel getal...

M64-2

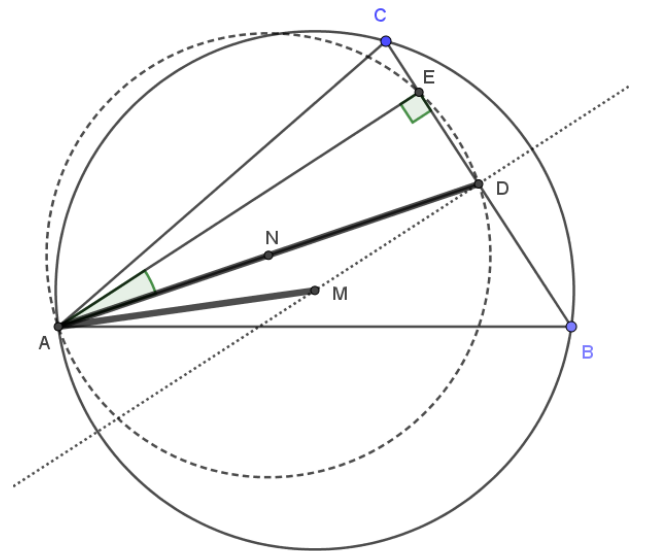
Van  $\triangle ABC$  is AD zwaartelijn en AE hoogtelijn.

Construeer  $\triangle ABC$ , als  $\angle DAE = 18^\circ$ ,  $AD = p$  en de straal van de omgeschreven cirkel van  $\triangle ABC$  gelijk  $q$  is.

(#p ong. 8cm; #q ong. 5 cm).

Stappen:

1. Zet AD uit met lengte p.
2. Construeer midden AD: N
3. Maak cirkel (N, NA): stippel. Punt E ligt hierop. (Thales @)
4. Zet bij A hoek van  $18^\circ$  uit. (met gradenboog of met gulden snede  $36 : 2 = 18$ )
5. Been van die hoek snijdt cirkel: E.
6. Richt in D op DE loodlijn op.
7. Maak cirkel (A,q).
8. Snijpunt van 6 en 7: punt M.
9. Maak cirkel (M,q) = (M,MA).
10. Verleng DE: snijpunten met cirkel geven B en C.
11.  $\triangle ABC$  is gemaakt.



M64-3

Van koordenvierhoek ABCD zijn  $\angle A$  en  $\angle B$  stomp. BD en AC snijden elkaar in S.

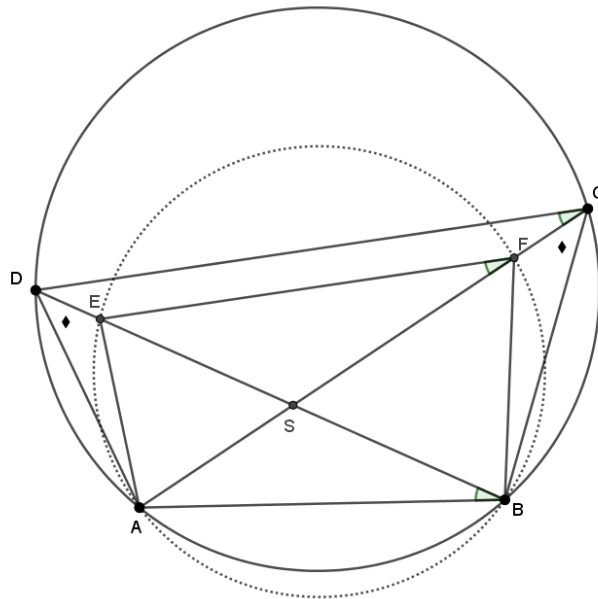
Op DS ligt een punt E zo, dat  $DE = \frac{1}{4}AD$  en op CS een punt F zo, dat  $CF = \frac{1}{4}BC$  is.

Bewijs:

- $\triangle ADE$  is gelijkvormig met  $\triangle BCF$ ;
- ABFE is een koordenvierhoek;
- $EF \parallel DC$ .

3a.  $\angle ADB = \angle BCA$ .  
Op zelfde koorde AB.  
En:  $AD : DE = BC : CF = 4 : 1$ .  
Dus:  $AD : BC = DE : CF$   
Dan volgt:  
 $\triangle ADE$  is gelijkvormig met  $\triangle BCF$ .  
Geval zhz (@).

3b.  $\angle CBD = \angle DAC$ .  
Beide hoeken op koorde CD.  
 $\angle CBF = \angle DAE$ . Uit 3a.  
Dus:  
 $\angle FBD = \angle EAC$ .  
Ofwel:  $\angle FBE = \angle EAF$ .  
Zelfde hoek op lijnstuk EF.  
Dan liggen de punten A,B,F en E op één  
cirkel: omtrekshoeken. (@)  
Dus ABFE is een koordenvierhoek.



Analysefiguur

3c.  
 $\angle DCA = \angle DBA$ : op koorde AD in grote cirkel.  
 $\angle DBA = \angle EFA$ : op koorde AE in gestippelde cirkel (uit 3b).  
Dus:  $\angle DCA = \angle EFA$ .  
Gevolg:  $EF \parallel DC$  (F-hoek @)

## Jaar 1965 uitwerking

M65-1

Van vierhoek ABCD is  $AB = 4$ ;  $BC = 6$ ;  $CD = 6$  en  $DA = 8$ .  $\angle DAB = 108^\circ 13'$ .

Bereken:

- $\angle C$ .
- De oppervlakte van ABCD.

1a. Eerst de lengte van BD.

$$d^2 = 4^2 + 8^2 - 2 * 4 * 8 * \cos(108,2167^\circ).$$

$$d^2 = 100,0071 \dots$$

Dan in  $\triangle BCD$  nogmaals de cos-regel (@).

$$d^2 = 72 - 72 * \cos(\angle C).$$

$$\cos(\angle C) = -0,3889 \dots$$

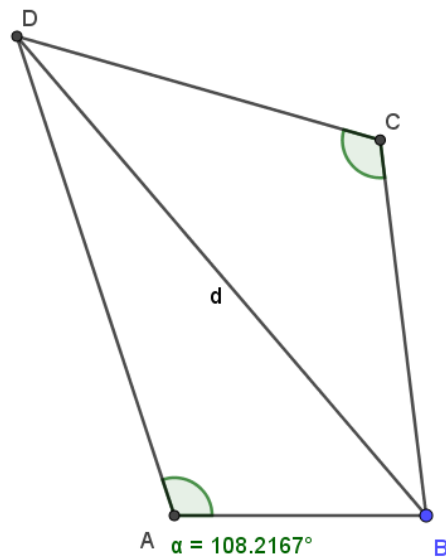
$$\angle C = 112,8915 \dots^\circ$$

$$\angle C \approx \mathbf{112^\circ 53'}$$

1b.  $Opp = \frac{1}{2} (4 * 8 * \sin(\angle A) + 6^2 * \sin(\angle C))$ 

Invullen geeft:

$$Opp(ABCD) = \mathbf{31,7804 \dots}$$



M65-2

Van koordenvierhoek ABCD is  $\angle A = 72^\circ$ .

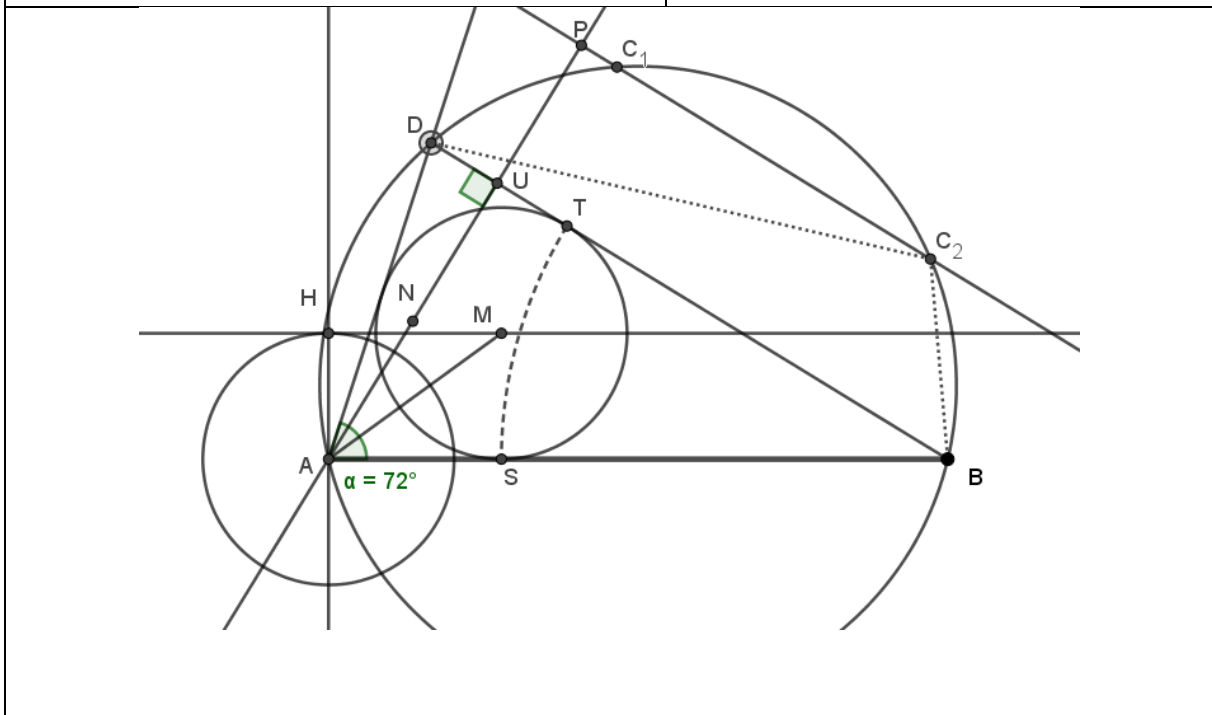
De straal van de ingeschreven cirkel van  $\triangle ABD$  is  $r$ .  $AB = p$ . (# $r$  ong. 2,5 cm, # $p$  ong. 12,5 cm).

De oppervlakte van  $\triangle BCD$  is de helft van de oppervlakte van  $\triangle ABD$ .

Construeer ABCD.

Stappen:

- |   |   |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Zet lijnstuk AB uit.</li> <li>2. Maak te A hoek van <math>72^\circ</math> (@?)</li> <li>3. Te A op AB loodlijn en <math>r</math> afpassen: H</li> <li>4. Te H loodlijn op AH.</li> <li>5. Bissectrice van hoek A snijdt in M.</li> <li>6. Maak ingeschreven cirkel (M, <math>r</math>).</li> <li>7. Snijpunt S met AB: BS dus raaklijn.</li> <li>8. Maak cirkel om ander raakpunt T te krijgen.</li> <li>9. BT snijdt nu been van hoek A: D.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>10. <math>\triangle ABD</math> is nu gemaakt.</li> <li>11. Loodlijn uit A op BD: punt U.</li> <li>12. <math>UP = \frac{1}{2} AU = UN</math>.<br/>(opp. helft; basis BD gelijk)</li> <li>13. Loodlijn in P op AP.</li> <li>14. Maak omgeschreven cirkel van driehoek ABD.</li> <li>15. Objecten 13 en 14 geven twee punten C.</li> <li>16. Vierhoek ABCD bekend.</li> </ol> |
|---|---|



Opmerking: Een zeer bewerkelijke opgave.

Hoek van 72 graden apart (gulden snede aanpak @?) of met gradenboog?

Verder veel cirkels voor (middel-)loodlijnen, bissectrice, etc.

M65-3

Van  $\triangle ABC$  is  $\angle C$  stomp.Op het verlengde van AC ligt D zo, dat  $BD = BC$ .Op het verlengde van BC ligt E zo, dat  $AE = AC$ .EF is de bissectrice van  $\angle AEC$  (F ligt op AC).DG is de bissectrice van  $\angle BDC$  (G ligt op BC).

Bewijs:

a. ABDE is een koordenvierhoek.

b. FGDE is een koordenvierhoek.

c.  $FG \parallel AB$ .

3a.

 $\angle BDC = \angle BCD$ : gelijkbenige driehoek. $\angle BCD = \angle ACE$ : overstaande hoeken. $\angle ACE = \angle AEC$ : gelijkbenige driehoek.

Dus:

 $\angle BDC = \angle AEC$ .

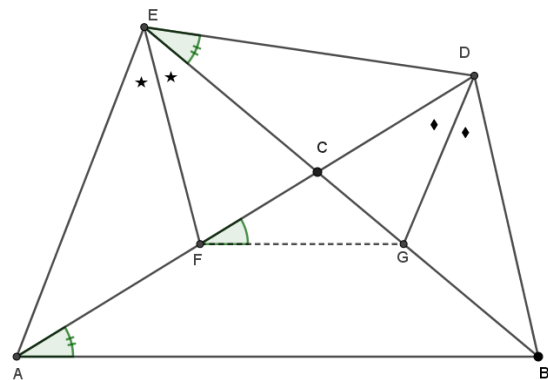
Ofwel:

 $\angle BDA = \angle AEB$ .

Gelijke hoeken op koorde AB.

Dan liggen A, B, D en E op één cirkel.

(omtrekshoekenstelling @)



Analysefiguur

3b.

 $\angle BDC = \angle AED$ . Dus na halvering:  $\angle GDF = \angle GEF$ .

Gelijke hoeken op koorde FG.

Dan liggen F, G, D en E op één cirkel.

Dus: FGDE is een koordenvierhoek.

3c.

Uit 3a:  $\angle BAD = \angle BEC$ : op dezelfde koorde BD.Uit 3b:  $\angle GED = \angle GFD$ : op dezelfde koorde DG.Dus:  $\angle BAD = \angle GFD$ .Dan volgt  $FG \parallel AB$ . (F-hoek @)

## Jaar 1968 uitwerking

M68-1

In trapezium ABCD ( $AB \parallel DC$ ) is diagonaal DB bissectrice van  $\angle B$ .

$\angle B = 73^\circ 44'$ ;  $BD = 20$  en de oppervlakte van  $\triangle ABC = 144$ .

Bereken:

- BC;
- AB;
- AD (1 dec.)

1a.

$\angle ABD = \angle BDC$  (Z-hoek @).

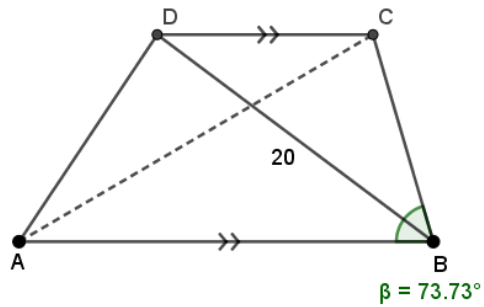
Dus:  $\angle DBC = \angle BDC = \frac{1}{2} \angle B = 36,8666 \dots^\circ$ .

Gevolg:  $\angle C = 106,2666 \dots^\circ$ .

En nu met de sin-regel (@):

$$\frac{20}{\sin(106,2666^\circ)} = \frac{BC}{\sin(36,8666^\circ)}$$

Dus:  $BC = 12,4994 \dots \approx \mathbf{12,5}$ .



1b.

$Opp(\triangle ABC) = 144 = \frac{1}{2} AB * 12,5 * \sin(73,7333^\circ)$ .

Dus:  $AB = 24,000 \dots \approx \mathbf{24}$ .

1c.

cos-regel in  $\triangle ABD$ : (@)

$AD^2 = 24^2 + 20^2 - 2 * 24 * 20 * \cos(36,8666^\circ) = 207,9668 \dots$

$AD = 14,4210 \dots \approx \mathbf{14,4}$ .

M68-2

In vierhoek ABCD loopt de bissectrice CE van  $\angle BCD$  (E op AB) evenwijdig aan DA.

BD en CE snijden elkaar in S.

$$\angle BCD = 72^\circ.$$

$$BD = p. (\#p \text{ ong. } 8 \text{ cm})$$

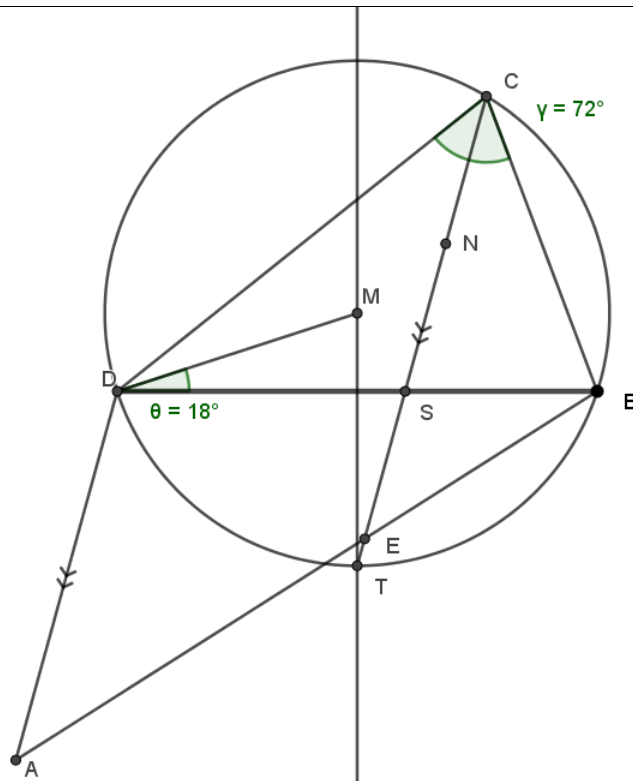
$$ES : AD = 2 : 5.$$

De oppervlakte van  $\triangle BES$  is de helft van de oppervlakte van  $\triangle BCS$ .

Construeer vierhoek ABCD.

Stappen:

1. Zet BD uit.
2. Maak punt S zdd  $BS : SD = 2 : 3$  (standaardconstructie @).  
(want  $SE \parallel DA$ :  $\triangle BES$  gelijkvormig aan  $\triangle BAD$  dus  $BS : BD = ES : AD = 2 : 5$ ).
3. Maak cirkel met mp M met koorde BD en middelpuntshoek  $144^\circ$ . Daar ligt C op.  
( $18 = 72 : 4$ ;  $72^\circ$  met gradenboog of via gulden snede?)
4. De middelloodlijn van BD snijdt de cirkel in T: bissectrice uit C gaat door T én door S.
5. Lijn TS snijdt de cirkel: punt C.
6. Halveer SC en pas af vanuit S: punt E.
7. Construeer door D lijn evenwijdig aan CE.(@)
8. Lijn door B en E snijdt de lijn van 7: punt A.
9. Vierhoek ABCD is gemaakt.



M68-3

AB is koorde in een cirkel met middelpunt M. C is het midden van de kleinste boog AB.

Koorde CD snijdt AB in P; koorde CE snijdt AB in R (CD > CE).

De verlengden van AB en DE snijden elkaar in S.

Bewijs:

- vierhoek PRED is een koordenvierhoek;
- $SA \times SB = SP \times SR$ ;
- $\angle ADR = \angle PEB$ .

3a.

$$\angle APD = \frac{1}{2} (bg AD + bg BC) (@)$$

$$\angle CED = \frac{1}{2} (bg CD).$$

$$\text{Ook: } \angle CED = \frac{1}{2} (bg CA + bg AD).$$

En nu:

$$\angle RED + \angle RPD =$$

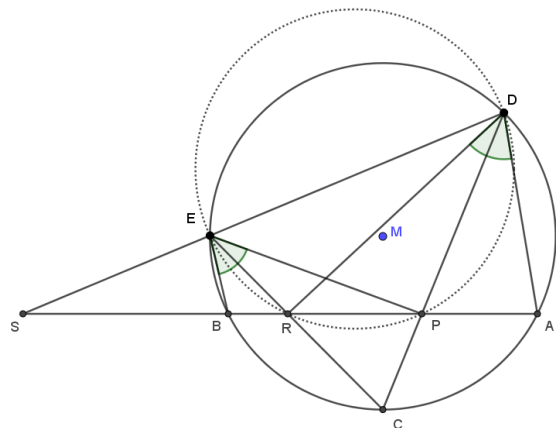
$$\angle CED + 180^\circ - \angle APD =$$

$$\frac{1}{2} bg CA + \frac{1}{2} bg AD + 180^\circ -$$

$$\frac{1}{2} bg CA - \frac{1}{2} bg AD = 180^\circ.$$

Overstaande hoeken samen  $180^\circ$ .

Dus (@): PRED is een koordenvierhoek.



Analysefiguur

3b.

$SA \times SB$  is de macht van punt S t.o.v. de cirkel door ABED. (@)

Dus ook:  $SA \times SB = SE \times SD$ .

Macht is een constante waarde. (@)

$SE \times SD$  is de macht van S t.o.v. de cirkel door PRED.

Dus ook:  $SE \times SD = SR \times SP$ .

Conclusie:  $SA \times SB = SR \times SP$ .

NB: Als macht geen basiskennis is, dan volgt e.e.a. ook uit gelijkvormigheid van driehoeken.

$\triangle ASE$  gelijkvormig met  $\triangle DSB$  en  $\triangle PSE$  gelijkvormig met  $\triangle DSR$ .

... wat overigens het 'algemene' bewijs van de gelijkheid van machten geeft.

3c.

$$\angle ADR = \angle ADP + \angle PDR = \angle ADC + \angle PDR.$$

$$\angle ADC = \frac{1}{2} bg AC = \angle BEC.$$

$$\angle PDR = \angle PER. \text{ Op zelfde koorde in cirkel bij 3a. (@)}$$

$$\text{Dus: } \angle ADR = \angle BEC + \angle PER = \angle PEB.$$

## Jaar 1969 uitwerking

M69-1

In  $\triangle ABC$  is  $I$  het middelpunt van de ingeschreven cirkel. $AI = 6$  en  $BI = 8$ . De oppervlakte van  $\triangle ABI = 21,33$ .

Bereken:

- $\angle AIB$
- $AB$  (afroonden op een geheel getal)
- $\angle ABC$
- $BC$  (afroonden op twee decimalen)

1a.

$$Opp(\triangle ABI) = \frac{1}{2} AI * BI * \sin(\theta). (@)$$

$$\text{Dus: } \sin(\theta) = \frac{21,33}{24} = 0,88875 \dots$$

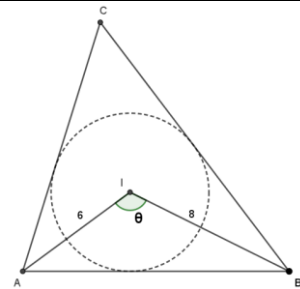
$$\theta = 117,2835 \dots^\circ \text{ (Stompe hoek!)}$$

$$\text{Dus: } \theta = \angle AIB \approx \mathbf{117^\circ 17'}$$

1b. Met cos-regel (@).

$$AB^2 = 36 + 64 - 96 * \cos(\theta) = 144,0057 \dots$$

$$\text{Afgerond: } AB = \mathbf{12}.$$



1c.

Met sin-regel (@).

$$\frac{12}{\sin(\theta)} = \frac{6}{\sin(\angle ABI)}. \text{ Dus: } \sin(\angle ABI) = 0,4444. \text{ Gevolg: } \angle ABI = 26,3833 \dots^\circ$$

$$BI \text{ is een bissectrice dus: } \angle ABC = 52,7666 \dots^\circ. \text{ Ofwel: } \angle ABC \approx \mathbf{52^\circ 46'}$$

1d.

$$\angle BAC = 2 * (180^\circ - \theta - \angle ABI) = 72,6666 \dots^\circ$$

$$\text{Dus: } \angle ACB = 54,5669 \dots^\circ.$$

$$\text{Dan met sin-regel: } \frac{12}{\sin(54,5669^\circ)} = \frac{BC}{\sin(72,6666^\circ)}.$$

$$\text{Dus: } BC = 14,0606 \dots$$

$$\text{Afgerond: } BC = \mathbf{14,06}.$$

Opmerking: Zie voor 1a ook hierna.

EXTRA: M69-1a met tabelgebruik zoals in de 60-er jaren en dus zonder rekenmachine...

Dus:  $\sin(\theta) = \frac{21,33}{24}$ .  
 De deling kan handmatig maar nu voorbeeldmatig met logaritmen (10-log).  
 $\log\left(\frac{21,33}{24}\right) = \log(21,33) - \log(24) = 1,3290 - 1,3802 = -0,0512$ .  
 Idee:  $10^1 < 21,33 = 10^{\log(t)} < 10^2$ .  
 Er geldt dus:  $1 < \log(t) < 2$ .  
 Dus:  $\log(t) = 1, \dots$

Zie tabel voor  $\log(2133)$ : rand  $\rightarrow$  binnen.  
 Soortgelijk voor  $\log(24)$ .

2000-2500		Gewone logaritmen.					
N	0	1	2	3	4	5	6
Mantisse of decimaal gedeelte van de logaritme.							
200	3010	12	15	17	19	21	23
201	3032	34	36	38	41	43	45
202	3054	56	58	60	62	64	66
203	3075	77	79	81	84	86	88
204	3096	3098	3101	3103	3105	3107	3109
205	3118	20	22	24	26	28	30
206	3139	41	43	45	47	49	51
207	3160	62	64	66	68	70	72
208	3181	83	85	87	89	91	93
209	3201	04	06	08	10	12	14
210	3222	24	26	28	30	33	35
211	3243	45	47	49	51	53	55
212	3263	65	67	69	72	74	76
213	3284	3286	3288	3290	3292	3294	3296
214	3304	06	08	10	12	14	16
215	3324	26	28	30	32	34	36
216	3345	47	49	51	53	55	57

De tabel geeft alleen positieve waarden.  
 Dus:  $\log\left(\frac{21,33}{24}\right) = 0,9488 - 1 = \log\left(\frac{q}{10}\right)$ .  
 $0 < \log(q) < 1$ .  
 Dus:  $1 < q < 10$ .  
 Terugzoeken in de tabel: binnen  $\rightarrow$  rand.  
 Dat geeft  $q = 8,888$ .  
 Te delen door 10 dus: 0,8888.

885	9469	70	70	71	71	72	72	73	73	74
886	9474	75	75	76	76	77	77	78	78	79
887	9479	80	80	81	81	82	82	83	83	84
888	9484	85	85	86	86	87	87	88	88	89
889	9489	90	90	91	91	92	92	93	93	94
890	9494	94	95	95	96	96	97	97	98	98
891	9499	9499	9500	9500	9501	9501	9502	9502	9503	9503
892	9504	04	05	05	06	06	07	07	08	08
893	9509	09	09	10	10	11	11	12	12	13
894	9513	14	14	15	15	16	16	17	17	18
895	9518	19	19	20	20	21	21	22	22	23
896	9523	24	24	25	25	26	26	27	27	28
897	9528	28	29	29	30	30	31	31	32	32
898	9533	33	34	34	35	35	36	36	37	37
899	9538	38	39	39	40	40	41	41	42	42
900	9542	43	43	44	44	45	45	46	46	47
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

De tabel loopt van  $0^\circ$  t/m  $45^\circ$ .  
 Hoek terugzoeken geeft: binnen  $\rightarrow$  rand.  
 $0,8888 = \cos(27^\circ 17') = \sin(62^\circ 43')$ .  
 Want (@):  $\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$ .

Dus bij stompe hoek:  $117^\circ 17'$ .  
 Want (@):  $\sin(\beta) = \sin(180^\circ - \beta)$ .

M	Sin	Tg	Cotg	Cos
0	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910
1	42	0,5099	612	09
2	45	0,5103	598	07
3	48	06	584	06
4	50	10	570	05
5	53	14	556	03
6	55	17	542	02
7	58	21	528	0,8901
8	61	25	514	0,8899
9	63	28	500	98
10	0,4566	0,5132	1,9486	0,8897
11	68	36	472	95
12	71	39	458	94
13	74	43	444	93
14	76	47	430	92
15	79	50	416	90
16	81	54	402	89
17	84	58	388	88
18	86	61	375	86
19	89	65	361	85



M69-3

In een cirkel is de scherphoekige  $\triangle ABC$  beschreven ( $AC < BC$ ).

$CD$  is hoogtelijn op  $AB$  ( $D$  op  $AB$ ).

$E$  is het voetpunt van de loodlijn uit  $A$  op de raaklijn in  $C$ .

$G$  is het voetpunt van de loodlijn uit  $C$  op de raaklijn in  $B$ .

Bewijs:

a. vierhoek  $ADCE$  is een koordenvierhoek.

b.  $DE \parallel BC$ .

c.  $\triangle DGC \sim \triangle ABC$ .

3a.

Hoek  $AEC$  is recht, dus de cirkel door  $A$ ,  $E$  en  $C$  heeft als mp het midden van  $AC$ . (Thales @)

Hoek  $ADC$  is recht, dus de cirkel door  $A$ ,  $D$  en  $C$  heeft als mp het midden van  $AC$ .

Dit zijn dezelfde cirkels dus  $ADCE$  is een koordenvierhoek.

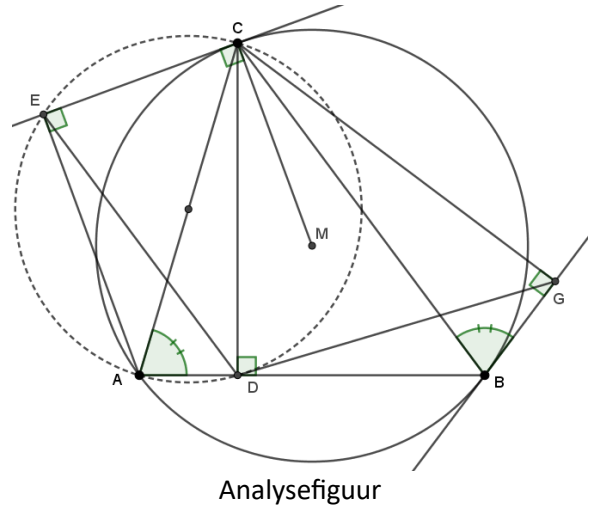
3b.

$\angle ADE = \angle ACE$ : op zelfde koorde  $AE$ .

Lijn  $EC$  is een raaklijn dus hoek  $ACE$  is een omtrekshoek op boog  $AC$  (@) en dus even groot als de omtrekshoek  $ABC$ .

Gevolg:  $\angle ADE = \angle ABC$ .

Dus:  $DE \parallel BC$  (F-hoek)



3c.

$\angle DAC = \angle GBC$ : omtrekhoeken bij koorde  $BC$  van de omgeschreven cirkel van  $\triangle ABC$ . Gemarkeerd in de figuur.

$\angle ADC = \angle BGC = 90^\circ$ .

Dus:  $\triangle ADC$  gelijkvormig met  $\triangle BGC$ . (hh)

Gevolg:  $\angle ACD = \angle BCG$  én  $AC : BC = DC : GC$ .

Dan ook:  $\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = \angle BCG + \angle DCB = \angle DCG$ .

Gevolg:  $\triangle ABC$  is gelijkvormig met  $\triangle DGC$  (zhz).

## Stereometrie in het middelbaar onderwijs

### Inleiding

In dit deel staan opgaven met uitwerkingen van het onderdeel stereometrie, ruimtemeetkunde, van eindexamens HBS-B. Zo'n examen had ook de onderdelen algebra en goniometrie met analytische meetkunde.

De examens komen uit de bundel 'Schriftelijke opgaven van het eindexamen HBS-B' van Kruijtbosch/Richter (1969)<sup>7</sup>. Het betreft de jaren 1961 t/m 1968. Die van 1969 en 1971 zijn apart verkregen. Het schooltype 'hogere burgerschool' is in 1968 afgeschaft t.g.v. de invoering van de Mammoetwet. In 1973 zijn de laatste examens voor HBS afgenomen.

Voor dit wiskundeonderdeel was 2,5 uur beschikbaar.

Er werd geen gebruik gemaakt van grafische of gewone rekenmachines: die bestonden nog niet. Ook de rekenliniaal was nog niet in gebruik. Mogelijk wel gebruik van een gonio- en logaritmetabel maar die is in de navolgende examens nergens nodig. Formulebladen zijn nooit beschikbaar geweest.

Basiskennis voor stereometrie betrof: constructies P&L, doorsneden van vlakken, lijnen met vlakken, projecties, formules inhoud viervlak en (afgeknotte) piramide, prisma, formules oppervlakte en inhoud bol en kegel en cilinder,...

Zie verder het leerboek 'Stereometrie voor m.o. en v.h.o.' van C.J. Alders (1959).

Verwijzing naar basiskennis gebeurt hierna met het symbool @.

Uitwerkingen zijn nooit openbaar gemaakt en zeker niet op internet: dat bestond nog niet.

In Kruijtbosch/Richter staan geen bewijzen of constructies maar wel de antwoorden van berekeningen, zonder de weg er naar toe. De hier getoonde uitwerkingen zijn van de schrijver dezes. Ze staan na de opgavenbladen. De tekeningen (constructies) zijn gemaakt met *GeoGebra*.

### Begrippen en notaties

In de examens kan  $AB$  staan voor de lijn door  $A$  en  $B$ , lijnstuk  $AB$  en voor de lengte van dat lijnstuk. Vaak blijkt uit de context wat bedoeld wordt.

Bij projectie is bedoeld een orthogonale projectie: loodrecht op een vlak dus.

Er is altijd sprake van een rechte kegel en een rechte cilinder dus de as staat loodrecht op het grondvlak en gaat door het midden van de grondcirkel.

Een lijn kan worden aangeduid met de letter  $x$ . Tegenwoordig zijn  $x, y, z$  meestal in gebruik als getalsvariabelen of lengtes van lijnstukken en  $k, l, m$  als letters voor lijnen.

Daar waar staat 'ribbe of zijde is  $p$ ' o.i.d. is uiteraard bedoeld  $p > 0$ .

Een vlak kan worden aangeduid met Griekse letters als  $\alpha$  en  $\beta$ . Tegenwoordig zijn die letters vrijwel exclusief voor hoeken gereserveerd en worden vlakken meestal met een hoofdletter geduid.

---

<sup>7</sup> M.i.v. 1963 waren de eindexamens wiskunde van HBS-B en Gymnasium  $\beta$  identiek.

## Examenopgaven stereometrie HBS-B

### Jaar 1961 opgaven

#### B61-1

Van het viervlak  $ABCD$  staan de drie in  $C$  samenkomende ribben twee aan twee loodrecht op elkaar;  $AC = BC = p\sqrt{2}$ ;  $CD = p\sqrt{3}$ .  $P$  is het midden van  $AD$  en  $Q$  is het midden van  $BD$ .

- Druk de inhoud van het viervlak  $ACPQ$  in  $p$  uit.
- Beschrijf de constructie van de raakvlakken  $\alpha$  en  $\beta$  door  $D$  aan het cilindervlak, dat  $AB$  als as heeft en door  $PQ$  gaat.
- Bereken de hoeken, die  $\alpha$  en  $\beta$  met het vlak  $ABC$  maken, en de afstand van de lijnen volgens welke  $\alpha$  en  $\beta$  het vlak  $ABC$  snijden.

#### B61-2

Van de piramide  $T.ABCD$  is het grondvlak een vierkant met zijde  $4p$ .  $TD$  staat loodrecht op het grondvlak;  $TD = 4p$ . De middens van  $AC, TA, TB$  en  $DA$  zijn opvolgende  $E, F, G$  en  $K$ .

- Bewijs, dat de bol met middellijn  $KG$  de ribben  $AD$  en  $TB$  raakt.
- Bewijs, dat  $EF$  een middellijn van deze bol is en dat  $EF$  en  $KG$  elkaar loodrecht snijden.
- Bewijs, dat deze bol het vlak  $TBC$  raakt.
- Druk de straal van de cirkel, volgens welke de bol het vlak  $ABC$  snijdt, in  $p$  uit.

#### B61-3

Gegeven is de kubus  $ABCD.EFGH$  met ribbe  $p$ . De middens van  $AB, HG$  en  $AE$  zijn opvolgend  $P, Q$  en  $R$ .

- Bewijs, dat  $PQ$  en  $DF$  elkaar loodrecht snijden.
- Bewijs, dat het vlak  $PQF$  loodrecht staat op het vlak  $PQR$ .
- Bewijs, dat de omgeschreven cirkel van  $\Delta PQR$  en het punt  $F$  de grondcirkel en top van een kegel zijn.
- Druk de oppervlakte van het deel van het vlak  $EFGH$ , dat binnen deze kegel ligt, in  $p$  uit.

### Jaar 1962 opgaven

#### B62-1

Van viervlak  $ABCD$  is  $AB = AC = p$ ,  $AD = BC = p\sqrt{2}$ .  $\angle DAB = \angle DAC$ ; deze hoeken zijn scherp.  $AD$  maakt met vlak  $ABC$  een hoek  $\alpha$ . de projectie van  $B$  op de ribbe  $AD$  is het punt  $E$ .

- Bewijs, dat  $BC$  loodrecht staat op  $AD$ , en druk de oppervlakte van driehoek  $BCE$  in  $p$  en  $\alpha$  uit.
- Bereken  $\alpha$ , als het viervlak een omgeschreven kegel heeft met top  $D$ .
- Wat is de verzameling van de zwaartepunten van de driehoeken  $BCE$ , als  $\alpha$  veranderlijk is?

#### B62-2

Van viervlak  $ABCD$  is het grondvlak  $ABC$  een gelijkzijdige driehoek.  $AD$  staat loodrecht op vlak  $ABC$ .  $P$  is het midden van  $AB$ ,  $Q$  is het midden van  $AC$ . De bol door  $A, P, Q$  en  $D$  snijdt  $BD$  in  $S$  en  $CD$  in  $R$ .

- Bewijs, dat  $PQ$  en  $RS$  evenwijdig zijn en dat de lijnen  $AD, PS$  en  $QR$  door één punt gaan.
- Bewijs, dat  $CS$  loodrecht staat op  $BD$ .
- Bewijs, dat de omgeschreven cirkels van de driehoeken  $BPS$  en  $CQR$  op één bol liggen, en construeer in een stereometrische figuur van het viervlak met middelpunt van deze bol.

B62-3

In kubus  $ABCD.EFGH$  met ribbe  $p$  is een cilinder beschreven; grond- en bovenvlak van de cilinder zijn de ingeschreven cirkels van de vierkanten  $ABFE$  en  $DCGH$ . Het midden van  $BF$  is  $K$ . Het snijpunt van  $DG$  en  $CH$  is  $N$ .

- Druk de afstand van  $HK$  en de as van de cilinder in  $p$  uit.
- De lijn  $HK$  snijdt de cilinder, behalve in  $K$ , nog in het punt  $X$ . Bereken de verhouding  $HX : XK$ .
- $P$  is een willekeurig punt van de ingeschreven cirkel van  $ABFE$ . Bepaal  $P$  zo, dat de inhoud van viervlak  $EKNP$  maximaal is, en druk deze maximale inhoud in  $p$  uit.

### Jaar 1963 opgaven

B63-1

Van een regelmatige vierzijdige piramide  $T.ABCD$  is  $M$  het midden van de ribbe  $TA$  en  $N$  het midden van de ribbe  $TB$ . De hoogte van de piramide is  $h$ .

- Construeer in een stereometrische figuur van de piramide de lijn  $x$ , die  $BM$  en  $CN$  snijdt en loodrecht staat op het vlak  $TBD$ .
- Druk de afstand van de lijn  $MN$  en  $x$  in  $h$  uit.

B63-2

Van een drizijdige piramide  $T.ABC$  staan de ribben  $AC$ ,  $BC$  en  $TC$  twee aan twee loodrecht op elkaar.  $P$  is een willekeurig punt van  $TC$ , gelegen tussen  $T$  en  $C$ .  $N$  is het middelpunt van de bol met  $TP$  als middellijn. Deze bol snijdt  $TA$  behalve in  $T$  nog in  $Q$ ; de bol snijdt  $TB$  behalve  $T$  nog in  $R$ .

- Construeer in een stereometrische figuur van de piramide het middelpunt  $M$  van de bol door de punten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $P$ .
- Bewijs, dat  $MN$  loodrecht staat op het vlak  $PQR$ .
- Gegeven is bovendien,  $AC = 8$ ,  $BC = 6$ ,  $TC = 20$  en dat de oppervlakte van bol  $M$  twee maal zo groot is als de oppervlakte van bol  $N$ . Bereken  $TP$ .

B63-3

Gegeven is een viervlak  $ABCD$ . De projectie van  $D$  op het vlak  $ABC$  ligt op de ribbe  $AC$ ;  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$  en  $\angle CAD = 60^\circ$ . Op de ribbe  $CD$  ligt een punt  $P$  zo, dat het vlak  $ABP$  de hoek gevormd door de zijvlakken  $ABC$  en  $ABD$  middendoor deelt.

- Bereken de verhouding van de inhoud van de viervlakken  $ABCP$  en  $ABDP$ .
- Bewijs, dat het vlak door  $BD$  en het midden  $E$  van  $AC$  loodrecht staat op het vlak  $ABP$ .
- Gegeven is bovendien, dat  $AD = 4$  en  $AB = 3$ .  
Bereken de cosinus van de hoek van de lijnen  $AC$  en  $BD$ .

### Jaar 1964 opgaven

B64-1

Van een regelmatige vierzijdige piramide  $T.ABCD$  zijn alle ribben  $a$ .  $E$  is het snijpunt van  $AC$  en  $BD$ ;  $F$  is het midden van  $AD$  en  $G$  het midden van  $BT$ .

- Druk de afstand van de lijnen  $CG$  en  $DT$  in  $a$  uit.
- Bereken de hoek, die  $BC$  met het vlak  $ACG$  maakt.
- Druk de straal van de bol, die door  $A$ ,  $E$ ,  $F$  en  $G$  gaat, in  $a$  uit.

B64-2

Van een scheef driezijdig prisma is het grondvlak  $ABC$  een gelijkzijdige driehoek met zijde  $2a$ . De opstaande ribben  $AD$ ,  $BE$  en  $CF$  zijn  $a\sqrt{3}$ .  $M$  is het midden van  $DE$ . De projectie van  $M$  op het grondvlak valt samen met het zwaartepunt  $Z$  van driehoek  $ABC$ .

- Bewijs, dat vlak  $ABF$  het deelvlak is van de tweevlakshoek gevormd door het grondvlak  $ABC$  en het zijvlak  $ABED$ .
- Druk de inhoud van het viervlak  $ABFM$  in  $a$  uit.
- Een kegel met top  $M$  en as  $MZ$  raakt vlak  $ABED$ . Bewijs, dat de doorsnede van het prisma met een raakvlak door  $C$  aan deze kegel een rechthoekig trapezium is.

B64-3

a. Van een kubus  $ABCD.EFGH$  is de ribbe  $a$ .  $S$  is het snijpunt van  $BG$  en  $CF$ .

Construeer in een stereometrische figuur van de kubus (waarbij  $ABFE$  wordt voorgesteld door een vierkant met zijde 8 cm) de lijnen door  $S$ , die loodrecht op  $CE$  staan en die  $AD$  op een afstand  $\frac{1}{2}a$  kruisen.

b. In een kubus  $ABCD.EFGH$  is  $K$  een willekeurig punt van het lijnstuk  $AH$ .  $P$  is de projectie van  $F$  op  $CK$ . Wat is de verzameling van de punten  $P$ , als  $K$  het lijnstuk  $AH$  doorloopt?

### Jaar 1965 opgaven

B65-1

Van een recht parallellepipedum  $ABCD.EFGH$  is het grondvlak  $ABCD$  een vierkant;  $AB = 4$  en  $AE = 8$ . Op de ribbe  $AB$  ligt punt  $P$ , op de ribbe  $BC$  ligt punt  $Q$  en op de ribbe  $HE$  ligt punt  $R$ ;  $AP = BQ = HR = 3$ . Het vlak  $\alpha$  gaat door de lijn  $AQ$  en is evenwijdig aan de lijn  $BR$ .  $S$  is het snijpunt van  $\alpha$  met de ribbe  $CG$ .

- Construeer in een stereometrische figuur van het parallellepipedum de doorsnede van dit lichaam met  $\alpha$  en bereken de lengte van  $CS$ .
- Bewijs, dat de lijnen  $AQ$  en  $HP$  elkaar loodrecht kruisen.
- Bereken de tangens van de hoek, die  $\alpha$  met vlak  $ABCD$  maakt.

B65-2

Van een driezijdige piramide  $T.ABC$  is het grondvlak  $ABC$  een gelijkzijdige driehoek. De ribbe  $TA$  staat loodrecht op het grondvlak;  $AB = 4p$  en  $TA = 6p$ .  $D$  is het midden van ribbe  $AB$ . Een cilindervlak, waarvan de as door  $A$  gaat, heeft de lijn  $BC$  tot beschrijvende.

a. Het cilindervlak snijdt  $TBC$ , behalve volgens  $BC$ , ook nog volgens een lijn, die  $TB$  in  $P$  en  $TC$  in  $Q$  snijdt. Het raakvlak door  $PQ$  aan het cilindervlak snijdt de ribbe  $TA$  in  $R$ .

Druk de inhoud van het viervlak  $TPQR$  in  $p$  uit.

b. Het raakvlak door  $BC$  aan het cilindervlak snijdt de omgeschreven bol van het viervlak  $TACD$  volgens een cirkel. Druk de straal van deze cirkel in  $p$  uit.

B65-3

Van een recht parallellepipedum  $ABCD.EFGH$  is  $ABCD$  een vierkant;  $AB = 2p$  en  $AE = p\sqrt{3}$ .  $K$  is het midden van de ribbe  $AB$ . Gegeven is een stereometrische figuur van dit parallellepipedum,<sup>8</sup> waarin  $ABFE$  wordt voorgesteld door een rechthoek.

- Construeer in deze stereometrische figuur het punt  $P$ , dat op de ribbe  $CG$  ligt en dat gelijke afstand heeft tot de lijnen  $EF$ ,  $EH$  en  $EK$ .
- Druk de onder a bedoelde afstand in  $p$  uit.
- Bewijs, dat de punten  $E, F, H, K$  en  $P$  op één bol liggen.

### Jaar 1966 opgaven

B66-1

Van een regelmatige vierzijdige piramide  $T.ABCD$  is  $AB = AT = p$ . Het midden van  $AB$  is  $E$ , het midden van  $AT$  is  $F$  en het midden van  $BT$  is  $G$ .

- Bewijs, dat de punten  $B, C, E, F$  en  $T$  op één bol liggen.
- Construeer in een stereometrische figuur van de piramide de lijn door  $E$ , die  $CT$  en  $DG$  snijdt.
- Druk de afstand van  $AC$  en  $EF$  in  $p$  uit.

B66-2

Van een vierzijdig prisma  $ABCD.EFGH$  is het grondvlak  $ABCD$  een ruit. De zijde van de ruit is  $p$  en  $\angle BAD = 60^\circ$ . De projectie van  $F$  op het grondvlak valt samen met het snijpunt van  $AC$  en  $BD$ . De opstaande ribben maken hoeken van  $60^\circ$  met het grondvlak.

- Bewijs, dat  $AH$  en  $CF$  elkaar loodrecht kruisen.
- Beschouw de kegel met top  $F$  waarvan de grondcirkel de ribben van het grondvlak raakt. Druk de inhoud van deze kegel in  $p$  uit.
- Druk de stukken, waarin de twee raakvlakken door  $H$  aan deze kegel het lijnstuk  $AC$  verdelen, in  $p$  uit.

B66-3

In een kubus  $ABCD.EFGH$  wordt op de ribbe  $CG$  een punt  $Q$  gekozen. Daarna wordt op de ribbe  $BF$  een punt  $P$  zo gekozen, dat  $BP < CQ$ . Vlak  $APQ$  snijdt de ribbe  $DH$  in  $R$ .

- Bewijs, dat  $AQ$  en  $PR$  elkaar middendoor delen en dat  $BP + DR = CQ$ .
- Het zwaartepunt van viervlak  $EPQR$  is  $Z$ .

Wat is de verzameling van de punten  $Z$ , als  $Q$  de ribbe  $CG$  doorloopt,  $P$  de ribbe  $BF$  doorloopt en  $BP \leq CQ$ ?

### Jaar 1967 opgaven

B67-1

In een kubus  $ABCD.EFGH$  is  $P$  het midden van de ribbe  $AB$  en  $Q$  het snijpunt van  $BG$  en  $CF$ .

- Bewijs, dat  $AG$  evenwijdig is met vlak  $CFP$ .
- Bewijs, dat  $HQ$  loodrecht staat op vlak  $CFP$ .
- Construeer in een stereometrische figuur van de kubus de lijn  $x$ , die  $HF$ ,  $AG$  en  $DP$  snijdt en evenwijdig is met vlak  $CFP$ .

<sup>8</sup> Werkbladen of voorbeeldfiguren zoals in het huidige vo waren er niet. De kandidaat moest de figuur eerst nog maken.

B67-2

Een rechthoek  $ABCD$  is het grondvlak van een recht parallellepipedum  $ABCD.EFGH$ ;  $AB = AE = 2a$  en  $AD = a\sqrt{3}$ ;  $P$  is het midden van de ribbe  $AB$  en  $Q$  het midden van de ribbe  $AE$ .

- Druk de inhoud van het viervlak  $FHPQ$  in  $a$  uit.
- Bewijs, dat  $CQ$  raakt aan een kegelvlak, waarvan  $HD$  de as en  $HA$  een beschrijvende is.
- Op de ribbe  $BF$  ligt het punt  $X$  zo, dat de oppervlakte van driehoek  $CQX$  minimaal is. Druk deze oppervlakte in  $a$  uit.

B67-3

$T.ABC$  is een regelmatige driezijdige piramide. De ribbe van het grondvlak is 12 en de hoogte van de piramide is 6. Het zwaartepunt van driehoek  $ABC$  is het middelpunt van een bol met straal 3.

- Bewijs, dat deze bol de opstaande zijvlakken van de piramide  $T.ABC$  raakt.
- $P$  is een punt van de ribbe  $AT$ . De raaklijnen door  $P$  aan de bol raken de bol in de punten van een cirkel. Welke waarden kan de straal van deze cirkel aannemen, als  $P$  de ribbe  $AT$  doorloopt?

### Jaar 1968 opgaven

B68-1

In een kubus  $ABCD.EFGH$  is  $S$  het snijpunt van  $AC$  en  $BD$  en  $M$  het snijpunt van  $BG$  en  $CF$ .

- Bereken de sinus van de hoek van de lijn  $HM$  en het vlak  $BDHF$ .
- Bewijs, dat  $S$  ligt op de bol met middelpunt  $M$  en die de lijn  $EF$  raakt.
- Bewijs, dat het raakvlak in  $S$  aan deze bol loodrecht staat op het vlak  $AFH$ .

B68-2

Van een vierzijdig prisma  $ABCD.EFGH$  is het grondvlak  $ABCD$  een vierkant;  $AB = 2a$ . De projectie van  $E$  op het grondvlak valt samen met het midden  $M$  van de ribbe  $AB$ ;  $EM = a$ .

- Druk de afstand van  $AD$  en  $CE$  in  $a$  uit.
- $P$  is het midden van de ribbe  $CG$ . Construeer in een stereometrische figuur van het prisma de lijn  $x$ , die  $AC$  en  $DP$  snijdt en die evenwijdig is aan  $BH$ .
- Beschouw de kegel met top  $E$ , met as  $EM$ , en waarvan de grondcirkel door  $B$  gaat. Druk de oppervlakte van dat deel van vlak  $ACE$  dat binnen de kegel ligt in  $a$  uit.

B68-3

Van een vierzijdige piramide  $T.ABCD$  is het grondvlak een parallellogram;  $\angle ADB = 90^\circ$ ,  $AD = a$  en  $BD = 2a$ .  $TD$  staat loodrecht op het vlak  $ABCD$ ;  $TD = 2a$ .

$P$  is het midden van de ribbe  $AB$  en  $Q$  is het midden van de ribbe  $TC$ .

- Bewijs, dat de lijn door de middens van de ribben  $TA$  en  $BC$  het lijnstuk  $PQ$  loodrecht middendoor deelt.
- Bewijs, dat  $PQ$  het cilindervlak met as  $TD$  en straal  $a$  raakt.
- Op de lijn door  $T$  evenwijdig aan  $AD$  ligt punt  $X$  zo, dat  $CX = CA$ . Druk  $TX$  in  $a$  uit.

### Jaar 1969 opgaven

B69-1

Van een recht driezijdig prisma  $ABC.DEF$  is  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ ,  $AD = 2a$  en  $\angle BAC = 90^\circ$ .

- Bereken de cosinus van de hoek van de lijnen  $AB$  en  $CE$ .
- Druk de afstand van de lijnen  $AB$  en  $CE$  in  $a$  uit.
- Druk de straal van de bol die door de punten  $D$ ,  $E$  en  $F$  gaat en die vlak  $ABC$  raakt in  $a$  uit.

B69-2

Van een regelmatige vierzijdige piramide  $T.ABCD$  is  $AB = 2p$  en  $AT = p\sqrt{5}$ .  $K$  is het midden van de ribbe  $BC$  en  $L$  het midden van de ribbe  $AD$ .

- Bereken de hoek van de vlakken  $ADT$  en  $BCT$ .
- De bol met middellijn  $KT$  snijdt de vlakken  $ABCD$  en  $ADT$  elk volgens een cirkel. Druk de stralen van deze cirkels in  $p$  uit.
- Construeer in een stereometrische figuur van de piramide de doorsnede van de piramide met het raakvlak aan de genoemde bol, dat loodrecht staat op  $LT$  en de ribbe  $AT$  snijdt.

B69-3

In een vlak  $\alpha$  liggen een punt  $A$  en een cirkel met middelpunt  $M$  en straal  $r$ .  $A$  ligt buiten de cirkel.  $T$  is de top van een kegel, die deze cirkel tot grondcirkel heeft;  $MT = r$ . Uit  $A$  trekt men de raaklijnen aan de cirkel; de raakpunten zijn  $B$  en  $C$ . Het midden van  $BT$  is  $D$  en het midden van  $CT$  is  $E$ .

- Bewijs, dat  $\angle ADM = 90^\circ$ .
- Gegeven is verder,  $AM = r\sqrt{2}$ .  
Druk de inhoud van viervlak  $ADET$  in  $r$  uit.

### Jaar 1971 opgaven <sup>9</sup>

B71-1.

Op het verlengde van de diagonaal  $DB$  van het grondvlak van de kubus  $ABCD$ .  $EFGH$  ligt het punt  $P$  zodat  $BP = \frac{1}{2}BD$ .

- Construeer in een projectiefiguur van de kubus, waarin  $ABFE$  door een vierkant wordt voorgesteld, de lijn  $x$  door  $P$  die een hoek van  $45^\circ$  maakt met de lijn  $BC$  en die een punt gemeen heeft met lijnstuk  $GH$ .
- Construeer in dezelfde figuur de doorsnede van de kubus met het vlak door de lijn  $x$  dat een hoek van  $45^\circ$  maakt met het vlak  $DCGH$ .  
Geef een korte beschrijving van deze constructie.

B71-2.

Van een driezijdig prisma  $ABC.DEF$  is gegeven dat  $BC = AC = CF$  en  $\angle ACB = 90^\circ$ . De projectie van  $E$  op het grondvlak  $ABC$  valt samen met het midden  $P$  van ribbe  $BC$ .

- Bewijs dat de lijnen  $BF$  en  $AE$  elkaar loodrecht kruisen.
- Bewijs dat de punten  $A, C, D, E, F$  en het snijpunt  $Q$  van  $BF$  en  $EP$  op één bol liggen.
- Bewijs dat  $BE$  deze bol raakt en dat het midden van de ribbe  $AB$  op deze bol ligt.

B71-3.

Van een kegel met top  $T$  is  $M$  het middelpunt van de grondcirkel en  $r$  de straal. Het midden van de hoogte  $TM$  is punt  $N$ ; de hoogte  $TM = 2r$ . Op de grondcirkel ligt een vast punt  $A$  en een variabel punt  $B$ . Het midden van het lijnstuk  $TB$  is punt  $C$ .

- Druk de lengte van  $AB$  uit in  $r$  voor het geval dat  $NC$  loodrecht staat op  $AC$ .
- Druk de lengte van  $AC$  uit in  $r$  voor het geval dat de inhoud van viervlak  $ABCN$  gelijk is aan  $\frac{1}{12}r^3$ .
- Wat is de verzameling van de middens van de lijnstukken  $AC$  voor het geval dat  $B$  de grondcirkel doorloopt? Motiveer het antwoord.

<sup>9</sup> Eindexamen van de schrijver dezes.

## Uitwerkingen examens stereometrie

### Jaar 1961 uitwerkingen

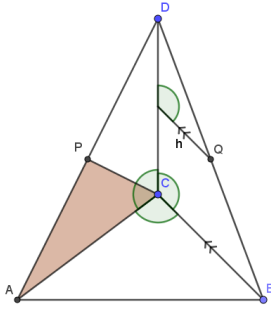
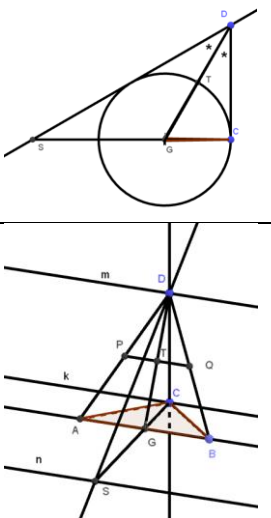
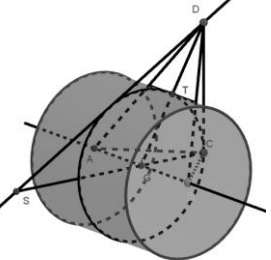
B61-1.

Van het viervlak  $ABCD$  staan de drie in  $C$  samenkomende ribben twee aan twee loodrecht op elkaar;  $AC = BC = p\sqrt{2}$ ;  $CD = p\sqrt{3}$ .  $P$  is het midden van  $AD$  en  $Q$  is het midden van  $BD$ .

a. Druk de inhoud van het viervlak  $ACPQ$  in  $p$  uit.

b. Beschrijf de constructie van de raakvlakken  $\alpha$  en  $\beta$  door  $D$  aan het cilindervlak, dat  $AB$  als as heeft en door  $PQ$  gaat.

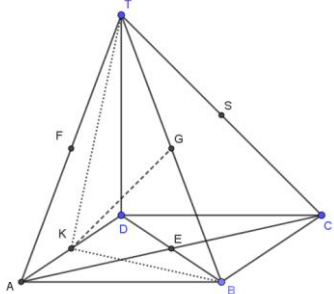
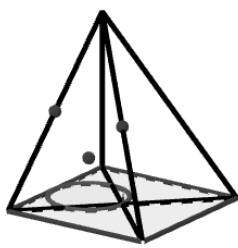
c. Bereken de hoeken, die  $\alpha$  en  $\beta$  met het vlak  $ABC$  maken, en de afstand van de lijnen volgens welke  $\alpha$  en  $\beta$  het vlak  $ABC$  snijden.

<p>1a. <math>Opp(ACP) = \frac{1}{2}O(ACD) = \frac{1}{4}p^2\sqrt{6}</math>.</p> <p>Zie de figuur hiernaast.</p> <p>De gemarkeerde hoeken zijn recht!</p> <p>Lijnstuk <math>h</math> staat loodrecht op <math>ACD</math>.</p> <p><math>h = \frac{1}{2} *  BC  = \frac{1}{2}p\sqrt{2}</math>. (Middenparallel @)</p> <p><math>Inhoud(Q.ACP) = \frac{1}{3} * h * opp(ACP)</math>. (@)</p> <p><math>Inh(Q.ACP) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2}p\sqrt{2} * \frac{1}{4}p^2\sqrt{6} = \frac{1}{12}p^3\sqrt{3}</math>.</p>	
<p>1b. Noem <math>G</math> het midden van <math>AB</math>. Het vlak door <math>GCD</math> staat loodrecht op <math>AB</math>. De doorsnijding van de cilinder met dit vlak is een cirkel. Die gaat door <math>C</math> want die heeft straal <math>p</math>. <math> GC  = p</math>; <math> GD  = 2p</math>. De lijn <math>PQ</math> snijdt <math>GD</math> doormidden te <math>T</math>. Straal cilinder = <math> GT  = p</math>.</p> <p>In de figuur de doorsnede, de raaklijnen uit <math>D</math> aan die cirkel dus aan de cilinder en de snijpunten <math>C</math> en <math>S</math> daarvan met het grondvlak.</p> <p>In de tweede figuur is <math>CG</math> verlengd, zie 1c: <math> GS  = 2 *  CG </math>.</p> <p>In die figuur zijn lijnen evenwijdig aan <math>AB</math> getrokken door <math>S(n)</math>, <math>C(k)</math> en <math>D(m)</math>.</p> <p>Raakvlakken <math>\alpha</math> resp. <math>\beta</math> zijn de vlakken door <math>k</math> en <math>m</math> resp. <math>n</math> en <math>m</math>.</p>	
<p>1c. <math>\angle CGD = 60^\circ</math>; <math>\angle CDS = 60^\circ</math>.</p> <p>Verder: raakvlak door <math>CD</math> (<math>\alpha</math>) staat loodrecht op grondvlak, hoek is dus <math>90^\circ</math>.</p> <p>Driehoek <math>SCD</math> is een 30, 60, 90 driehoek dus raakvlak door <math>SD</math> (<math>\beta</math>) maakt hoek van <math>30^\circ</math> met het grondvlak.</p> <p><math> SC  =  CD  * \sqrt{3} = 3p</math>, de gevraagde afstand.</p> <p>Extra figuur met 3D-GeoGebra gemaakt. De cilinder is redelijk zichtbaar.</p>	

B61-2.

Van de piramide  $T.ABCD$  is het grondvlak een vierkant met zijde  $4p$ .  $TD$  staat loodrecht op het grondvlak;  $TD = 4p$ . De middens van  $AC, TA, TB$  en  $DA$  zijn opvolgende  $E, F, G$  en  $K$ .

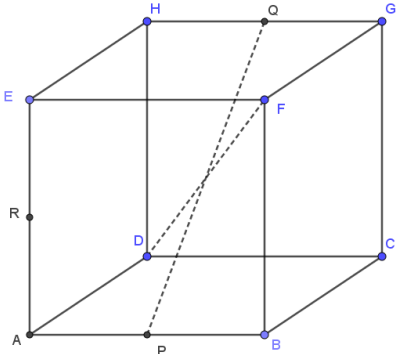
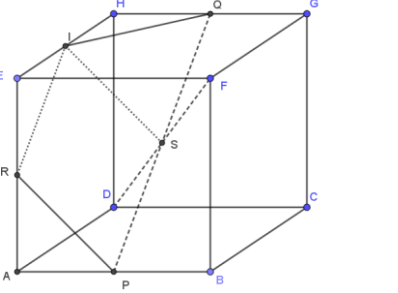
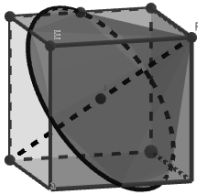
- Bewijs, dat de bol met middellijn  $KG$  de ribben  $AD$  en  $TB$  raakt.
- Bewijs, dat  $EF$  een middellijn van deze bol is en dat  $EF$  en  $KG$  elkaar loodrecht snijden.
- Bewijs, dat deze bol het vlak  $TBC$  raakt.
- Druk de straal van de cirkel, volgens welke de bol het vlak  $ABC$  snijdt, in  $p$  uit.

<p>2a. <math>KG</math> ligt in vlak <math>TKB</math>.  <math>TK = KB = p\sqrt{20}</math>. <math>G</math> midden van <math>BT</math>. Dus <math>KG</math> zwaartelij en hoogtelijn in de gelijkbenige driehoek <math>TKB</math>. (@). [1]            Vlak <math>KEGF</math> staat loodrecht op <math>AD</math> in punt <math>K</math>.            Dus <math>KG</math> loodrecht op <math>AD</math> in punt <math>K</math>. [2]            Uit [1] en [2]: <math>KG</math> loodrecht op <math>AD</math> en op <math>BT</math>.  <math>AD</math> en <math>BT</math> zijn dus raaklijnen aan de bol met middellijn <math>KG</math>.</p>	
<p>2b. <math>KEGF</math> is een vierkant met zijde <math>2p</math>, want <math>GE \parallel DT \parallel KF</math> en <math>GE = KF = 2p</math>.            De diameter van de bol is <math>KG</math>. De diagonalen zijn even lang, staan loodrecht op elkaar en de omschreven cirkel is de doorsnijding van de bol met vlak <math>KEGF</math>.</p>	
<p>2c. Noem midden van <math>TC</math> nu <math>S</math>.  <math>SG</math> staat loodrecht op <math>KEGF</math> dus loodrecht op diameter <math>KG</math> van de bol.            Uit 2a. <math>TB</math> staat ook loodrecht op diameter <math>KG</math> van de bol.            Dus het vlak waarin <math>TB</math> en <math>SG</math> liggen, dat is <math>TBC</math>, staat loodrecht op diameter <math>KG</math> en raakt dus de bol in punt <math>G</math>.</p>	
<p>2d. De bol raakt <math>AD</math>, zie 2a, dus de snijcirkel ook.            De bol gaat door <math>E</math> dus de snijcirkel ook.            Gevolg: <math>KE</math> is de middellijn van die snijcirkel. <math>KE = 2p</math> (midden parallel in <math>ABD</math> @).            Dus de straal van die cirkel is <math>p</math>.</p> <p>Extra: de snijcirkel met <i>3D-GeoGebra</i>. De 'zwevende' stip is het mp van de bol.</p>	

B61-3.

Gegeven is de kubus  $ABCD.EFGH$  met ribbe  $p$ . De middens van  $AB, HG$  en  $AE$  zijn opvolgend  $P, Q$  en  $R$ .

- Bewijs, dat  $PQ$  en  $DF$  elkaar loodrecht snijden.
- Bewijs, dat het vlak  $PQF$  loodrecht staat op het vlak  $PQR$ .
- Bewijs, dat de omgeschreven cirkel van  $\Delta PQR$  en het punt  $F$  de grondcirkel en top van een kegel zijn.
- Druk de oppervlakte van het deel van het vlak  $EFGH$ , dat binnen deze kegel ligt, in  $p$  uit.

<p>3a. Even rekenen laat zien:  <math>DP = PF = FQ = QD = \frac{1}{2}p\sqrt{5}</math>. En <math>DP \parallel GQ</math>.  Dus de vier punten liggen in een vlak en vormen een ruit.  Gevolg: de diagonalen <math>DF</math> en <math>PQ</math> staan loodrecht op elkaar (@) en snijden in dat vlak.</p>	
<p>3b. Snijlijn van deze twee vlakken is <math>PQ</math>.  <math>DF</math> ligt in vlak <math>PQF</math> dus uit 3a:  <math>DF</math> loodrecht op <math>PQ</math>. [1]  <math>I</math> midden van <math>EH</math>. <math>IS \parallel RP</math> dus in vlak <math>PQR</math>.  <math>IF = ID</math>. Dus in gelijkbenige driehoek <math>DFI</math> is <math>IS</math> een zwaartelijns- en hoogtelijn dus <math>IS</math> loodrecht op <math>DF</math>. [2]  Uit [1] en [2] volgt: <math>DF</math> loodrecht op vlak <math>PQR</math>.  Dus: vlak <math>PFQD</math> loodrecht op vlak <math>PQR</math>.</p>	
<p>3c. <math>SP = SQ = RS =</math> helft van een vierkantsdiagonaal. Dus de omgeschreven cirkel van <math>PQR</math> heeft straal <math>\frac{1}{2}p\sqrt{2}</math> en mp. <math>S</math>: cirkel <math>c</math>.  <math>FS</math> (in vlak <math>PFQ</math>) staat loodrecht op vlak <math>PQR</math> (3b) dus <math>F</math> loodrecht boven <math>S</math>.  <math>F</math> is dan te top van een kegel met grondcirkel <math>c</math>.</p>	
<p>3d. De grondcirkel snijdt <math>EFGH</math> in <math>I</math> en <math>Q</math>.  Driehoek <math>FIQ</math> is dus de doorsnede van vlak met de kegel.  <math>O(FIQ) = O(EFGH) - 2 * O(EFI) - O(HIQ)</math>.  Dus: <math>O(PIQ) = p^2 - 2 * \left(\frac{1}{4}p^2\right) - \frac{1}{8}p^2 = \frac{3}{8}p^2</math>.   Extra: de kegel met <math>3D</math>-GeoGebra.</p>	

## Jaar 1962 uitwerkingen

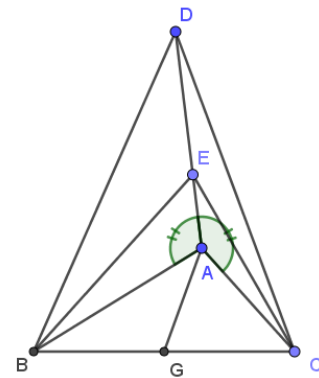
B62-1

Van viervlak  $ABCD$  is  $AB = AC = p$ ,  $AD = BC = p\sqrt{2}$ .  $\angle DAB = \angle DAC$ ; deze hoeken zijn scherp.  $AD$  maakt met vlak  $ABC$  een hoek  $\alpha$ . de projectie van  $B$  op de ribbe  $AD$  is het punt  $E$ .

- Bewijs, dat  $BC$  loodrecht staat op  $AD$ , en druk de oppervlakte van driehoek  $BCE$  in  $p$  en  $\alpha$  uit.
- Bereken  $\alpha$ , als het viervlak een omgeschreven kegel heeft met top  $D$ .
- Wat is de verzameling van de zwaartepunten van de driehoeken  $BCE$ , als  $\alpha$  veranderlijk is?

1a. De gemarkeerde hoeken zijn gelijk en scherp.  
 $G$  is het midden van  $BC$ .  $AG$  dan loodrecht op  $BC$ .  
 Vanwege congruentie geldt:  $BD = CD$  (ZHZ). (@)  
 Dus  $DG$  is hoogtelijn in driehoek  $BCD$ .  
 $DG$  én  $AG$  loodrecht op  $BC$ , dan  $AD$  gelegen in vlak  $DGA$   
 loodrecht op  $BC$  in punt  $G$ .

$BE$  én  $CE$  loodrecht op  $AD$  dus vlak  $BCE$  loodrecht op  $AD$  in  $E$ .  
 Dan ook  $GE$  loodrecht op  $AD$  in punt  $E$  en  $\angle EAG = \alpha$ .  
 Driehoek  $EAG$  is rechthoekig te  $E$  dus:  $EG = AG \cdot \sin(\alpha)$ .  
 En dan:  $opp(\triangle BCE) = \frac{1}{2} * EG * BC = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} p\sqrt{2} \sin(\alpha) * p\sqrt{2}$ .  
 $opp(\triangle BCE) = \frac{1}{2} p^2 \sin(\alpha)$ .

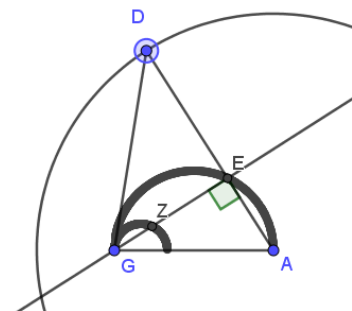


$$AG = BG = CG = \frac{1}{2} p\sqrt{2}.$$

1b. Dan ligt  $D$  loodrecht boven met mp van de omgeschreven cirkel van  $ABC$  en dat is punt  $G$ .  
 $DB$ ,  $DC$  en  $DA$  zijn dan beschrijvende van die kegel en dus even lang:  $p\sqrt{2}$ .  
 $DG$  loodrecht op  $BG$  dus:  $DG = \sqrt{BD^2 - BG^2} = \frac{1}{2} p\sqrt{6}$ . (Pyth. @)  
 En dan:  $\tan(\alpha) = \frac{DG}{AG} = \sqrt{3}$ . Dus:  $\alpha = 60^\circ$ . (@ 30-60-90 driehoek)

1c. Zo'n zwaartepunt ligt op  $EG$  dus in vlak  $GAD$ .  
 Als  $\alpha$  varieert, dan beschrijft  $D$  een cirkel en punt  $E$  ook: hoek  $GEA$  is recht en  $AG$  is vast. (@ Thales)  
 Het zwaartepunt ligt zo dat  $GZ : ZE = 1 : 2$ . (@)  
 Dus vanuit  $G$  wordt  $E$  vermenigvuldigd met  $\frac{1}{3}$ . (\*)  
 En dat gebeurt met de gehele (halve) cirkel waar  $E$  op ligt.  
 Gevolg: de punten  $Z$  liggen dan op een halve cirkel zoals in de figuur. Middellijn is  $\frac{1}{3} AG = \frac{1}{6} p\sqrt{2}$ .

Extra: figuur met de bedoelde cirkel (kleine halve cirkel)



Opmerking:

Hoe indertijd dat (\*) te beschrijven? Puntvermenigvuldiging zat nog niet in het programma, volgens de schrijver dezes.

B62-2

Van viervlak  $ABCD$  is het grondvlak  $ABC$  een gelijkzijdige driehoek.  $AD$  staat loodrecht op vlak  $ABC$ .  $P$  is het midden van  $AB$ ,  $Q$  is het midden van  $AC$ . De bol door  $A, P, Q$  en  $D$  snijdt  $BD$  in  $S$  en  $CD$  in  $R$ .

- Bewijs, dat  $PQ$  en  $RS$  evenwijdig zijn en dat de lijnen  $AD, PS$  en  $QR$  door één punt gaan.
- Bewijs, dat  $CS$  loodrecht staat op  $BD$ .
- Bewijs, dat de omgeschreven cirkels van de driehoeken  $BPS$  en  $CQR$  op één bol liggen, en construeer in een stereometrische figuur van het viervlak met middelpunt van deze bol.

2a. Getekend is  $\triangle ADB$  die congruent is met  $\triangle ADC$ .

(Congruentiegeval ZHZ @)

De bol heeft als doorsnede met het zijvlak een cirkel door  $ADP$  en dus door  $S$ . Duidelijk is dat  $S$  niet het midden van  $BP$  is:  $S$  ligt dichterbij  $B$  dan bij  $D$ . Idem:  $Q$  dichterbij  $A$  dan bij  $D$ .

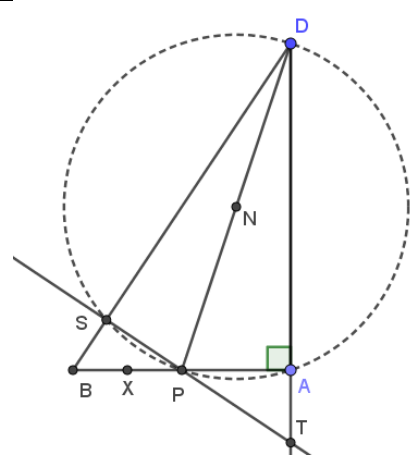
En:  $BS = CR$  dus

Dus  $SR \parallel BC$ . [1]

$P$  en  $Q$  middens dus  $PQ \parallel BC$ . [2]

Uit [1] en [2]:  $SR \parallel PQ$ .

Verder:  $PS$  is niet evenwijdig aan  $AD$  dus  $PS$  snijdt  $AD$  in een punt  $T$ . Uit symmetrie volgt dat  $QR$  ook door  $T$  gaat.



2b. Bij projectie op vlak  $ABD$  valt  $C$  op  $P$ :  $CP$  is hoogtelijn in de gelijkzijdige driehoek  $ABC$ . Dus  $CP$  loodrecht op  $ABD$  en dus loodrecht kruisend met  $BD$ . [3]

Zie de figuur: hoek  $DSP$  is recht. (Thales @)

Dus  $PS$  loodrecht op  $BD$ . [4]

Uit [3] en [4] volgt:  $BD$  loodrecht op vlak door  $PSC$ . Daarin ligt  $CS$  dus  $CS$  loodrecht op  $BD$ .

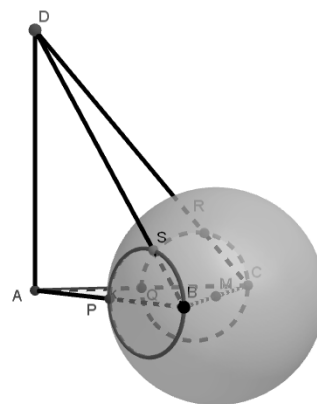
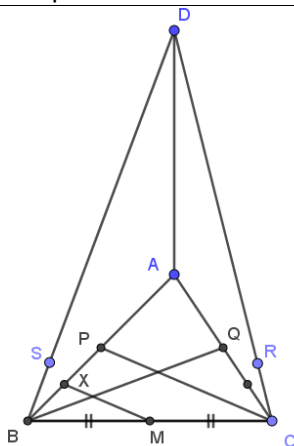
2c. Uit de figuur bij 2a: hoek  $BSP$  is recht. De omgeschreven cirkel heeft als mp. het midden  $X$  van  $BP$ . Het mp van de bol ligt op de lijn loodrecht op  $ABD$  in  $X$ .

Analoog voor  $CQR$ . Die lijnen liggen in het grondvlak.

Hun snijpunt is het mp van de bol en dat is het midden van  $BC$ ,  $M$ .

Dus  $M$  even ver van alle zes punten  $B, S, P, C, R$  en  $Q$  dus mp van de bol door die punten.

Extra: bol met mp  $M$  met  $3D$ -GeoGebra getekend.



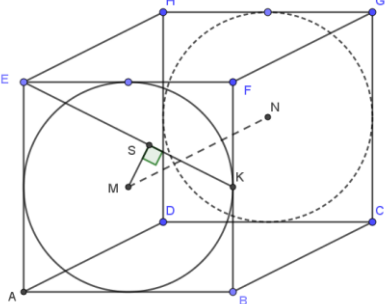
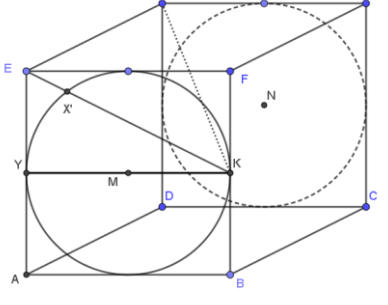
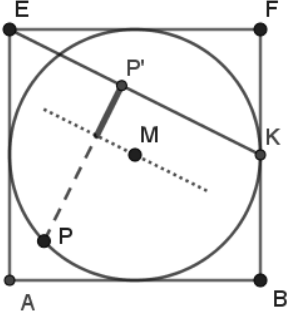
B62-3

In kubus  $ABCD.EFGH$  met ribbe  $p$  is een cilinder beschreven; grond- en bovenvlak van de cilinder zijn de ingeschreven cirkels van de vierkanten  $ABFE$  en  $DCGH$ . Het midden van  $BF$  is  $K$ . Het snijpunt van  $DG$  en  $CH$  is  $N$ .

a. Druk de afstand van  $HK$  en de as van de cilinder in  $p$  uit.

b. De lijn  $HK$  snijdt de cilinder, behalve in  $K$ , nog in het punt  $X$ . Bereken de verhouding  $HX : XK$ .

c.  $P$  is een willekeurig punt van de ingeschreven cirkel van  $ABFE$ . Bepaal  $P$  zo, dat de inhoud van viervlak  $EKNP$  maximaal is, en druk deze maximale inhoud in  $p$  uit.

<p>3a. Projectie van <math>HK</math> op voorvlak is <math>EK</math>.  <math>MN</math> is de as van de cilinder en loodrecht op het voorvlak. Dus het getekende lijnstuk <math>MS</math> loodrecht op <math>EK</math> staat ook loodrecht op <math>EH</math> dus op vlak <math>EHK</math> en bijgevolg loodrecht op <math>HK</math>.  <math>MS</math> is de gevraagde afstand.  <math>\Delta KSM</math> is gelijkvormig met <math>\Delta EFK</math> (@) dus:  <math>\frac{MS}{MK} = \frac{KF}{KE}</math> en er volgt: <math>MS = \frac{1}{10} p\sqrt{5}</math>.</p>	
<p>3b. Projectie van <math>HK</math> op voorvlak is <math>EK</math> en van <math>X</math> is dat <math>X'</math>, gelegen op de cirkel in het voorvlak!  Zie figuur. Er geldt: <math>HX : XK = EX' : X'K</math>.  Nu met macht van <math>E</math> t.o.v de cirkel (@):  <math>EX' * EK = EY^2</math>.  <math>EX' = \frac{\frac{1}{2}p^2}{\frac{1}{2}p\sqrt{5}} = \frac{1}{10} p\sqrt{5}</math>. Dus: <math>X'K = \frac{4}{10} p\sqrt{5}</math>.  En er volgt: <math>HX : XK = EX' : X'K = 1 : 4</math>.</p>	
<p>3c. Inhoud viervlak = <math>\frac{1}{3} MN * opp(\Delta EKP)</math>. (@)  <math>MN</math> loodrecht op voorvlak dus bij variatie van <math>P</math> geen verandering.  Oppervlakte driehoek als <math>\frac{1}{2} PP' * EK</math> maximaal is.  <math>EK</math> is invariant dus <math>PP'</math> moet maximaal zijn. <math>SP'</math> (dik lijntje) is afstand <math>M</math> tot <math>EK</math> dus invariant.  <math>PS</math> maximaal als <math>S</math> op <math>M</math> valt. <math>P</math> dus zo dat <math>PP'</math> door <math>M</math>.  En <math>PP'</math> maximaal: <math>\frac{1}{2}p + \frac{1}{10} p\sqrt{5}</math>. (**)  Inhoud viervlak = <math>\frac{1}{3} * p * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} p\sqrt{5} * (\frac{1}{2}p + \frac{1}{10} p\sqrt{5})</math>  Ofwel: <math>\frac{1}{24} p^3 (1 + \sqrt{5})</math>.</p>	

(\*) Maximaliseringsvraagstuk. Zat blijkbaar ook in het programma bij stereometrie. Dat past eerder bij algebra of analytische meetkunde.

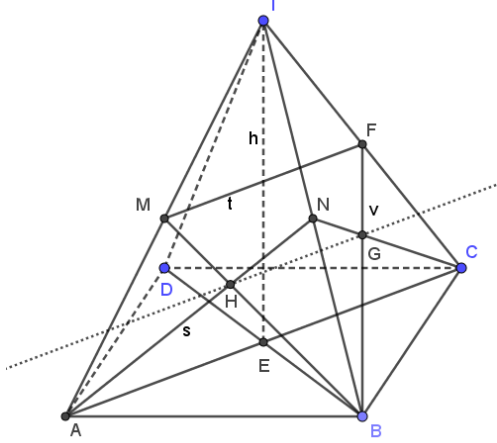
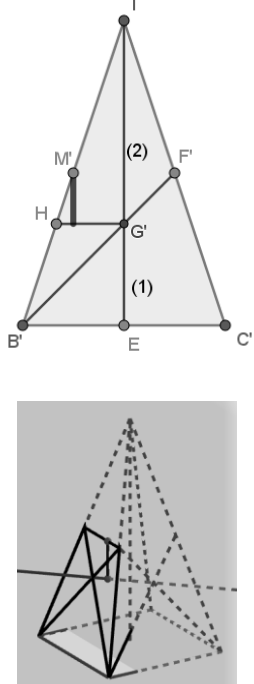
(\*\*) Het resultaat van 3a is hier nodig.

### Jaar 1963 uitwerkingen

B63-1.

Van een regelmatige vierzijdige piramide  $T$ .  $ABCD$  is  $M$  het midden van de ribbe  $TA$  en  $N$  het midden van de ribbe  $TB$ . De hoogte van de piramide is  $h$ .

- Construeer in een stereometrische figuur van de piramide de lijn  $x$ , die  $BM$  en  $CN$  snijdt en loodrecht staat op het vlak  $TBD$ .
- Druk de afstand van de lijn  $MN$  en  $x$  in  $h$  uit.

<p>1a.            Regelmatige piramide: <math>T</math> loodrecht boven <math>E</math>.  <math>ABCD</math> is een vierkant.            Dus lijn <math>AC</math> staat loodrecht op vlak <math>TBD</math>.            En lijnen evenwijdig aan <math>AC</math> dus ook. (@)            Dan:            vlak <math>ACN</math> (lijn <math>s</math> extra) loodrecht op <math>TBD</math>.  <math>F</math> midden van <math>CT</math>: <math>MF \parallel AC</math>.            Dus vlak <math>BMF</math> loodrecht op <math>TBD</math>. (extra <math>t</math> en <math>v</math>).            Dat geeft snijpunten <math>G</math> en <math>H</math>.            De twee vlakken staan loodrecht op <math>TBD</math> en dus hun snijlijn ook (@).            Blijkbaar is de lijn <math>GH</math> de gevraagde lijn <math>x</math>.            Gestippeld in de figuur.</p>	
<p>1b.            Maak een doorsnede <math>TE \parallel BC</math>. Zie figuur.            Dan volgt: <math>N</math> op <math>M</math> (<math>M'</math>), <math>B</math> op <math>A</math> (<math>B'</math>), <math>F'</math>, <math>G'</math>.  <math>B'F'</math> en <math>TE</math> zijn zwaartelijnen dus <math>G'</math> zw.punt.            Projectie van lijn <math>x</math> getekend: lijn <math>HG'</math>. (*)            Gevraagde afstand is dik zwart: <math>d</math>.            Dat lijnstuk staat loodrecht op <math>MN</math> én vlak van <math>x \parallel ABCD</math>. Het is dus de projectie van het afstandslinestuk.  <math>TG' = \frac{2}{3}h</math>; <math>TH = \frac{2}{3}TB'</math>; <math>TM' = \frac{1}{2}TB'</math>.(@)            Dus: <math>M'H = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)TB' = \frac{1}{6}TB'</math>.            En dan: <math>d: TG' = M'H: TH</math>.            Dus: <math>d = \frac{1}{6}h</math>.             Met <i>3D-GeoGebra</i> is het vlak gemaakt waarin het afstandslinestuk ligt.</p>	

(\*) Zonder lijn  $x$  is dit niet te doen, dus 1a moet gelukt zijn.

B63-2.

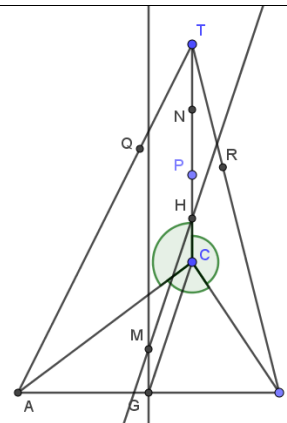
Van een driezijdige piramide  $T.ABC$  staan de ribben  $AC$ ,  $BC$  en  $TC$  twee aan twee loodrecht op elkaar.  $P$  is een willekeurig punt van  $TC$ , gelegen tussen  $T$  en  $C$ .  $N$  is het middelpunt van de bol met  $TP$  als middellijn. Deze bol snijdt  $TA$  behalve in  $T$  nog in  $Q$ ; de bol snijdt  $TB$  behalve  $T$  nog in  $R$ .

a. Construeer in een stereometrische figuur van de piramide het middelpunt  $M$  van de bol door de punten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $P$ .

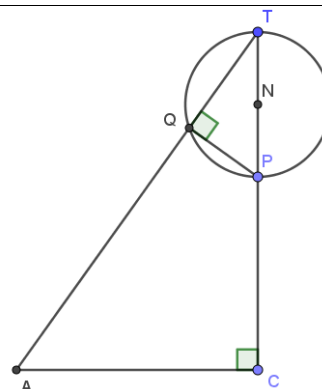
b. Bewijs, dat  $MN$  loodrecht staat op het vlak  $PQR$ .

c. Gegeven is bovendien,  $AC = 8$ ,  $BC = 6$ ,  $TC = 20$  en dat de oppervlakte van bol  $M$  twee maal zo groot is als de oppervlakte van bol  $N$ . Bereken  $TP$ .

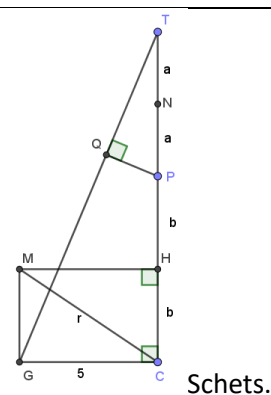
2a. De gemarkeerde hoeken zijn allemaal recht. De bol gaat door  $ABC$ . Het mp van de omgeschreven cirkel van  $\Delta ABC$  is  $G$ , midden van  $AB$ , want  $\Delta ABC$  is rechthoekig.  $M$  dus op de lijn loodrecht op  $ABC$  door  $G$ : die lijn is evenwijdig aan  $TC$ . [1]  
(alle punten hierop even ver van  $A$ ,  $B$  en  $C$ ).  
Bol door  $P$  en  $C$  dus  $M$  op middelloodvlak van  $PC$ .  $H$  is midden van  $PC$ .  
Loodlijn in  $H$  op  $PC$  is lijn  $// GC$ . [2]  
(alle punten hierop even ver van  $P$  en  $C$ ).  
 $M$  is het snijpunt van [1] en [2].



2b. Kijk naar vlak  $ACT$ .  
Bol  $N$  snijdt cirkel uit door  $T$ ,  $P$  en  $Q$ .  
 $TP$  middellijn dus hoek  $PQT$  recht.  
Gevolg:  $ACPQ$  is een koordenvierhoek (@).  
Cirkel door  $ACP$  (en op bol  $M$ ) dus ook door  $Q$ .  
Analoog voor  $BCPR$ .  
Dus bol  $M$  door  $ABCP$  én  $Q$  én  $R$ .  
Loodlijn uit  $M$  op vlak  $PQR$  door mp  $S$  van omgeschreven cirkel van  $\Delta PQR$ .  
Loodlijn uit  $N$  op vlak  $PQR$  ook door  $S$ .  
Dus:  $MS$  en  $NS$  liggen in elkaars verlengde.  
Gevolg:  $MN$  loodrecht op vlak  $PQR$ .



2c.  $AB = 10$  (Pyth. @) Dus:  $BG = 5 = CG$ .  
Noem de straal van bol  $M$  even  $r$ .  
Dan volgt:  $r^2 = MG^2 + 25$ . Dus:  $MG = HC = \sqrt{r^2 - 25}$ .  
En daarmee:  
 $NP = \frac{1}{2}(TC - PC) = 10 - \sqrt{r^2 - 25}$ .  
Opp bol  $M = 4\pi r^2$ . Opp bol  $N = 4\pi NP^2$ . (@)  
Dus:  $r^2 = 2(10 - \sqrt{r^2 - 25})^2$ .  
Ofwel:  $r^2 + 20\sqrt{2}r - 250 = 0$ .  
 $r = \frac{1}{2}(-20\sqrt{2} + \sqrt{800 + 1000}) = 5\sqrt{2}$ .  
Dan:  $HC = 5$ . En  $TP = TC - 2 * HC = 10$ .



B63-3.

Gegeven is een viervlak  $ABCD$ . De projectie van  $D$  op het vlak  $ABC$  ligt op de ribbe  $AC$ ;  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$  en  $\angle CAD = 60^\circ$ . Op de ribbe  $CD$  ligt een punt  $P$  zo, dat het vlak  $ABP$  de hoek gevormd door de zijvlakken  $ABC$  en  $ABD$  middendoor deelt.

a. Bereken de verhouding van de inhoud van de viervlakken  $ABCP$  en  $ABDP$ .

b. Bewijs, dat het vlak door  $BD$  en het midden  $E$  van  $AC$  loodrecht staat op het vlak  $ABP$ .

c. Gegeven is bovendien, dat  $AD = 4$  en  $AB = 3$ .

Bereken de cosinus van de hoek van de lijnen  $AC$  en  $BD$ .

3a. Vlak  $ABP$  is een bissectrice-vlak. Dat wordt gevormd door lijn  $AB$  en  $XP$  waarbij  $XP$  loodrecht op  $AB$  staat. Omdat  $\angle BAC = 90^\circ$  volgt vlak  $CAD$  loodrecht op  $AB$  staat dus dat punt  $X$  is punt  $A$ . Dus  $AP$  is een bissectrice in  $\triangle CAD$ .

In de figuur is die driehoek getekend.

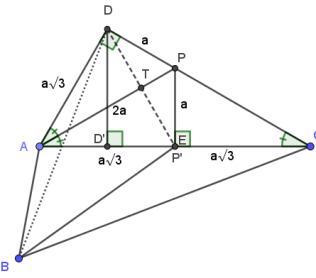
$PD$  loodrecht op  $\triangle ABD$ .

$$\text{Inh}(P.ABD) = d = \frac{1}{3} DP * O(\triangle ABD). (@)$$

$PP'$  loodrecht op  $\triangle ABC$ .

$$\text{Inh}(P.ABC) = c = \frac{1}{3} PP' * O(\triangle ABC).$$

$$\frac{c}{d} = \frac{\frac{1}{6} PP' * AC * AB}{\frac{1}{6} DP * AD * AB} = \frac{a * 2a\sqrt{3}}{a * a\sqrt{3}} = \frac{2}{1}.$$



30-60-90 driehoeken in  $ACD$ .

3b.  $P'$  is punt  $E$ .

Vlak  $ABP$  snijdt vlak  $CAD$  volgens lijn  $AP$ .

Vlak  $BDP'$  (=BDE) snijdt  $CAD$  volgens lijn  $DP'$ . Zie de figuur bij 3a.

$ADPP'$  is een rechte vlieger dus de diagonalen snijden elkaar loodrecht in een punt  $T$ . (@)

$BP' = BD$  want:  $\triangle ABP' \cong \triangle ABD$  (ZHZ). (@)

Dus:  $BT$  is een hoogtelijn in  $\triangle BDP'$  en  $BT$  is de snijlijn van de twee vlakken.

Gevolg:  $DP'$  in  $BDP'$  staat loodrecht op twee snijdende lijnen  $AP$  en  $BT$  in vlak  $ABP$  gelegen. De vlakken  $BDP'$  en  $ABP$  staan dan loodrecht op elkaar. (@)

3c.  $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5$ . (Pyth. @)

$CD = 4\sqrt{3}$ .

$BS \parallel AC$  en  $AB \parallel CS$ .  $ABSC$  is een rechthoek.

Hoek  $\theta$  tussen  $BD$  en  $AC$  is de hoek tussen  $BD$  en  $BS$ .

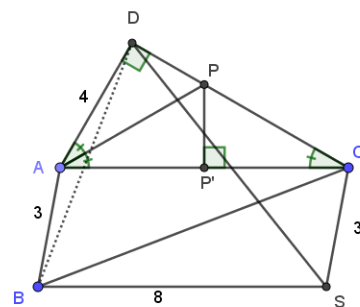
$BS = 8$ ;  $DS = \sqrt{CD^2 + CS^2} = \sqrt{57}$ .

Nu met cos-regel in  $\triangle SBD$ . (@)

$$57 = 5^2 + 8^2 - 2 * 5 * 8 * \cos(\theta).$$

$$\cos(\theta) = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}.$$

NB: Niet nodig maar met tabel:  $\theta \approx 66^\circ 25'$ .

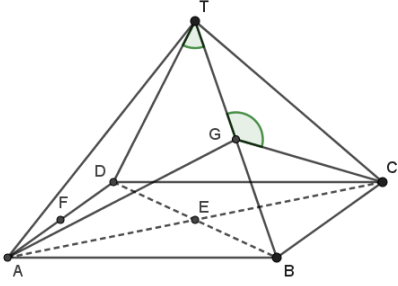
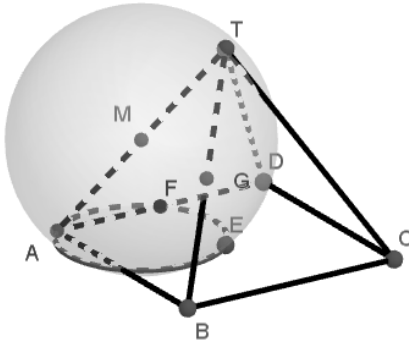


## Jaar 1964 uitwerkingen

B64-1

Van een regelmatige vierzijdige piramide  $T$ .  $ABCD$  zijn alle ribben  $a$ .  $E$  is het snijpunt van  $AC$  en  $BD$ ;  $F$  is het midden van  $AD$  en  $G$  het midden van  $BT$ .

- Druk de afstand van de lijnen  $CG$  en  $DT$  in  $a$  uit.
- Bereken de hoek, die  $BC$  met het vlak  $ACG$  maakt.
- Druk de straal van de bol, die door  $A, E, F$  en  $G$  gaat, in  $a$  uit.

<p>1a. <math>BD = a\sqrt{2}</math>. Dus <math>BDT</math> is gelijkbenige rechthoekige driehoek. Dus hoek <math>BDT</math> is recht. [1] Driehoek <math>BCT</math> is gelijkzijdig en <math>G</math> het midden van <math>BT</math>. Dus <math>CG</math> zwaarte- én hoogtelijn. Gevolg: hoek <math>CGT</math> is recht. [2] Uit [1] en [2] volgt: <math>GT</math> is een lijnstuk loodrecht op <math>CG</math> én <math>DT</math>. Dus de afstand is: <math>\frac{1}{2}a</math>.</p>	
<p>1b. Omdat <math>BG</math> loodrecht op <math>CG</math> én <math>AG</math> staat, is de projectie van <math>B</math> op vlak <math>AGC</math> punt <math>G</math>. Dus de gevraagde hoek = <math>\angle BCG = 30^\circ</math>. (@)</p>	
<p>1c. Die bol geeft snijcirkel met grondvlak door <math>A, E, F</math>. <math>\triangle AEF</math> is rechthoekig dus mp bol op loodlijn door midden van <math>AE</math>. De bol geeft snijcirkel met <math>ACG</math> door <math>A, E, G</math>. Die driehoek is rechthoekig in <math>E</math> dus mp bol op loodlijn <math>m</math> door midden van <math>AG</math>. Uit 1a volgt: <math>m</math> ligt in het voorvlak, <math>m \parallel BT</math>. Gevolg: mp bol is midden <math>AT</math>, punt <math>M</math>. Straal <math>MT = \frac{1}{2}a</math>.  Extra: de bol met <i>3D-GeoGebra</i>.</p>	

B64-2

Van een scheef driezijdig prisma is het grondvlak  $ABC$  een gelijkzijdige driehoek met zijde  $2a$ . De opstaande ribben  $AD, BE$  en  $CF$  zijn  $a\sqrt{3}$ .  $M$  is het midden van  $DE$ . De projectie van  $M$  op het grondvlak valt samen met het zwaartepunt  $Z$  van driehoek  $ABC$ .

- Bewijs, dat vlak  $ABF$  het deelvlak is van de tweevlakshoek gevormd door het grondvlak  $ABC$  en het zijvlak  $ABED$ .
- Druk de inhoud van het viervlak  $ABFM$  in  $a$  uit.
- Een kegel met top  $M$  en as  $MZ$  raakt vlak  $ABED$ . Bewijs, dat de doorsnede van het prisma met een raakvlak door  $C$  aan deze kegel een rechthoekig trapezium is.

2a. Zie de figuur.

$S$  midden van  $AB$ .  $CS$  zwaarte- en hoogtelijn in  $\triangle ABC$ , dus  $CS$  loodrecht op  $AB$ .

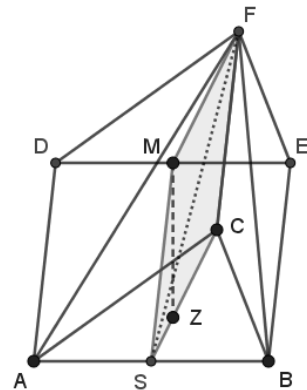
$MZ$  loodrecht op  $ABC$  (gegeven), dus vlak  $SCFM$  is het loodvlak op  $AB$  in  $S$ .

De standhoek van  $ABC$  en  $ABED$  is dus hoek  $CSM$ . (@)

Er geldt:  $SC = CF = FM = MS = a\sqrt{3}$ .

dus:  $SCFM$  is een ruit (@) en diagonaal  $SF$  dan de bissectrice van hoek  $CSM$ .

Gevolg: vlak  $ABF$  met  $SF$  is het deelvlak van de hoek tussen  $ABC$  en  $ABED$ .



2b. Zie de figuur, een zijaanzicht.

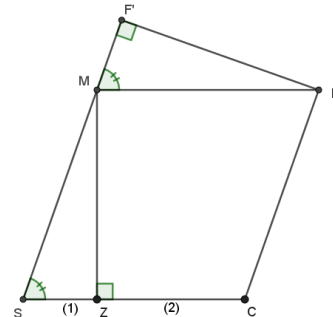
Viervlak  $ABFM$  heeft grondvlak  $ABM$  en hoogte  $FF'$ .

$$\text{Opp}(\triangle ABM) = \frac{1}{2} MS * AB = a^2\sqrt{3}.$$

$$\triangle SZM \cong \triangle MF'F \text{ (ZHH90 @)}$$

$$\text{Dus } FF' = \sqrt{MF^2 - MF'^2} = \sqrt{MS^2 - SZ^2} = \frac{2}{3} a\sqrt{6}.$$

$$\text{Inh}(ABMF) = \frac{1}{3} FF' * \text{opp}(\triangle ABM) = \frac{2}{3} a^3\sqrt{2}. \text{ (@)}$$



2c.  $MS$  is een beschrijvende van de kegel. Hoeft niet bewezen te worden want gegeven is dat  $ABED$  een raakvlak is. De grondcirkel is de ingeschreven cirkel van driehoek  $ABC$ .  $Z$  is zwaartepunt maar ook het mp. (@) Zie de figuur.

Het raakvlak door  $C$  gaat door  $M$  en raakt aan die cirkel volgens  $CB$  in  $G$ . Er zijn overigens twee raakvlakken.

$G$  is het midden van  $BC$ . (@)

Doorsnede is vlak  $CBMH$  met  $MH // BC$ .

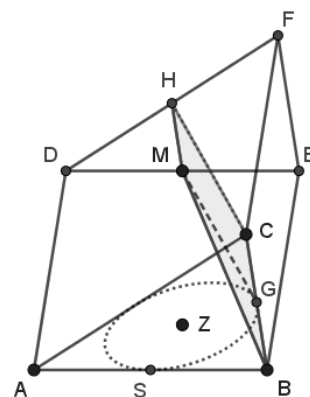
Dat is een trapezium:  $MH // BC$  en  $MH = \frac{1}{2} BC$ .

$MG$  staat loodrecht op  $BC$  te  $G$ , want vlak  $AGM$  is een loodvlak op  $BC$ :  $MZ$  daarin en  $AG$  is loodrecht.

$HC // MG$  dus  $GMHC$  is een rechthoek.

Gevolg: hoek  $GCH$  is recht.

De doorsnede is dus een rechthoekig trapezium.



De grondcirkel is een schets.

B64-3

a. Van een kubus  $ABCD.EFGH$  is de ribbe  $a$ .  $S$  is het snijpunt van  $BG$  en  $CF$ .

Construeer in een stereometrische figuur van de kubus (waarbij  $ABFE$  wordt voorgesteld door een vierkant met zijde 8 cm) de lijnen door  $S$ , die loodrecht op  $CE$  staan en die  $AD$  op een afstand  $\frac{1}{2}a$  kruisen.

b. In een kubus  $ABCD.EFGH$  is  $K$  een willekeurig punt van het lijnstuk  $AH$ .  $P$  is de projectie van  $F$  op  $CK$ . Wat is de verzameling van de punten  $P$ , als  $K$  het lijnstuk  $AH$  doorloopt?

3a. Zie de figuur.<sup>10</sup>

Lijn door  $S$  loodrecht op  $CE$  ligt in vlak  $BDG$ . [1]

Kruisen op afstand  $\frac{1}{2}a$  betekent raken aan een cilinder met as  $AD$  en straal  $\frac{1}{2}a$ .

Cirkel met mp  $A$  en straal  $AN = AK = \frac{1}{2}a$  is de grondcirkel. Constructie (@)

Twee raaklijnen uit  $T$ , midden van  $BF$ . (@)

Vlak door  $TKMO$  raakt aan cilinder. [2]

$L$  is snijpunt van een raaklijn met  $AB$ .

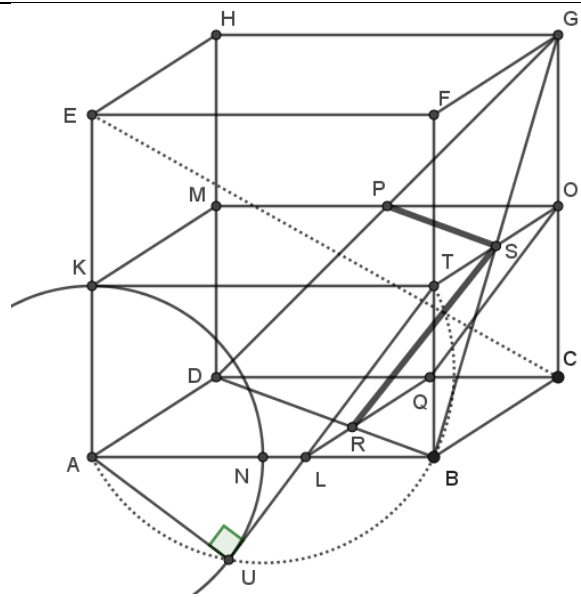
Vlak door  $TLQO$  raakt ook aan cilinder. [3]

Snijlijn van [1] met [2] geeft  $PS$ .

Snijlijn van [1] met [3] geeft  $SR$ .

Dat zijn de dikke lijnen: de gevraagde lijnen, althans een deel daarvan.

NB:  $TU$  middels cirkel met middellijn  $AT$  in het voorvlak. Figuur wordt onoverzichtelijk!

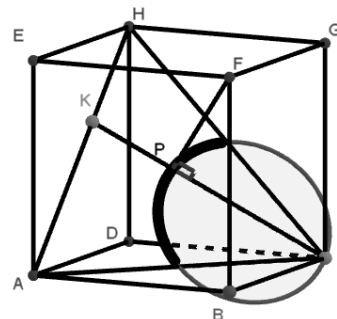
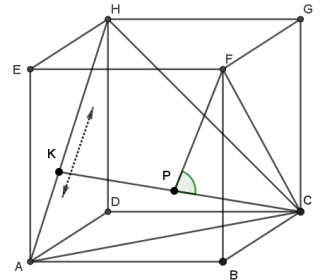


3b. Hoek  $CPF$  is recht. Er gaat dus een cirkel door  $C$ ,  $F$  en  $P$  met  $CF$  als middellijn.

De gemarkeerde hoek is recht! (@ Thales)

Als  $K$  varieert, dan blijft  $CF$  constant dus die cirkel wentelt om  $CF$ . Er ontstaat een bol en die heeft met vlak  $ACH$  als doorsnede een cirkel. Die cirkel gaat door het midden van  $AC$  en van  $CH$  en  $C$ . Daarop liggen de punten  $P$ , wel tussen die middens want binnen de kubus!

Extra: doorsnijdingscirkel; binnen de kubus een dikke cirkelboog waarop  $P$  ligt.



<sup>10</sup> Die 8 cm zijn niet echt relevant maar geven op papier een helder beeld van alle lijnen en geen gepruts.

## Jaar 1965 uitwerkingen

B65-1

Van een recht parallellepipedum  $ABCD.EFGH$  is het grondvlak  $ABCD$  een vierkant;  $AB = 4$  en  $AE = 8$ . Op de ribbe  $AB$  ligt punt  $P$ , op de ribbe  $BC$  ligt punt  $Q$  en op de ribbe  $HE$  ligt punt  $R$ ;  $AP = BQ = HR = 3$ . Het vlak  $\alpha$  gaat door de lijn  $AQ$  en is evenwijdig aan de lijn  $BR$ .  $S$  is het snijpunt van  $\alpha$  met de ribbe  $CG$ .

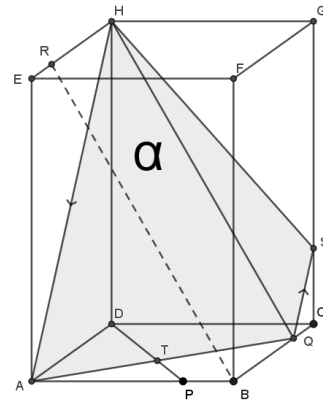
- Construeer in een stereometrische figuur van het parallellepipedum de doorsnede van dit lichaam met  $\alpha$  en bereken de lengte van  $CS$ .
- Bewijs, dat de lijnen  $AQ$  en  $HP$  elkaar loodrecht kruisen.
- Bereken de tangens van de hoek, die  $\alpha$  met vlak  $ABCD$  maakt.

1a. De lijn van  $Q$  naar  $H$  is evenwijdig aan  $BR$ :  
Het is een evenwijdig verschuiving richting  $B$  naar  $Q$   
en de afstand is gelijk:  
 $BQHR$  is feitelijk een parallellogram.  
 $SQ \parallel AH$  en daarmee is het vlak gevonden.

$$BC = 4; QC = 1.$$

$QS \parallel BG$  dus er volgt:

$$\frac{QS}{BG} = \frac{CS}{CG} \text{ dus: } CS = 2.$$



1b. Projectie van  $HP$  op vlak  $ABC$  is  $DP$ .

$DP$  staat loodrecht op  $AQ$ , want

$$\tan(\angle PDA) = \tan(\angle QAB) = \frac{3}{4}. \text{ Dus die twee hoeken zijn gelijk.}$$

En dan:  $\triangle DAP \cong \triangle ATP$ . (ZHH90 @) Dus: te  $T$  een rechte hoek. Zie de figuur bij 1a.

Verder:  $HD$  loodrecht op vlak  $ABC$ .

Gevolg: vlak  $HDP$  staat loodrecht op  $AQ$  en  $HP$  in dat vlak gelegen.(@)

$HP$  kruist dus  $AQ$  loodrecht.

1c. Hoek  $HTD$  de gevraagde hoek  $\theta$  want die hoek is de standhoek van het grondvlak  $ABCD$  en vlak  $\alpha$ .

$HT$  en  $DT$  loodrecht op  $AG$ .

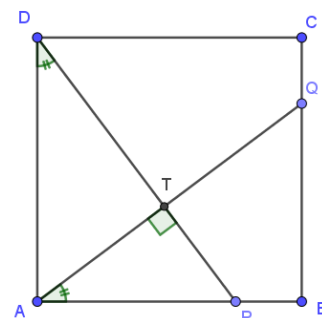
Zie de figuur hiernaast.

$$AP = 3, AD = 4, DP = 5 \text{ (Pyth. @)}$$

$$\text{Er volgt: } \frac{DT}{AD} = \frac{AD}{DP} = \cos(\angle ADT) = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Dus: } DT = \frac{16}{5}.$$

$$\text{En: } \tan(\theta) = \frac{HD}{DT} = \frac{5}{2}.$$



B65-2

Van een driezijdige piramide  $T.ABC$  is het grondvlak  $ABC$  een gelijkzijdige driehoek. De ribbe  $TA$  staat loodrecht op het grondvlak;  $AB = 4p$  en  $TA = 6p$ .  $D$  is het midden van ribbe  $AB$ . Een cilindervlak, waarvan de as door  $A$  gaat, heeft de lijn  $BC$  tot beschrijvende.

a. Het cilindervlak snijdt  $TBC$ , behalve volgens  $BC$ , ook nog volgens een lijn, die  $TB$  in  $P$  en  $TC$  in  $Q$  snijdt. Het raakvlak door  $PQ$  aan het cilindervlak snijdt de ribbe  $TA$  in  $R$ .

Druk de inhoud van het viervlak  $TPQR$  in  $p$  uit.

b. Het raakvlak door  $BC$  aan het cilindervlak snijdt de omschreven bol van het viervlak  $TACD$  volgens een cirkel. Druk de straal van deze cirkel in  $p$  uit.

2a. Met  $E$  midden van  $BC$  ziet de piramide met doorsnede er ongeveer zo uit: zie figuur 1.  
 $AE$  loodrecht op  $BC$ .

$AE$ ,  $AS$  en  $AG$  zijn stralen van een cilindercirkel.  
 Zie tweede figuur:

$$AE = 2p\sqrt{3}; TE = 4p\sqrt{3} \text{ (Pyth @)}$$

Dus te  $E$  een hoek van  $60$  gr.

$S$  blijkbaar het midden van  $TE$ .

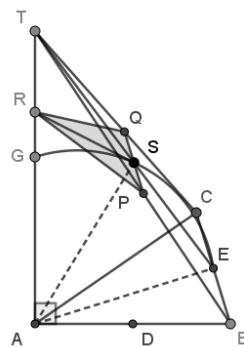
$$\text{Gevolg: } PQ = \frac{1}{2}BC = 2p.$$

$$\text{Verder: } AS = R'S\sqrt{3}, \text{ dus: } R'S = 2p.$$

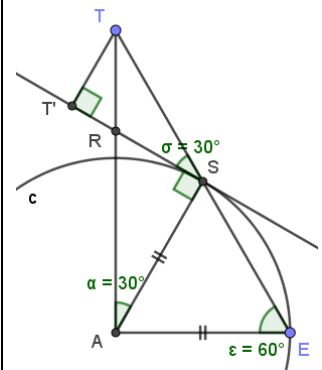
$$\text{En: } TT' = \frac{1}{2}TS = p\sqrt{3}.$$

$$\text{En: } \text{Inh}(T.PQR) = \frac{1}{3}TT' * \text{opp}(PQR).$$

$$\text{Inhoud} = \frac{1}{3} * p\sqrt{3} * \frac{1}{2} * 4p^2 = \frac{2}{3}p^3\sqrt{3}.$$



Figuur 1



Figuur 2

2b.

Bol door  $A, C, D$ : doorsnede is een cirkel.

$M_p$  is het midden van  $AC$  en  $m_p$  bol op de loodlijn in dit punt op grondvlak.

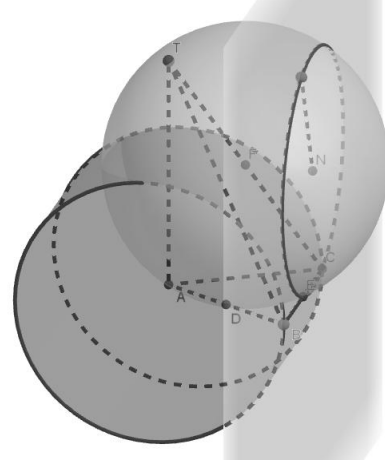
Analoog voor  $TAC$ . Samen geeft dit:  $m_p$  bol is punt  $Q$ . In zijaanzicht, fig 2, valt  $Q$  op  $S$  en het raakvlak is een lijn loodrecht op  $E$ . Afstand van  $Q$  tot het

$$\text{raakvlak} = d = \frac{1}{2}AE = p\sqrt{3}.$$

$$\text{Straal bol} = QT = \frac{1}{2}CT = \frac{1}{2}p\sqrt{52}. \text{ (Pyth @)}$$

$$\text{Straal cirkel} = \sqrt{QT^2 - d^2} = p\sqrt{10}.$$

Extra: piramide, cilinder, bol, raakvlak en doorsnijdingscirkel met *3D-GeoGebra*.

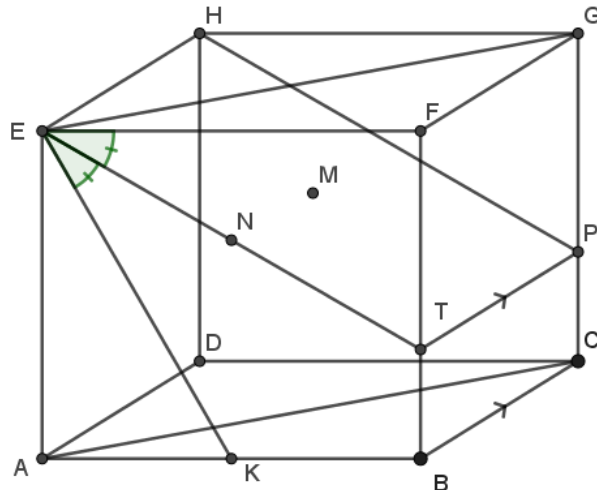


B65-3

Van een recht parallellepipedum  $ABCD.EFGH$  is  $ABCD$  een vierkant;  $AB = 2p$  en  $AE = p\sqrt{3}$ .  $K$  is het midden van de ribbe  $AB$ . Gegeven is een stereometrische figuur van dit parallellepipedum, waarin  $ABFE$  wordt voorgesteld door een rechthoek.

- Construeer in deze stereometrische figuur het punt  $P$ , dat op de ribbe  $CG$  ligt en dat gelijke afstand heeft tot de lijnen  $EF$ ,  $EH$  en  $EK$ .
- Druk de onder a bedoelde afstand in  $p$  uit.
- Bewijs, dat de punten  $E, F, H, K$  en  $P$  op één bol liggen.

3a. Punten op gelijke afstand van  $EF$  en  $EH$  liggen in de bissectricevlakken van die lijnstukken. Nu dus één vlak:  $ACGE$ . Dat geldt ook voor  $EK$  en  $EF$ : constructie in voorvlak van een bissectrice:  $ET$ . Dat geeft bissectricevlak  $ETPH$ . Punt op  $CG$  is het gevraagde punt:  $P$ .



3b. Vlak  $BCGF$  staat loodrecht op  $EF$  dus  $PF$  is de gevraagde afstand.

$AK = p$ . Dan  $EK = 2p$  (Pyth @) dus  $\triangle EAK$  is een 30-60-90 driehoek (@) en de gemarkeerde hoeken bij  $E$  (zie 3a) zijn 30 graden. (\*)

Gevolg:  $ET = \frac{EF}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} p\sqrt{3}$ . Met  $TP$  bekend volgt nu:  $PF = \sqrt{\frac{4}{3}p^2 + 4p^2} = \frac{4}{3} p\sqrt{3}$ .

3c. Door  $E, F, K$  gaat een cirkel.  $M_p$  is  $N$ . Op de loodlijn te  $N$  op voorvlak ligt het  $m_p$   $M$  van de bol. Dus  $M$  in vlak  $ETPH$ . (1)

Bol ook door  $E, H$  en  $P$ :  $M$  op loodlijn door midden van  $EP$ . (@ Thales)

Dus  $M$  is het midden van  $EP$ . (2)

Uit (1) en 3a volgt:  $ME = MF = MK$  (en met (2)) =  $MP = MH =$  straal bol.

Dus  $E, F, H, K$  en  $P$  op één bol met  $m_p$   $M$ .

Extra en niet gevraagd: straal =  $\frac{1}{3} p\sqrt{21}$ .

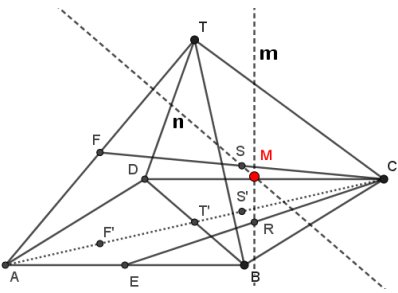
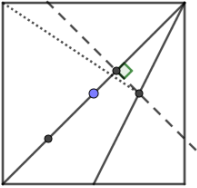
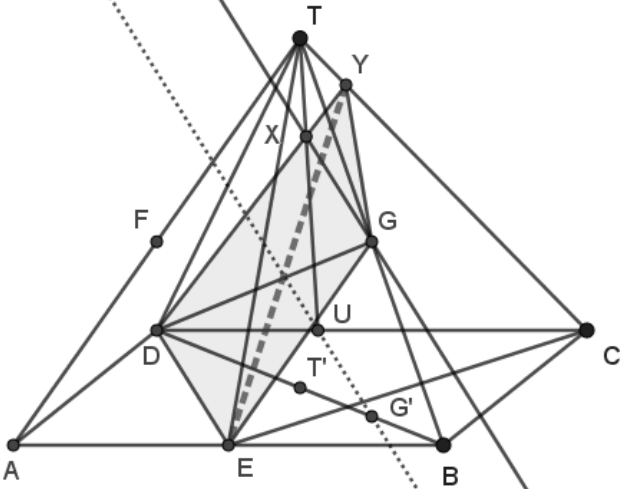
(\*) Onderdeel 3a moet dus gelukt zijn.

## Jaar 1966 uitwerkingen

B66-1

Van een regelmatige vierzijdige piramide  $T.ABCD$  is  $AB = AT = p$ . Het midden van  $AB$  is  $E$ , het midden van  $AT$  is  $F$  en het midden van  $BT$  is  $G$ .

- Bewijs, dat de punten  $B, C, E, F$  en  $T$  op één bol liggen.
- Construeer in een stereometrische figuur van de piramide de lijn door  $E$ , die  $CT$  en  $DG$  snijdt.
- Druk de afstand van  $AC$  en  $EF$  in  $p$  uit.

<p>1a. Zie de figuur links.          Boldoorsnede met vlak <math>CFT</math> is een cirkel. Mp daarvan is <math>S</math>. Mp <math>M</math> van de bol op loodlijn te <math>S</math> op <math>CFT</math>: <math>n</math>.          Boldoorsnede met vlak <math>BEC</math> is ook een cirkel. Mp daarvan is <math>R</math>. Mp <math>M</math> op loodlijn te <math>R</math> op <math>BEC</math>: <math>m</math>.  <math>F'</math>, <math>T'</math> en <math>S'</math> zijn projecties.          In het vierkant is het loodvlak waarin <math>n</math> ligt getekend: de streepjeslijn.          Ook is getekend het loodvlak waarin <math>m</math> ligt: de stippellijn. Die snijden <math>m</math> en <math>n</math> ook: dat geeft punt <math>M</math>. Dus:          De punten... op een bol met mp <math>M</math>.</p>	 <p>Hoek <math>FTC</math> is recht.  <math>S</math> midden van <math>CF</math>.          Hoek <math>DRC</math> is recht.  <math>R</math> midden van <math>EC</math>.</p>	
<p>1b. Lijn ligt in vlak <math>ECT</math> en vlak <math>DEG</math>.          Nu doorsnede van <math>DEG</math> met piramide:  <math>G'</math> projectie van <math>G</math>: <math>GG' // TT'</math>.          Door <math>G'</math> lijn evenwijdig aan <math>DE</math> (stippels): geeft snijpunt met <math>CD</math>: <math>U</math>.  <math>TU</math> snijdt lijn door <math>G</math> evenwijdig aan stippellijn in <math>X</math>.  <math>GX</math>, <math>G'U</math>, <math>DE</math> allen evenwijdig dus <math>DE</math> en <math>GX</math> in één vlak.          Nu <math>DX</math> snijden met <math>CT</math>: vlak <math>DEGY</math> is dan de doorsnede van <math>DEG</math> met piramide.  <math>EY</math> snijdt <math>DG</math> dus dat is de gevraagde lijn: dikke stippellijn.</p>		
<p>1c. Afstand van <math>AC</math> tot <math>BT</math> is <math>GT'</math> want <math>GT'</math> loodrecht op <math>BT</math> (midden van <math>BD</math> naar midden van <math>BT</math>) en <math>GT'</math> loodrecht op <math>AC</math> (<math>BDT</math> loodvlak op <math>AC</math>).          Die afstand <math>= \frac{1}{2}p = GT'</math> want die is gelijk aan de helft van <math>DT</math>.          Vlak <math>EFF'</math> (zie 1a) is evenwijdig aan vlak <math>BTT'</math> maar met factor <math>\frac{1}{2}</math> vermenigvuldigd vanuit <math>A</math>.          Dus de afstand is ook gehalveerd dus <math>\frac{1}{2}GT' = \frac{1}{4}p</math>.</p>		

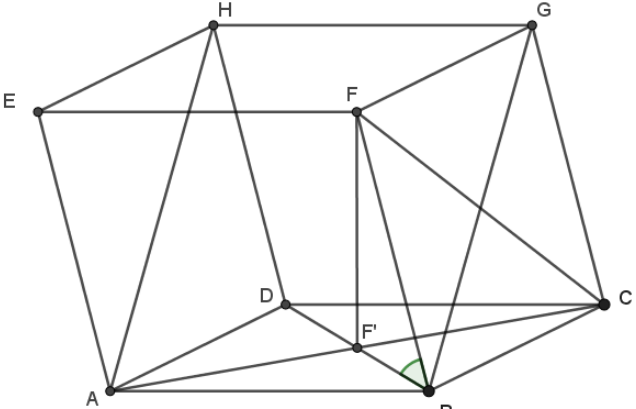
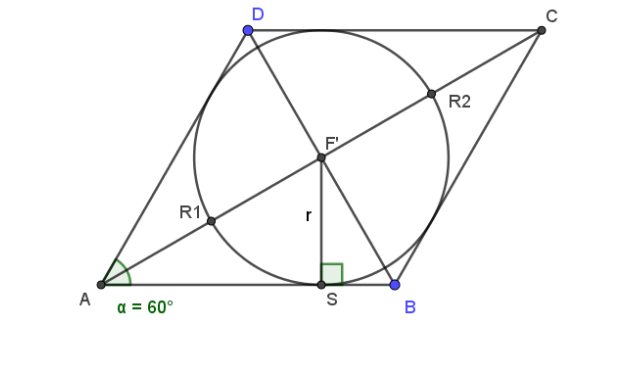
B66-2

Van een vierzijdig prisma  $ABCD$ .  $EFGH$  is het grondvlak  $ABCD$  een ruit. De zijde van de ruit is  $p$  en  $\angle BAD = 60^\circ$ . De projectie van  $F$  op het grondvlak valt samen met het snijpunt van  $AC$  en  $BD$ . De opstaande ribben maken hoeken van  $60^\circ$  met het grondvlak.

a. Bewijs, dat  $AH$  en  $CF$  elkaar loodrecht kruisen.

b. Beschouw de kegel met top  $F$  waarvan de grondcirkel de ribben van het grondvlak raakt. Druk de inhoud van deze kegel in  $p$  uit.

c. Druk de stukken, waarin de twee raakvlakken door  $H$  aan deze kegel het lijnstuk  $AC$  verdelen, in  $p$  uit.

<p>2a. Zie de figuur. De gemarkeerde hoek is 60 graden. <math>AB = AD = p</math> en <math>\angle BAD = 60^\circ</math>. (@) Dus: <math>BD = p</math> en <math>BF' = \frac{1}{2}p</math>. Gevolg: <math>BF = p</math> en <math>FF' = \frac{1}{2}p\sqrt{3}</math>. (@) Dus: <math>BCGF</math> is ook een ruit, zijde <math>p</math>, en dan <math>BG</math> loodrecht op <math>CF</math>. <math>BG // AH</math>: de zijvlakken zijn evenwijdig. Dus: <math>AH</math> kruist <math>CF</math> loodrecht.</p>	
<p>2b. De grondcirkel heeft straal <math>r</math>. Met <math>BF' = \frac{1}{2}p</math> volgt: <math>r = SF' = \frac{1}{4}p\sqrt{3}</math>. (@) <math>Inhoud(kegel) = \frac{1}{3}FF' * opp(cirkel)</math>. Dus: <math>Inh(kegel) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2}p\sqrt{3} * \pi * \frac{3}{16}p^2</math>. <math>Inh(kegel) = \frac{1}{32} \pi p^3 \sqrt{3}</math>.</p>	
<p>2c. Raakvlakken gaan door <math>F</math>, de top van de kegel. (@) <math>HF</math> is evenwijdig aan het grondvlak dus de snijlijnen met het grondvlak zijn ook evenwijdig aan <math>HF</math> en dus aan <math>BD</math>. Zie figuur bij 2b. Gevolg: <math>R1</math> en <math>R2</math> zijn de twee raakpunten van die snijlijnen. Die liggen symmetrisch om <math>F'</math>. <math>AF' = \frac{1}{2}p\sqrt{3}</math> en <math>F'R1 = r = \frac{1}{4}p\sqrt{3}</math>. Dus: <math>AR1 = \frac{1}{4}p\sqrt{3} = CR2</math> en <math>R1R2 = 2r = \frac{1}{2}p\sqrt{3}</math>.</p>	

B66-3

In een kubus  $ABCD.EFGH$  wordt op de ribbe  $CG$  een punt  $Q$  gekozen. Daarna wordt op de ribbe  $BF$  een punt  $P$  zo gekozen, zodat  $BP < CQ$ . Vlak  $APQ$  snijdt de ribbe  $DH$  in  $R$ .

a. Bewijs, dat  $AQ$  en  $PR$  elkaar middendoor delen en dat  $BP + DR = CQ$ .

b. Het zwaartepunt van viervlak  $EPQR$  is  $Z$ .

Wat is de verzameling van de punten  $Z$ , als  $Q$  de ribbe  $CG$  doorloopt,  $P$  de ribbe  $BF$  doorloopt en  $BP \leq CQ$ ?

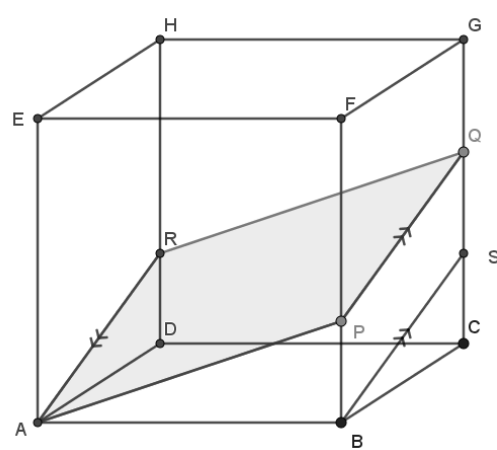
3a.  $BP < CQ$  zorgt ervoor dat  $R$  tussen  $D$  en  $H$  ligt.

$PQ \parallel AR$  en  $AR \parallel RQ$ : zo is de doorsnede te maken, zie de figuur.

Dus  $APQR$  is een parallellogram en de diagonalen  $AQ$  en  $PR$  van een parm. snijden elkaar middendoor (@).

Ook  $BSQP$  is een parallellogram. Dus  $BP = QS$  en  $CS = DR$ .

Er volgt:  $CQ = QS + SC = BP + DR$ .



3b.  $N$  is het midden van  $HB$ .

$M$  is het zwaartepunt van driehoek  $PQR$ .

Er geldt:  $QM : MN = 2 : 1$ . (@)

Als  $P$  varieert, dan 'draait' vlak  $APQH$  om  $AQ$ .

Dus punt  $N$  en  $M$  liggen dan vast.

Als  $Q$  varieert, dan gaat  $N$  over de as  $JL$  van de kubus maar blijft in vlak  $ACGE$  liggen. Dus  $M$  ook.

Punt  $Z$  ligt zo dat  $EZ : ZM = 3 : 1$  (@).

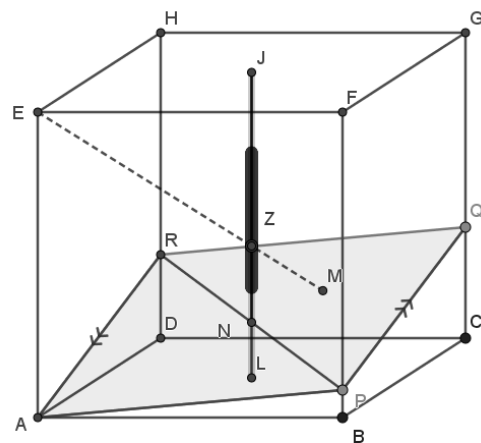
$M$  beweegt evenwijdig aan  $CG$  dus  $Z$  ook nl.

over een lijnstuk gelegen op de as  $JL$  van de kubus. Laagste punt op  $\frac{1}{4}$  van  $L$  en hoogste punt op  $\frac{3}{4}$  van  $J$ , met ribbe kubus = 1.

Extra en niet gevraagd: zie de figuur.

Als  $P$  in  $B$  en  $Q$  in  $C$ , dan  $Z$  zodanig dat  $LZ = \frac{1}{4}$ .

Als  $P$  ergens op  $BF$  en  $Q$  in  $G$ , dan  $Z$  zodanig dat  $LZ = \frac{3}{4}$ . (\*)



(\*) Anders genoteerd in  $\mathbb{R}^3$  met  $A(0,0,0)$  en  $B(1,0,0)$ :  $Z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a\right)$  met  $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{3}{4}$ .

## Jaar 1967 uitwerkingen

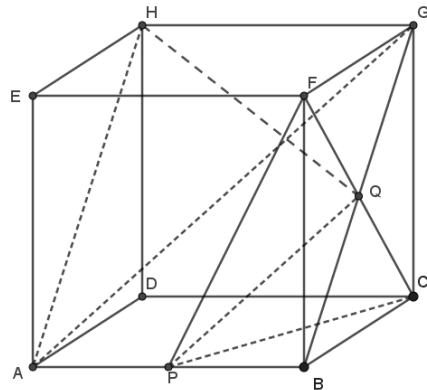
B67-1

In een kubus  $ABCD.EFGH$  is  $P$  het midden van de ribbe  $AB$  en  $Q$  het snijpunt van  $BG$  en  $CF$ .

- Bewijs, dat  $AG$  evenwijdig is met vlak  $CFP$ .
- Bewijs, dat  $HQ$  loodrecht staat op vlak  $CFP$ .
- Construeer in een stereometrische figuur van de kubus de lijn  $x$ , die  $HF$ ,  $AG$  en  $DP$  snijdt en evenwijdig is met vlak  $CFP$ .

1a.

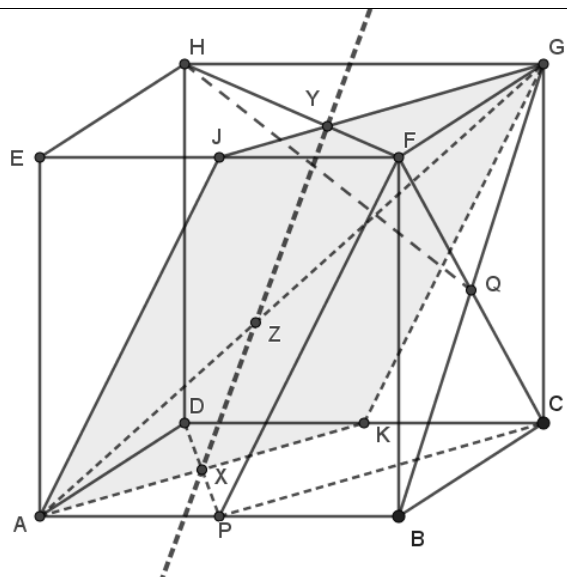
$PQ$  is een midden parallel in driehoek  $ABG$ .  
Dus  $PQ // AG$ . (@)  
 $PQ$  in vlak  $CFP$  dus  $PQ$  evenwijdig aan een lijn  
in vlak  $CFP$  dus  $PQ$  is evenwijdig aan dat vlak.  
(@)

1b. Vlak  $ABGH$  staat loodrecht op  $CF$  te  $Q$ . (@)Lijn  $HQ$  in dat vlak dus  $HQ$  loodrecht op  $CF$ . [1] $HQ$  ook loodrecht op  $PQ$ , want, met alle ribben lengte =1:

$$\tan(\angle GHQ) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ en } \tan(\angle PQB) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}. \text{ (@) Dus } \angle GHQ = \angle PQB.$$

Omdat  $\angle GHQ + \angle GQH = 90^\circ$  (@) volgt:  $\angle PQB + \angle GQH = 90^\circ$ .Voor hoek  $PQH$  resteert dus 90 graden. [2]Gevolg:  $HQ$  loodrecht op  $PQ$  en met [1] ook loodrecht op  $CF$ .Dus  $HQ$  loodrecht op twee snijdende lijnen dan ook loodrecht op het vlak daarvan:  $CFP$ . (@)NB: [2] kan ook met Pythagoras voor driehoek  $HQP$ : geeft meer rekenwerk.

1c.

Uit 1a volgt:  $AG //$ vlak  $CFP$ .Dus de gezochte lijn ligt in een vlak door  $AG$   
evenwijdig aan  $CFP$ .Met  $J$  midden van  $EF$  en  $K$  midden van  $CD$   
volgt: $AK // PC$  dus vlak  $AKGJ$  is evenwijdig aan  $CFP$ . $AK$  snijdt  $DP$  in  $X$ . $JG$  snijdt  $HF$  in  $Y$ .De verbindingslijn  $XY$  snijdt  $AG$  in  $Z$ .Die lijn, dik gestippeld, is de gevraagde lijn  $x$ .

B67-2

Een rechthoek  $ABCD$  is het grondvlak van een recht parallellepipedum  $ABCD.EFGH$ ;

$AB = AE = 2a$  en  $AD = a\sqrt{3}$ ;  $P$  is het midden van de ribbe  $AB$  en  $Q$  het midden van de ribbe  $AE$ .

a. Druk de inhoud van het viervlak  $FHPQ$  in  $a$  uit.

b. Bewijs, dat  $CQ$  raakt aan een kegelvlak, waarvan  $HD$  de as en  $HA$  een beschrijvende is.

c. Op de ribbe  $BF$  ligt het punt  $X$  zo, dat de oppervlakte van driehoek  $CQX$  minimaal is. Druk deze oppervlakte in  $a$  uit.

2a.

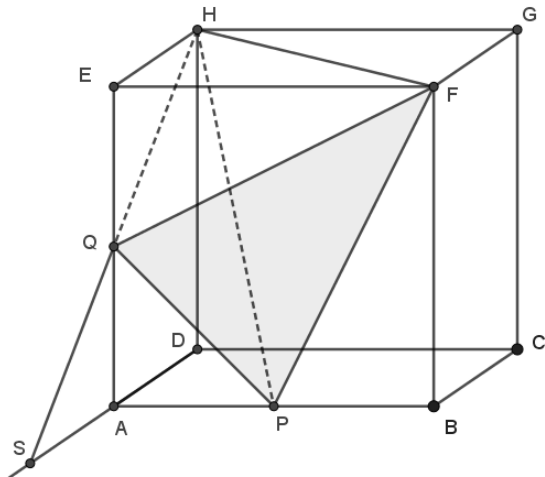
Zie het viervlak als een 'scheve' piramide met grondvlak  $FPQ$  en top  $H$ .

$HE$  is de hoogte want  $HE$  loodrecht op het voorvlak.

$$\text{Inh}(H.FPQ) = \frac{1}{3} HE * \text{opp}(FPQ). (@)$$

Dus:

$$\text{Inh}(H.FPQ) = \frac{1}{3} * a\sqrt{3} * \frac{3}{2} a^2 = \frac{1}{2} a^3 \sqrt{3}.$$



2b. Zie de figuur. Aan de grondcirkel raakt  $CR$  en verlengd geeft dat punt  $T$  op drager van  $AD$ . Vlak  $HCT$  is het raakvlak.

Er volgt:  $DT = 2a\sqrt{3}$ .

Kijk nu naar de figuur bij 2a.

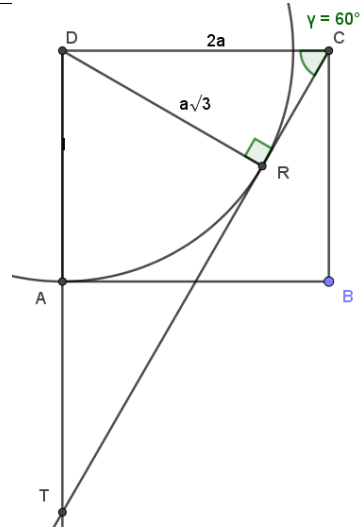
Vlak  $HQC$  snijdt het grondvlak volgens lijn  $SC$ .

Er geldt:  $\angle EQH = \angle ASQ$ . (Z-hoeken @)

Dus  $\angle ASQ = 30^\circ$ .

Gevolg:  $DS = HD\sqrt{3} = 2a\sqrt{3}$ .

Dus  $S = T$ . Het vlak  $HCT$  is dus het raakvlak en  $CQ$  ligt daarin:  $CQ$  raakt daarom de kegel.



2c.

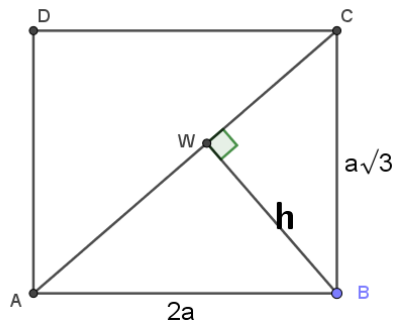
Oppervlakte minimaal als de hoogte  $h$  uit  $X$  minimaal is want de basis  $CQ$  is constant. En  $h$  is minimaal als de afstand van  $X$  tot  $CQ$  minimaal is.

Projecteer alles op het grondvlak en dan:

$$\frac{h}{a\sqrt{3}} = \frac{2a}{a\sqrt{7}}. \text{ Dus: } h = \frac{2}{7} a\sqrt{21}.$$

En  $CQ = 2a\sqrt{2}$ .

$$\text{Minimale opp} = \frac{1}{2} h * CQ = \frac{2}{7} a^2 \sqrt{42}.$$

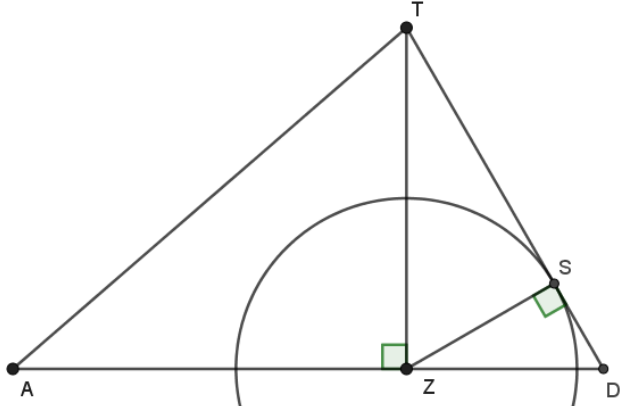
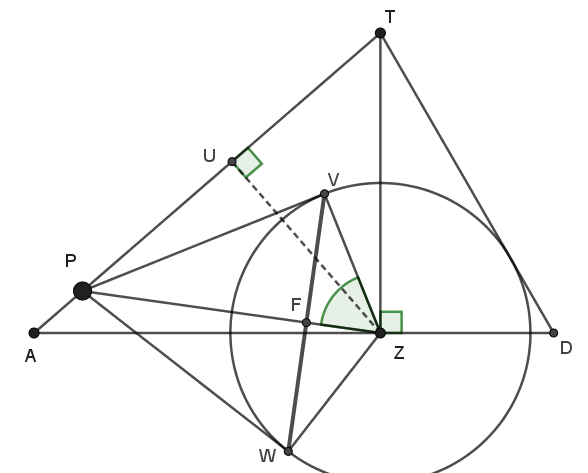


B67-3

$T.ABC$  is een regelmatige driezijdige piramide. De ribbe van het grondvlak is 12 en de hoogte van de piramide is 6. Het zwaartepunt van driehoek  $ABC$  is het middelpunt van een bol met straal 3.

a. Bewijs, dat deze bol de opstaande zijvlakken van de piramide  $T.ABC$  raakt.

b.  $P$  is een punt van de ribbe  $AT$ . De raaklijnen door  $P$  aan de bol raken de bol in de punten van een cirkel. Welke waarden kan de straal van deze cirkel aannemen, als  $P$  de ribbe  $AT$  doorloopt?

<p>3a.</p> <p>Het midden van <math>BC</math> is punt <math>D</math>.  <math>ADT</math> is een doorsnede van de piramide en dus ook <math>Z</math> op <math>AD</math>. Zie de figuur. De cirkel is de doorsnede van de bol met dit vlak.  <math>S</math> is de projectie van <math>Z</math> op <math>TD</math>.  <math>AD = 6\sqrt{3}, ZD = 2\sqrt{3}</math>. (@)  Dus: <math>TD = 4\sqrt{3}</math>.  Dan volgt: <math>\frac{ZS}{ZD} = \frac{ZT}{DT}</math>.  Dus: <math>ZS = 3</math>. En dat is de straal van de bol.  Dus de cirkel raakt <math>TD</math> en bijgevolg raakt de bol het zijvlak <math>BCT</math>.  Analoog voor de andere twee zijvlakken.</p>	
<p>3b.</p> <p>De raaklijnen uit <math>P</math> aan de bol vormen een kegel. De raakcirkel is daarvan de grondcirkel. De doorsnede geeft de situatie: <math>PV</math> en <math>PW</math> zijn de raaklijnen en de beschrijvende van die kegel.  Zie de figuur.  <math>VW = 2r</math> is de diameter vd grondcirkel.  <math>TZ &lt; AZ</math> dus situatie [1] wordt bereikt bij <math>P</math> op <math>A</math>.  Dan geldt: <math>PZ = 4\sqrt{3}</math>. En er volgt:  <math>PV^2 = PZ^2 - ZV^2 = 39</math>.  En: <math>\frac{FV}{ZV} = \frac{PV}{PZ}</math> dus <math>FV = 3 * \frac{\sqrt{39}}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{4}\sqrt{13}</math>.  Situatie [2] geldt met <math>P</math> op <math>U</math>.  Gevolg: <math>PZ = \frac{6}{7}\sqrt{28}</math>. (hoogtelijn @)  En: <math>PV^2 = PZ^2 - ZV^2 = \frac{81}{7}</math>.  En: <math>FV = 3 * \frac{9}{\sqrt{7}} * \frac{7}{6\sqrt{28}} = \frac{9}{4}</math>.   Dus: <math>\frac{9}{4} \leq r \leq \frac{3}{4}\sqrt{13}</math>.</p>	 <p>Situaties:  [1] Als <math>P</math> het verst van <math>Z</math> ligt, dan is <math>VW</math> het grootste.  [2] Als <math>P</math> het dichtst bij <math>Z</math> ligt, dan is <math>VW</math> het kleinst.</p>

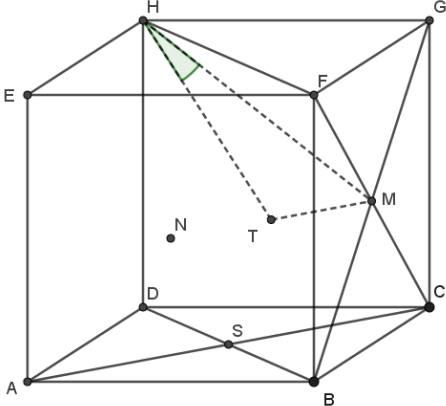
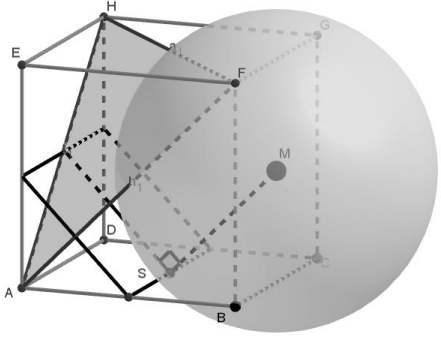
Opmerking: 3b is een vraag met veel gereken en nauwelijks een stereometrische redenering.

## Jaar 1968 uitwerkingen

B68-1

In een kubus  $ABCD.EFGH$  is  $S$  het snijpunt van  $AC$  en  $BD$  en  $M$  het snijpunt van  $BG$  en  $CF$ .

- Bereken de sinus van de hoek van de lijn  $HM$  en het vlak  $BDHF$ .
- Bewijs, dat  $S$  ligt op de bol met middelpunt  $M$  en die de lijn  $EF$  raakt.
- Bewijs, dat het raakvlak in  $S$  aan deze bol loodrecht staat op het vlak  $AFH$ .

<p>1a. <math>N</math> is het midden van het voorvlak.  <math>MN</math> staat dan loodrecht op vlak <math>BDHF</math>. (@)          Doorsnijding met dat vlak geeft punt <math>T</math>.  <math>MT</math> staat loodrecht op vlak <math>BDHF</math>.          De bedoelde hoek is gemarkeerd, dat is de standhoek. (@)          Met <math>AB = 1</math> volgt: <math>AC = \sqrt{2}</math>, <math>MT = \frac{1}{4}\sqrt{2}</math>.  <math>HM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}</math>.          Dus: <math>\sin(\angle THM) = \frac{MT}{HM} = \frac{1}{6}\sqrt{3}</math>.</p>	
<p>1b. Bol raakt dan te <math>F</math> want <math>EF</math> staat loodrecht op <math>MF</math>. De straal van de bol = <math>\frac{1}{2}\sqrt{2}</math>. (<math>AB = 1</math>).  <math>MS = \frac{1}{2}DG = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \text{straal}</math>.          Dus: <math>S</math> op de bol.</p>	
<p>1c. De bol snijdt het grondvlak volgens een cirkel door <math>B</math>, <math>C</math> en <math>S</math>. Mp daarvan is midden van <math>BC</math>. (Thales <math>\triangle BSC</math> @).          De raaklijn in <math>S</math> is <math>k</math> in dat raakvlak en <math>k//AD</math>.          Dan ook <math>k</math> loodrecht op <math>AF</math>. [1]          De raaklijn <math>m</math> in het loodvlak door <math>MS</math> staat loodrecht op <math>MS</math>. Die lijn <math>m</math> ligt in dat vlak, dat evenwijdig is aan het voorvlak.          Maar ook geldt: <math>m//BE</math> want <math>MS//AF</math> (@)          Dan ook <math>m</math> loodrecht op <math>AF</math>. [2]          Uit [1] en [2] volgt: <math>AF</math> staat loodrecht op het vlak door <math>k</math> en <math>m</math>, het raakvlak in <math>S</math>.          Dan ook het vlak door <math>AF</math>, <math>AFH</math>, loodrecht op het raakvlak gevormd door <math>k</math> en <math>m</math>. (@)           Extra: dat raakvlak in <math>S</math> en <math>AFH</math> in één figuur met <i>3D-GeoGebra</i>.</p>	

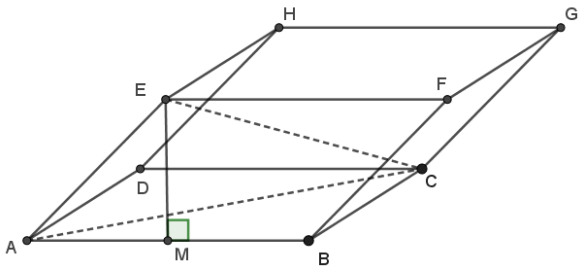
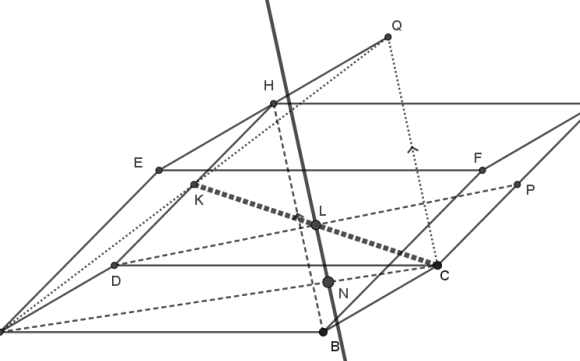
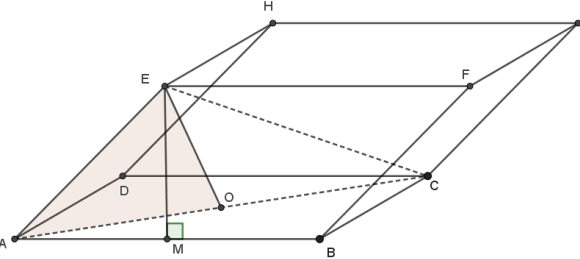
B68-2

Van een vierzijdig prisma  $ABCD.EFGH$  is het grondvlak  $ABCD$  een vierkant;  $AB = 2a$ . De projectie van  $E$  op het grondvlak valt samen met het midden  $M$  van de ribbe  $AB$ ;  $EM = a$ .

a. Druk de afstand van  $AD$  en  $CE$  in  $a$  uit.

b.  $P$  is het midden van de ribbe  $CG$ . Construeer in een stereometrische figuur van het prisma de lijn  $x$ , die  $AC$  en  $DP$  snijdt en die evenwijdig is aan  $BH$ .

c. Beschouw de kegel met top  $E$ , met as  $EM$ , en waarvan de grondcirkel door  $B$  gaat. Druk de oppervlakte van dat deel van vlak  $ACE$  dat binnen de kegel ligt in  $a$  uit.

<p>2a.            Vlak <math>ABFE</math> loodrecht op <math>AD</math>. (@)            Dus: <math>AE</math> loodrecht op <math>AD</math>. [1]  <math>EC = \sqrt{EM^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + 5a^2} = a\sqrt{6}</math>.  <math>AC = 2a\sqrt{2}</math>; <math>AE = a\sqrt{2}</math>. (@)            Dus <math>AC^2 = AE^2 + EC^2 (= 8a^2)</math>.            Dus: hoek <math>AEC</math> is recht. (Pyth. @)            Dus: <math>AE</math> loodrecht op <math>EC</math>. [2]            Uit [1] en [2] volgt: de afstand van <math>AD</math> en <math>CE</math> is <math>AE</math> en die is dus <math>a\sqrt{2}</math>.</p>	
<p>2b.            Verleng <math>EH</math>: <math>EH = HQ</math>.            Dan geldt: <math>BH \parallel CQ</math>. <math>BCQH</math> is parm. (@)            Nu volgt: vlak <math>ACQ \parallel BH</math>.  <math>AQ</math> snijdt <math>DH</math> in <math>K</math>. In vlak <math>ADQE</math>!  <math>CK</math> is nu de snijlijn van vlak <math>ACQ</math> met vlak <math>DCGH</math>. <math>DP</math> snijdt die lijn in <math>L</math>.            Nu een lijn door <math>L</math>, snijdt dus <math>DP</math>, evenwijdig aan <math>CQ</math>, dus evenwijdig aan <math>BH</math>, snijdt <math>AC</math> in <math>N</math>.            Dat is de dikke lijn, de gevraagde lijn <math>x</math>.</p>	
<p>2c.            Zie figuur.            Noem <math>O</math> het mp van <math>ABCD</math>. De grondcirkel gaat door <math>A</math>, <math>B</math> en <math>O</math>. (@)            Gevraagd is de oppervlakte van <math>\triangle AOE</math>, want die ligt binnen de kegel.  <math>EO</math> is een zwaartelijns van <math>\triangle ACE</math> dus:  <math>opp(\triangle AOE) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * a\sqrt{6} * a\sqrt{2} = \frac{1}{2} a^2\sqrt{3}</math>.            (Lengtes <math>AC</math> en <math>AE</math>: zie bij 2a.)</p>	

B68-3

Van een vierzijdige piramide  $T.ABCD$  is het grondvlak een parallellogram;  
 $\angle ADB = 90^\circ$ ,  $AD = a$  en  $BD = 2a$ .  $TD$  staat loodrecht op het vlak  $ABCD$ ;  $TD = 2a$ .  
 $P$  is het midden van de ribbe  $AB$  en  $Q$  is het midden van de ribbe  $TC$ .

- Bewijs, dat de lijn door de middens van de ribben  $TA$  en  $BC$  het lijnstuk  $PQ$  loodrecht middendoor deelt.
- Bewijs, dat  $PQ$  het cilindervlak met as  $TD$  en straal  $a$  raakt.
- Op de lijn door  $T$  evenwijdig aan  $AD$  ligt punt  $X$  zo, dat  $CX = CA$ . Druk  $TX$  in  $a$  uit.

3a.

$G$  en  $P$  zijn middens.

$GP$  is een midden parallel van  $\triangle ABT$ , dus

$$GP = \frac{1}{2}BT = a\sqrt{2} \text{ en } GP // BT.$$

Ook:  $\triangle BDT$  is gelijkbenig ( $2a$ ) rechthoekig.

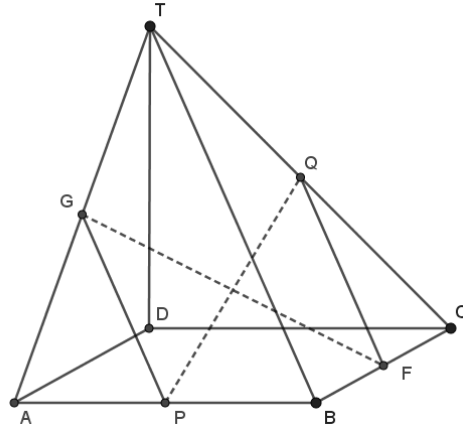
Analoog voor  $FQ$ .

$$FQ = \frac{1}{2}BT \text{ en } FQ // BT.$$

$$\text{Analoog: } PF = GQ = \frac{1}{2}AC = a\sqrt{2}.$$

Dus:

$PFQG$  is een ruit en de diagonalen delen elkaar dus loodrecht middendoor. (@)



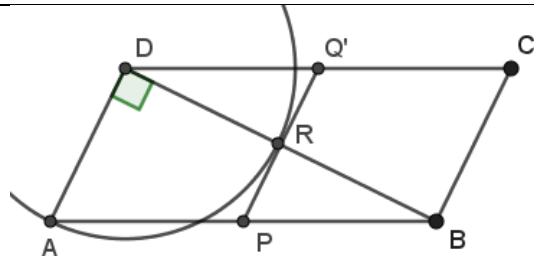
3b.

Projecteer  $PQ$  op het grondvlak:  $PQ'$ .

Dan is vlak  $PQ'Q$  evenwijdig aan  $TD$ .

$PQ'$  snijdt  $BD$  middendoor te  $R$ . Zie figuur.

Dus  $DR = a$ . Blijkbaar raakt  $PQ'$  grondcirkel in  $R$ . Dan is vlak  $PQ'Q$  dus een raakvlak en  $PQ$  bijgevolg een raaklijn aan de cilinder.



3c.

Zie de figuur bij 3b:

$$AD = DR = a, AR = a\sqrt{2}, AC = 2a\sqrt{2}.$$

Projecteer  $X$  op het grondvlak:  $X'$ . Zie figuur.

Hoek  $XX'C$  is recht.

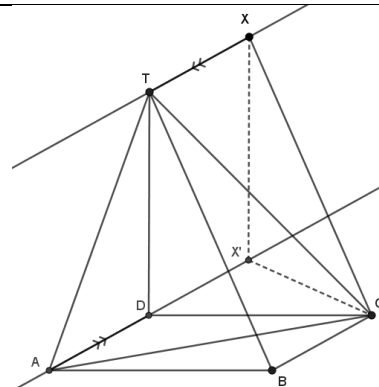
$$CX' = \sqrt{CX^2 - X'X^2} = \sqrt{8a^2 - 4a^2} = 2a.$$

Dus  $CX' = BD$  en blijkbaar  $CX'$  loodrecht op lijn door  $AD$ . Dan volgt:  $DX' = BC = AD = a$ .

Dus ook:  $TX = a$ .

De oplossing is uniek, want  $2a$  is de kortste afstand van  $C$  tot de lijn door  $AD$ , dus  $X'$  is uniek en daarmee  $X$  ook.

NB: Als  $CX > AC$ , dan zijn er 2 oplossingen.



Jaar 1969 uitwerkingen <sup>11</sup>

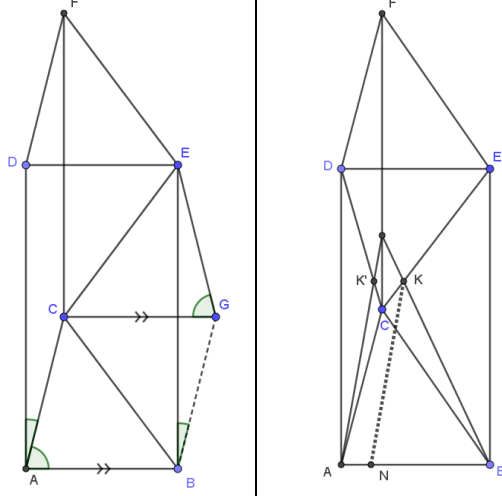
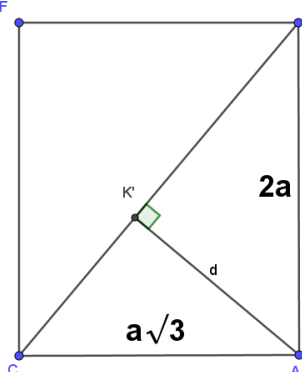
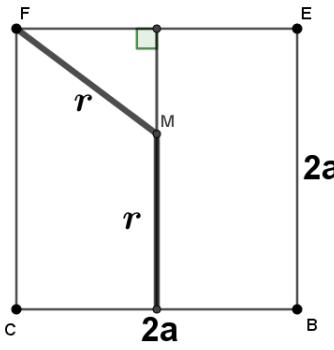
B69-1

Van een recht driezijdig prisma  $ABC.DEF$  is  $AB = a, AC = a\sqrt{3}, AD = 2a$  en  $\angle BAC = 90^\circ$ .

a. Bereken de cosinus van de hoek van de lijnen  $AB$  en  $CE$ .

b. Druk de afstand van de lijnen  $AB$  en  $CE$  in  $a$  uit.

c. Druk de straal van de bol die door de punten  $D, E$  en  $F$  gaat en die vlak  $ABC$  raakt in  $a$  uit.

<p>1a. Zie de eerste figuur.  <math>CG \parallel AB</math>. De gevraagde hoek is hoek <math>GCE</math>.            De gemarkeerde hoeken zijn allen recht!</p> <p><math>EB</math> staat loodrecht op het grondvlak.  <math>BE = AD = 2a</math>.  <math>BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a</math>.            (of ook: <math>ABC</math> is een 30-60-90 driehoek @)            En: <math>CE = \sqrt{BC^2 + BE^2} = 2a\sqrt{2}</math>.            Dus:  <math>\cos(\angle GCE) = \frac{CG}{CE} = \frac{a}{2a\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}</math>.</p> <p>NB: Hoek <math>\approx 69^\circ 18'</math>, niet gevraagd.</p>	
<p>1b. Zie de tweede figuur hierboven.            Als <math>KM</math> die afstand is, projecteer dan alles op vlak <math>ACFD</math>.            Dan ontstaat de figuur hiernaast met <math>AK'</math> de gevraagde afstand.  <math>CD = a\sqrt{7}</math>. (Pyth. @)</p> <p>En (via opp): <math>AK' * CD = AC * AD</math>.            Dus: <math>MK = AK' = \frac{2}{7}a\sqrt{21}</math>.</p>	
<p>1c. De boldoorsnede met het bovenvlak is een cirkel door <math>D, E</math> en <math>F</math> dus de omgeschreven cirkel van <math>\triangle DEF</math>. Het mp daarvan is het midden van <math>EF</math>. (Thales @).            Op de loodlijn in dat punt ligt mp <math>M</math> van de bol.            De bol raakt in het midden van <math>BC</math> het grondvlak. Zie de figuur.            Dus voor de straal van de bol geldt:  <math>r^2 = a^2 + (2a - r)^2</math>. (Pyth @)  <math>r = \frac{5}{4}a</math>.</p>	

<sup>11</sup> Zes van de acht onderdelen van dit examen betreffen berekeningen!

B69-2

Van een regelmatige vierzijdige piramide  $T.ABCD$  is  $AB = 2p$  en  $AT = p\sqrt{5}$ .  $K$  is het midden van de ribbe  $BC$  en  $L$  het midden van de ribbe  $AD$ .

a. Bereken de hoek van de vlakken  $ADT$  en  $BCT$ .

b. De bol met middellijn  $KT$  snijdt de vlakken  $ABCD$  en  $ADT$  elk volgens een cirkel. Druk de stralen van deze cirkels in  $p$  uit.

c. Construeer in een stereometrische figuur van de piramide de doorsnede van de piramide met het raakvlak aan de genoemde bol, dat loodrecht staat op  $LT$  en de ribbe  $AT$  snijdt.

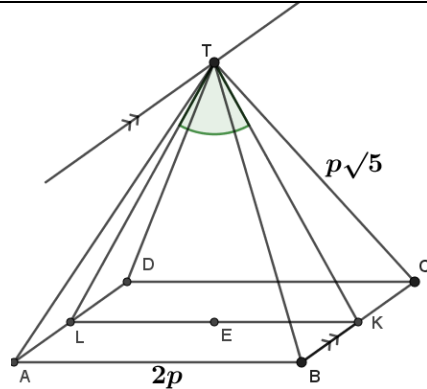
2a.

De standhoek van de twee vlak is gemarkeerd in de figuur.

Want  $TK$  en  $TL$  staan loodrecht op hun snijlijn, de lijn door  $T$ .

$TK = TL = 2p$ . (Pyth @)

Dus driehoek  $KLT$  is gelijkzijdig en de standhoek  $LTK$  is dus  $60^\circ$ .



2b.

De straal van de bol is  $p = \frac{1}{2}KT$ .

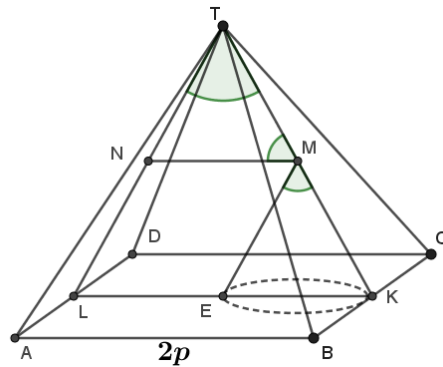
Bijgevolg zijn alle gemarkeerde hoeken dus  $60$  graden. Zie de figuur.

$EK$  is de diameter van de doorsnedecirkel van de bol met het vlak  $ABCD$ .

De straal:  $\frac{1}{2}EK = \frac{1}{2}p$ .

Analoog is  $NT$  de diameter van de doorsnede met de bol met vlak  $ADT$ .  $N$  midden  $LT$ .

Dus nu ook: straal =  $\frac{1}{2}NT = \frac{1}{2}p$ .

2c.  $N$  en  $E$  zijn middens van lijnstukken.

$KN$  staat loodrecht op  $LT$ . (@)

Lijn door  $E$  evenwijdig aan  $KN$ : snijpunt  $J$ .

Lijn door  $E$  evenwijdig aan  $AD$ : lijn  $OP$ .

Dan  $OP$  loodrecht op  $ME$ .

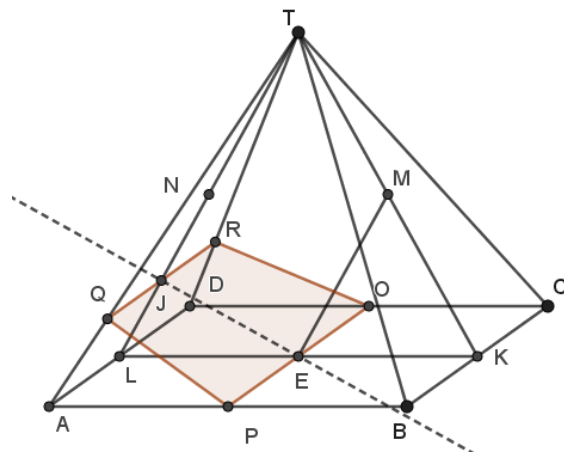
Vlak door  $J$ ,  $E$  en  $OP$  is het gevraagde raakvlak want dat staat loodrecht op straal  $ME$ .

Verder: lijn door  $J$  evenwijdig aan  $AD$  of  $OP$ .

Snijpunten  $Q$  en  $R$ .

De gevraagde doorsnede is dan vlak  $OPQR$ .

NB: Dat is een gelijkbenig trapezium...



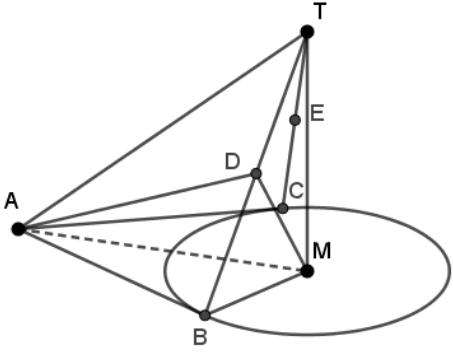
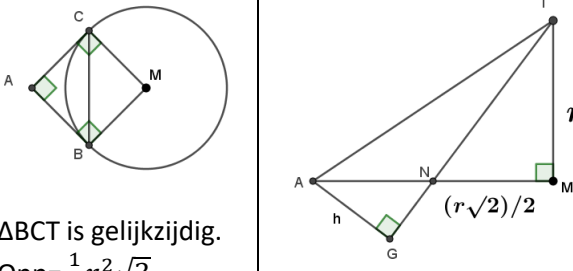
B69-3

In een vlak  $\alpha$  liggen een punt  $A$  en een cirkel met middelpunt  $M$  en straal  $r$ .  $A$  ligt buiten de cirkel.  $T$  is de top van een kegel, die deze cirkel tot grondcirkel heeft;  $MT = r$ . Uit  $A$  trekt men de raaklijnen aan de cirkel; de raakpunten zijn  $B$  en  $C$ . Het midden van  $BT$  is  $D$  en het midden van  $CT$  is  $E$ .

a. Bewijs, dat  $\angle ADM = 90^\circ$ .

b. Gegeven is verder,  $AM = r\sqrt{2}$ .

Druk de inhoud van viervlak  $ADET$  in  $r$  uit.

<p>3a. Zie de figuur, een schets. AB raaklijn dus AB loodrecht op BM. En: <math>AM^2 = AB^2 + BM^2</math> (Pyth @) <math>\triangle BMT</math> is gelijkbenig rechthoekig in M. Dus: <math>BD = \frac{1}{2}BT = \frac{1}{2}r\sqrt{2}</math>. Gevolg: <math>BM^2 = BD^2 + MD^2</math>. ABT is een raakvlak dus hoek ABT is recht. Gevolg: <math>AD^2 = AB^2 + BD^2</math>. Nu invullen: <math>AM^2 = (AD^2 - BD^2) + BM^2 = AD^2 - BD^2 + (BD^2 + MD^2) = AD^2 + MD^2</math>. En volgens Pythagoras: AD loodrecht op DM. <math>\angle ADM = 90^\circ</math>.</p>	
<p>3b. In het grondvlak is de situatie dus als in de figuur. <math>BC = AM = BT = r\sqrt{2}</math>. Dus: <math>opp(\triangle DET) = \frac{1}{4} opp(\triangle BCT) = \frac{1}{8} r^2 \sqrt{3}</math>.  Voor de hoogte, zie de 2<sup>e</sup> figuur. <math>NT = \frac{1}{2} r \sqrt{6}</math>. (Pyth. @) Dus: <math>\frac{h}{AN} = \frac{TM}{NT}</math> en er volgt: <math>h = \frac{1}{3} r \sqrt{3}</math>.  (@): <math>inh(A. DET) = \frac{1}{3} h * O(DET) = \frac{1}{24} r^3</math>.</p>	 <p><math>\triangle BCT</math> is gelijkzijdig. Opp = <math>\frac{1}{2} r^2 \sqrt{3}</math>.</p>

### Jaar 1971 uitwerkingen

B71-1.

Op het verlengde van de diagonaal  $DB$  van het grondvlak van de kubus  $ABCD$ .  $EFGH$  ligt het punt  $P$  zodat  $BP = \frac{1}{2}BD$ .

a. Construeer in een projectiefiguur van de kubus, waarin  $ABFE$  door een vierkant wordt voorgesteld, de lijn  $x$  door  $P$  die een hoek van  $45^\circ$  maakt met de lijn  $BC$  en die een punt gemeen heeft met lijnstuk  $GH$ .

b. Construeer in dezelfde figuur de doorsnede van de kubus met het vlak door de lijn  $x$  dat een hoek van  $45^\circ$  maakt met het vlak  $DCGH$ .

Geef een korte beschrijving van deze constructie.

<p>1a.  <math>P</math> met passer op verlengde <math>DB</math>.            Lijnen die een hoek <math>\theta</math> met <math>BC</math> maken zijn de beschrijvende van de kegel met as <math>BC</math>, top <math>B</math> en halve tophoek <math>\theta</math> maar ook van een verschoven kegel met as evenwijdig aan <math>BC</math>.(@)            Construeer <math>PM \parallel BC</math>.            Dan is hoek <math>MPD = 45^\circ</math>. (gemarkeerd)            De kegel met top <math>P</math>, as <math>PM</math> en tophoek <math>MPD</math> bevat dus de gevraagde lijn nl. een beschrijvende van die kegel.            De grondcirkel is <math>s(M,  MD )</math> met passer.            Die snijdt <math>HG</math> in punt <math>S</math>.            Lijn door <math>P</math> en <math>S</math> (gestippeld) is lijn <math>x</math>.</p>	
<p>1b.  <math>PS</math> (deel lijn <math>x</math>) (*) is een beschrijvende van de kegel dus. Het gevraagde vlak hier door bevat <math>x</math> en de lijn <math>k</math> loodrecht op de straal <math>MS</math>.            Dat vlak maakt hoek <math>PSM = 45^\circ</math> met het grondvlak dus met vlak <math>DCGH</math>.  <math>k</math> snijdt <math>DH</math> in <math>N</math> (in achtervlak) en verlengde <math>DC</math> in <math>J</math>. Lijn <math>PJ</math> snijdt <math>ABCD</math> in <math>K</math> en <math>L</math>.  <math>LO</math> (in voorvlak) <math>\parallel SN</math>.  <math>OQ</math> (in rechtervlak) <math>\parallel KN</math>.            Het vlak door <math>SNKLOQ</math> geeft de gevraagde doorsnede van de kubus.</p>	

(\*) Onderdeel 1a moet dus gelukt zijn.

B71-2.

Van een driezijdig prisma  $ABC.DEF$  is gegeven dat  $BC = AC = CF$  en  $\angle ACB = 90^\circ$ .

De projectie van  $E$  op het grondvlak  $ABC$  valt samen met het midden  $P$  van ribbe  $BC$ .

a. Bewijs dat de lijnen  $BF$  en  $AE$  elkaar loodrecht kruisen.

b. Bewijs dat de punten  $A, C, D, E, F$  en het snijpunt  $Q$  van  $BF$  en  $EP$  op één bol liggen.

c. Bewijs dat  $BE$  deze bol raakt en dat het midden van de ribbe  $AB$  op deze bol ligt.

<p>2a. EP loodrecht op ABC dus vlak met EP loodrecht op grondvlak. AC loodrecht op BC dus ook AC loodrecht op vlak BCEF. AE in vlak AEC dat loodrecht op BCEF staat. Loodrechte projectie op BCEF is lijnstuk CE. BCEF is een ruit: diagonalen loodrecht op elkaar. Dus CE snijdt loodrecht BF. Gevolg: AE kruist BF loodrecht. In figuur zijaanzicht vrijwel via lijn AC.</p>	
<p>2b. <math>AC = CF</math> en AC loodrecht op CF. Dus: ACFD is een vierkant. Dat is dan ook een koordenvierhoek met een omschreven cirkel <math>c_1</math>. Er zijn dus bollen door A, C, F en D te maken. Driehoek CEF is gelijkzijdig. De omschreven cirkel <math>c_2</math> heeft mp G op BF en loodrecht boven C. P midden van AB dan Q midden van BG. Dus: <math>CG = GF = GE = GQ</math>. Cirkel <math>c_2</math> gaat dus ook door Q. Cirkels <math>c_1</math> en <math>c_2</math> allebei door C en F. Dan is er een bol waar beide cirkels op liggen en dus A, C, F, D, E en Q op één bol.</p>	
<p>2c. Cirkel <math>c_2</math> heeft mp G. GE is een straal. Q midden van BG dus <math>GE = GQ = BQ</math>. Gevolg: hoek BEG is recht en dus raakt BE aan de cirkel <math>c_2</math> en bijgevolg aan de bol. S midden van AB. Zie vooraanzicht. <math>BE=SE</math> dus vierhoek ASED is een gelijkbenig trapezium. De cirkel door ADE, op de bol gelegen, gaat dus ook door S. S op de bol gelegen, blijktbaar.</p>	
<p>2c Anders: Met <math> AC  =  CF  =  BC  =  BE  = 1</math> volgt: <math> BS  = \frac{1}{2}\sqrt{2}</math>. Macht van B tov cirkel <math>c_2</math>: <math> BE ^2 = 1</math>. <math> BS  *  BA  = \frac{1}{2}\sqrt{2} * \sqrt{2} = 1</math>. Gelijke machten dus S op die cirkel <math>c_2</math>. NB: macht t.o.v. cirkel is basiskennis (@?) van analytische meetkunde.</p>	

B71-3.

Van een kegel met top  $T$  is  $M$  het middelpunt van de grondcirkel en  $r$  de straal. Het midden van de hoogte  $TM$  is punt  $N$ ; de hoogte  $TM = 2r$ . Op de grondcirkel ligt een vast punt  $A$  en een variabel <sup>12</sup> punt  $B$ . Het midden van het lijnstuk  $TB$  is punt  $C$ .

a. Druk de lengte van  $AB$  uit in  $r$  voor het geval dat  $NC$  loodrecht staat op  $AC$ .

b. Druk de lengte van  $AC$  uit in  $r$  voor het geval dat de inhoud van viervlak  $ABCN$  gelijk is aan  $\frac{1}{12}r^3$ .

c. Wat is de verzameling van de middens van de lijnstukken  $AC$  voor het geval dat  $B$  de grondcirkel doorloopt? Motiveer het antwoord.

3a. Lengte van een beschrijvende:  $r\sqrt{5}$ .

$|AN| = r\sqrt{2}$ . Eenvoudig uit de figuur.

$|NC| = \frac{1}{2}r$ .  $NC \parallel MB$  (@)

Met:  $|AC|^2 = |AN|^2 - |NC|^2$  (Pyth. @) volgt:

$|AC| = \frac{1}{2}r\sqrt{7}$ .

Cos-regel in  $ATC$  geeft  $\cos(\text{hoek } ATC)$ .

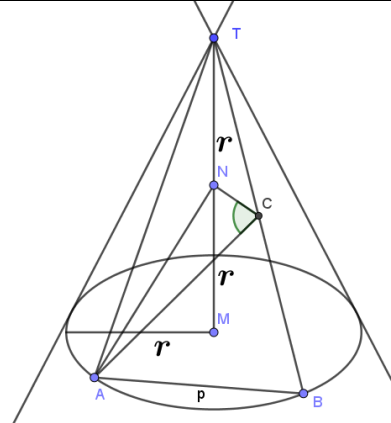
$$\frac{7}{4}r^2 = 5r^2 + \frac{5}{4}r^2 - 2 * \frac{5}{2}r^2 * \cos(\theta).$$

$$\cos(\theta) = \frac{9}{10}. (*)$$

Cos-regel in  $ATB$  geeft dan  $p$ .

$$p^2 = 5r^2 + 5r^2 - 10r^2 \cos(\theta). \text{ Dat geeft: } p = r.$$

NB: Met tabel te vinden:  $\theta \approx 25^\circ 50'$ . Niet gevraagd.



3b.  $Opp(MBCN) = \frac{3}{4}r^2$ . Zie figuur: trapezium (@).

$$Opp(BCN) = opp(MBCN) - opp(BMN) = \frac{1}{4}r^2.$$

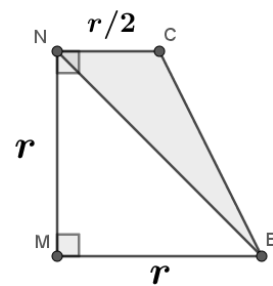
$$Inh(ABCN) = \frac{1}{3}h * O(BCN) = \frac{1}{12}r^3. \text{ (inh. piramide @)}$$

Dus:  $h = r$ .

Blijkbaar is  $AM$  die hoogte en dus staat

$AM$  loodrecht op vlak  $MBCN$ .

$$|AC|^2 = |AM|^2 + |MC|^2. \text{ (Pyth. @)}. |AC| = \frac{3}{2}r.$$



3c. Punt  $C$  altijd op helft van  $BT$  dus beschrijft  $C$  een cirkel  $c$  in een vlak op hoogte  $r$  van  $M$ .

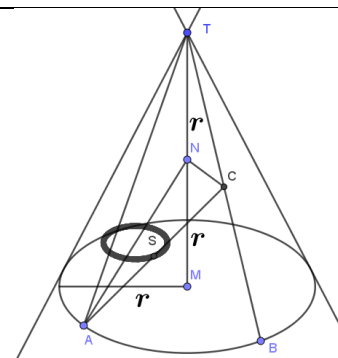
Feitelijk is die cirkel  $c$  de helft van de grondcirkel.

$|AS| = \frac{1}{2}|AC|$  dus  $S$  beschrijft een kromme in een vlak op hoogte  $\frac{1}{4}|TM| = \frac{1}{2}r$ .

Vanuit  $A$  wordt de cirkel  $c$  met  $\frac{1}{2}$  vermenigvuldigd.

Dus de kromme is weer een cirkel. (@)

Extra: Dik zwart getekend in de figuur.



<sup>12</sup> Het woord 'variabel' kan weg en is hier verwarrend. Bij 3b zou kunnen staan: anders gelegen punt  $B$  dan bij 3a. Bij 3c wordt gezegd dat  $B$  de grondcirkel doorloopt. Dat is daar voldoende.

## Analytische meetkunde in het middelbaar onderwijs

### Inleiding

In dit deel staan opgaven met uitwerkingen van het onderdeel analytische meetkunde van eindexamens HBS-B. Dat onderdeel ging samen met goniometrie, feitelijk vragen over goniometrische functies, maar de opgaven daarvan zijn nu weggelaten.

De examens komen uit de bundel 'Schriftelijke opgaven van het eindexamen HBS-B' van Kruijtbosch/Richter (1969)<sup>13</sup>. Het betreft de jaren 1961 t/m 1968. Die van 1969 en 1971 zijn apart verkregen. Het schooltype 'hogere burgerschool' is in 1968 afgeschaft t.g.v. de invoering van de Mammoetwet. In 1973 zijn de laatste examens voor HBS afgenomen.

Voor dit wiskundeonderdeel inclusief goniometrie was 2,5 uur beschikbaar.

Er werd geen gebruik gemaakt van grafische of gewone rekenmachines: die bestonden nog niet. Ook de rekenliniaal was nog niet in gebruik. Mogelijk wel gebruik van een gonio- en logaritmetabel maar dat is in de navolgende examens nergens nodig. Formulebladen zijn nooit beschikbaar geweest.

Basiskennis voor analytische meetkunde betrof: vergelijkingen, poollijnen, macht van een punt, raaklijnen, normalen, kegelsneden, bundels, verzamelingen,...

Zie verder het leerboek 'Inleiding tot de Analytische Meetkunde' van C.J. Alders (1961).

Verwijzing naar basiskennis gebeurt hierna met het symbool @.

Uitwerkingen zijn nooit openbaar gemaakt en zeker niet op internet: dat bestond nog niet.

In Kruijtbosch/Richter staan geen bewijzen of afleidingen maar wel antwoorden, zonder de weg er naar toe. De hier getoonde uitwerkingen zijn van de schrijver dezes. Ze staan na de opgavenbladen. Meestal zijn er grafieken ter illustratie bij gemaakt met *GeoGebra*. Indertijd zijn grafieken sporadisch gevraagd: zonder grafische hulpmiddelen is er vaak slechts een schets te geven.

### Begrippen en notaties

Parabolen hebben altijd een as gelijk aan of evenwijdig aan de X-as.

Dat geeft dan bijvoorbeeld de vergelijking  $y^2 = 2px$ . De as is hier de X-as, het brandpunt is  $F(\frac{1}{2}p, 0)$

en de richtlijn heeft vergelijking  $x = -\frac{1}{2}p$ . De vergelijking  $y = 2px^2$  komt vrijwel niet voor.

Als  $L_1 = 0$  en  $L_2 = 0$  vergelijkingen van twee lijnen zijn, dan heet  $L_1 + \lambda L_2 = 0$  een lijnenbundel. Analoog voor een cirkelbundel.

Geregeld wordt gesproken over bijvoorbeeld 'de lijn, cirkel, ellips ...  $V(x, y) = 0$ ' waarbij natuurlijk bedoeld is 'de lijn, cirkel, ellips ... met vergelijking  $V(x, y) = 0$ '.

Verzamelingen zijn vaak te verstaan als 'meetkundige plaatsen', een term die tegenwoordig bij analytische meetkunde wordt gebruikt.

Bij de uitwerkingen staat 'rico' voor richtingscoëfficiënt.

---

<sup>13</sup> M.i.v. 1963 waren de eindexamens wiskunde HBS-B en Gymnasium  $\beta$  identiek.

## Examenopgaven analytische meetkunde HBS-B

### Jaar 1961 opgaven <sup>14</sup>

B61-4

a. Gegeven zijn de punten  $A(-9,0)$ ,  $B(15,0)$  en  $C(0,15)$ .

Bereken de coördinaten van het hoogtepunt  $H$ , het middelpunt  $M$  van de omgeschreven cirkel en het zwaartepunt  $Z$  van  $\triangle ABC$ .

b. Bewijs, dat de punten  $H$ ,  $M$  en  $Z$  op één lijn liggen.

B61-5

Gegeven is de lijn  $y = 2x + 1$  en een punt  $A$  op deze lijn met  $x$ -coördinaat  $\lambda$ .

a. Stel de vergelijking op van de hyperbool, die de lijnen  $y + 2x = 0$  en  $y - 2x = 0$  als asymptoten heeft en door het punt  $A$  gaat.

b. Stel de vergelijking op van de raaklijn in  $A$  aan deze hyperbool.

c. Als we  $\lambda$  variabel onderstellen, dan stelt de onder b gevonden vergelijking een stelsel lijnen voor. Bewijs, dat alle lijnen van dit stelsel door één punt gaan, en bereken de coördinaten van dit punt.

B61-6

Gegeven zijn het punt  $A(-2a, 0)$ , de lijn  $l$  met vergelijking  $x = \frac{1}{2}a$ , en de cirkel  $x^2 + y^2 = a^2$ . Hierin is  $a \neq 0$ . Neem een willekeurig punt  $P$  op  $l$ . De poollijn van  $P$  t.o.v. de gegeven cirkel snijdt de lijn  $AP$  in  $S$ .

Wat is de verzameling van de punten  $S$ , als  $P$  de lijn  $l$  doorloopt?

### Jaar 1962 opgaven

B62-3

Gegeven is de parabool  $y^2 = 2px$  en het punt  $P$  op de richtlijn van deze parabool.

a. Bewijs, dat de poollijn van  $P$  t.o.v. de parabool door het brandpunt  $F$  gaat.

b. Deze poollijn snijdt de parabool in  $A$  en  $B$ .

Bewijs, dat  $PF$  een hoogtelijn van driehoek  $PAB$  is.

c. Wat is de verzameling van de middens van de raaklijnen  $AB$ , als  $P$  de richtlijn doorloopt?

B62-4

Gegeven is de orthogonale hyperbool  $xy = 1$ .

a. Bewijs, dat de normalen van deze hyperbool een positieve richtingscoëfficiënt hebben.

b. Door een willekeurig punt  $P(a, \frac{1}{a})$  van de hyperbool trekt men twee onderling loodrechte lijnen.

Deze lijnen snijden de hyperbool behalve in  $P$  elk nog in een tweede punt; noem deze punten  $Q$  en  $R$ .

Bewijs, dat de lijn door  $Q$  en  $R$  evenwijdig is aan de normaal in  $P$ .

---

<sup>14</sup> De nummering is die van de examens. De vragen over goniometrische functies zijn weggelaten.

B62-5

Gegeven zijn de cirkel  $x^2 + y^2 = r^2$  en op de positieve X-as het punt  $A(a, 0)$ ;  $a \neq r$ .

Het punt  $P(x_1, y_1)$  is een punt van de cirkel. De lijn  $OP$  snijdt de middelloodlijn  $l$  van  $AP$  in  $S$ .

- Stel de vergelijking van  $l$  op.
- Wat is de verzameling van de punten  $S$ , als  $P$  de cirkel doorloopt?
- Wat stelt de onder b gevonden vergelijking voor, als  $a < r$ , en wat als  $a > r$  is?

### Jaar 1963 opgaven

B63-2

Gegeven zijn de ellips  $x^2 + 4y^2 = 16$  en de lijn  $l$  met vergelijking  $x - 2y + 4 = 0$ .

- $P$  is een punt van  $l$ , en  $p$  is de poollijn van  $P$  ten opzichte van de ellips. Gegeven is, dat  $p$  loodrecht staat op  $l$ . Bereken de coördinaten van  $P$ .
- $Q$  is een punt van  $l$ , en  $q$  is de poollijn van  $Q$  ten opzichte van de ellips. Sis het snijpunt van  $q$  en de lijn  $OQ$ . Wat is de verzameling van de punten  $S$ , als  $Q$  de lijn  $l$  doorloopt?

Teken deze verzameling.

B63-3

De vergelijking  $x - py + 2p^2 = 0$  stelt, bij veranderlijke  $p$ , een verzameling lijnen voor.

- Bewijs, dat elke lijn van deze verzameling de parabool  $y^2 = 8x$  raakt, en dat elke raaklijn van deze parabool tot de gegeven verzameling behoort.
- Wat is de verzameling van de middens van de koorden, die de hyperbool  $xy = 8$  van de gegeven verzameling behorende lijnen afsnijdt?

Teken deze verzameling.

### Jaar 1964 opgaven

B64-2

Gegeven is de ellips  $x^2 + 4y^2 = 4$ .  $A$  is het snijpunt van de ellips met de negatieve X-as.  $P(0, p)$  is een willekeurig punt van de Y-as. De poollijn van  $P$  t.o.v. de ellips snijdt de lijn  $AP$  in  $S$ .

- Wat is de verzameling van de punten  $S$ , als  $p$  variabel is?
- Wat is de verzameling van de punten  $S$ , als  $|p| \geq 1$ ?
- Voor welke waarden van  $a$  heeft de lijn  $y = a(x - 2)$  een punt met de onder b gevonden verzameling gemeen?

B64-3

Gegeven is de parabool  $y^2 = 2x$ . Op deze parabool liggen de punten  $A(2,2)$ ,  $B(8,4)$  en  $C(18,-6)$ .

- Bewijs, dat de normalen in de punten  $A$ ,  $B$  en  $C$  van de parabool door één punt  $S$  gaan. Bereken de coördinaten van  $S$ .
- Stel de vergelijking op van de parabool, die de X-as als as van symmetrie heeft en die gaat door de middens van de lijnstukken  $AB$  en  $AC$ . Bewijs, dat ook het midden van het lijnstuk  $BC$  op deze parabool ligt.
- Stel de vergelijking op van de hyperbool, waarvan de ene asymptoot samenvalt met de X-as, de andere asymptoot evenwijdig is aan de Y-as en die door de punten  $A$  en  $B$  gaat. Bewijs, dat ook de punten  $C$  en  $S$  op deze hyperbool liggen.

**Jaar 1965 opgaven**

B65-2

Gegeven is de bundel cirkels  $x^2 + y^2 - 8 + \lambda(x + y) = 0$ .

a. Bereken de coördinaten van de basispunten van de bundel.

Wat is de verzameling van de middelpunten van de cirkels van de bundel?

b. Stel de vergelijking op van die cirkel van de bundel, welke de cirkel, waarvoor  $\lambda = 2$ , loodrecht snijdt.c. Elke cirkel van de bundel heeft een middellijn met richtingscoëfficiënt  $-1$ .

Wat is de verzameling van de eindpunten van deze middellijnen?

B65-3

Gegeven zijn de parabool  $y^2 = 4x$  en de cirkel  $(x - 2)^2 + y^2 = 8$ .  $V$  is de verzameling van de raaklijnen aan de parabool, waarvan het raakpunt binnen de cirkel ligt.a. Stel de vergelijkingen op van de raaklijnen aan de parabool, die een afstand  $3\frac{1}{2}$  tot het punt  $(4,0)$  hebben. Behoren deze raaklijnen tot de verzameling  $V$ ?b. Wat is de verzameling van de punten, waarvan de poollijn ten opzichte van de cirkel tot  $V$  behoort. Teken deze verzameling.**Jaar 1966 opgaven**

B66-2

Gegeven is de parabool  $y^2 = 2x$ .a. Voor welke punten  $P$  van de lijn  $x - y + 2 = 0$  geldt, dat de poollijn van  $P$  ten opzichte van deze parabool loodrecht staat op de lijn  $OP$ ?b. Wat is de verzameling van de toppen van de parabolen, die de gegeven parabool in het punt  $(2,2)$  loodrecht snijden en die een symmetrie-as hebben, die evenwijdig is met de X-as of met de X-as samenvalt?

B66-3

Gegeven is de bundel cirkels  $x^2 + y^2 - 16 - 2\lambda(x - 4) = 0$ .

a. Bewijs, dat de bundel één basispunt heeft.

b. Welke exemplaren van de bundel raken de lijn  $x\sqrt{2} - 4y = 0$ ?c. Uit het middelpunt van elk exemplaar van de bundel laat men de loodlijn  $l$  neer op de machtlijn  $m$  van dat exemplaar en de cirkel  $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 0$ . Het snijpunt van  $l$  en  $m$  is  $S$ .Wat is de verzameling van de punten  $S$ ?**Jaar 1967 opgaven**

B67-2

Gegeven zijn de punten  $A(4,0)$  en  $B(0,2\lambda)$ ;  $\lambda \neq 0$ . Van drie cirkels  $C_1, C_2$  en  $C_3$  is gegeven:  $C_1$  gaat door  $A$  en raakt de Y-as in  $O$ ;  $C_2$  gaat door  $B$  en raakt de X-as in  $O$ ;  $C_3$  heeft middelpunt  $O$  en straal  $|\lambda|$ a. Elk tweetal van deze cirkel heeft een machtlijn. Bewijs dat deze drie machtlijnen door één punt  $K$  gaan. Wat is de verzameling van de punten  $K$  als  $\lambda$  veranderlijk is?b. Voor welke waarden van  $\lambda$  ligt  $K$  binnen de cirkels  $C_1, C_2$  en  $C_3$ ?

B67-3

Gegeven zijn de punten  $A(2,0)$  en  $B(2,2)$ .

a. Stel vergelijkingen op van de parabolen door het punt  $B$ , die de  $X$ -as als as en het punt  $A$  als brandpunt hebben.

Op de  $X$ -as ligt een punt  $C$  en op de  $Y$ -as een punt  $D$  zo, dat de  $x$ -coördinaat van  $C$  2 groter is dan de  $y$ -coördinaat van  $D$ . Het snijpunt van de lijnen  $AD$  en  $BC$  is  $S$ .

b. Wat is de verzameling van de punten  $S$ , als  $D$  de  $Y$ -as doorloopt?

Teken deze verzameling.

c. Teken de verzameling van de punten  $S$ , als  $D$  de positieve  $Y$ -as doorloopt?

### Jaar 1968 opgaven

B68-1

Gegeven zijn de ellips  $E$  met vergelijking  $4x^2 + 9y^2 = 36$  en de hyperbool  $H$  met vergelijking  $x^2 - 4y^2 = 4$ .

a. Stel de vergelijking op van elke raaklijn aan  $E$ , die evenwijdig is aan een asymptoot van  $H$ .

b. Bewijs, dat  $E$  en  $H$  elkaar loodrecht snijden.

B68-2

Gegeven is het stelsel parabolen  $y^2 + py - 2x = 0$ .

a. Wat is de verzameling van de brandpunten van de parabolen van het stelsel?

Teken deze verzameling.

b. Laat op de poollijn van het punt  $(2,0)$  ten opzichte van een parabool van het stelsel de loodlijn neer uit het punt  $(0,4)$ .

Wat is de verzameling van de voetpunten van deze loodlijnen?

Teken deze verzameling.

c. Door welke punten van het vlak gaat geen enkele parabool van het stelsel?

### Jaar 1969 opgaven

B69-1

a. Een parabool heeft de vergelijking  $y^2 = 2px$ . Een lijn door het punt  $(-\frac{1}{2}p, 0)$  raakt de parabool in punt  $A$ . Stel de vergelijking op van de verzameling van de punten  $A$ , als  $p$  veranderlijk is.

b. Op de parabool  $y^2 = 2x$  ligt een punt  $P$ . Het punt  $P'$  is het produktpunt van  $P$  bij vermenigvuldiging met een factor 2 ten opzichte van het punt  $(-3,0)$ .

Stel de vergelijking op van de verzameling van de punten  $P'$ , als  $P$  de gegeven parabool doorloopt.

c. De lijn met vergelijking  $2x + y = 6$  is een normaal van de parabool met vergelijking  $y^2 = 2px$ .

Bereken  $p$ .

B69-2

Gegeven zijn de punten  $P(4,0)$ ,  $Q(8,0)$  en een punt  $M$  op de  $Y$ -as.  $C_1$  is de cirkel, die  $M$  tot middelpunt heeft en die door  $P$  gaat.  $C_2$  is de cirkel met middellijn  $MQ$ .

De cirkels  $C_1$  en  $C_2$  snijden elkaar in de punten  $A$  en  $B$ .

a.  $M$  doorloopt de  $Y$ -as.

Bewijs, dat de lijnen  $AB$  door één punt gaan, en bereken de coördinaten van dit punt.

b. De lijnen  $AB$  en  $MP$  snijden elkaar in het punt  $S$ .

Stel de vergelijking op van de verzameling van de punten  $S$ , als  $M$  de  $Y$ -as doorloopt.

Teken deze verzameling.

### Jaar 1971 opgaven <sup>15</sup>

B71-1

Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel  $XOY$  is gegeven de hyperbool met vergelijking  $xy = 4$ .

a. Op de hyperbool ligt een punt  $P$ . De lijn  $OP$  snijdt de hyperbool behalve in  $P$  nog in een punt  $Q$ . De lijn door  $P$  evenwijdig aan de  $X$ -as en de lijn door  $Q$  evenwijdig aan de  $Y$ -as snijden elkaar in punt  $R$ .

Punt  $P$  doorloopt de hyperbool.

Stel de vergelijking op van de verzameling van de zwaartepunten van de driehoeken  $PQR$ .

b. Bereken de coördinaten van het punt  $A$  waarvoor geldt dat de poollijn van  $A$  ten opzichte van de hyperbool samenvalt met de poollijn van  $A$  ten opzichte van de parabool met vergelijking  $y^2 = 2x$ .

B71-2

$XOY$  is een rechthoekig assenstelsel. Een stelsel cirkels is gegeven door de vergelijking  $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 4\lambda^2 y = 0$  waarbij  $\lambda$  variabel is en  $\neq 0$  is.

a. Stel de vergelijking op van de verzameling van de middelpunten van de cirkels van het stelsel.

Teken deze verzameling.

b. Elk exemplaar van het stelsel snijdt de  $X$ -as in  $O$  en in een punt  $A$ . Bij elk exemplaar van het stelsel behoort een lijn  $p$  die dat exemplaar in  $A$  raakt.

Bewijs dat de lijnen  $p$  door een vast punt gaan en bereken de coördinaten van dat punt.

c. Door de waarden  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  worden twee cirkels van het stelsel gegeven.

Welke betrekking bestaat er tussen  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  als deze cirkels elkaar loodrecht snijden?

---

<sup>15</sup> Eindexamen van de schrijver dezes.

## Uitwerkingen examens analytische meetkunde

B61-4

a. Gegeven zijn de punten  $A(-9,0)$ ,  $B(15,0)$  en  $C(0,15)$ .

Bereken de coördinaten van het hoogtepunt  $H$ , het middelpunt  $M$  van de omschreven cirkel en het zwaartepunt  $Z$  van  $\triangle ABC$ .

b. Bewijs, dat de punten  $H$ ,  $M$  en  $Z$  op één lijn liggen.

4a.

Midden AB resp. BC is  $P(3,0)$  resp.  $Q(7.5,7.5)$ .

Vergelijking middelloodlijn van AB:  $x = 3$ .

Vergelijking middelloodlijn van BC:  $y = x$ .

Want rico lijn BC is  $-1$ . (\*)

Dat geeft het snijpunt:  **$M(3,3)$**

Zwaartepunt  $Z$  ligt op CP zo:  $\frac{|CZ|}{|ZP|} = \frac{2}{1}$  (@).

Kijk naar  $\triangle OPC$ . (@)

Er volgt:  $x_Z = \frac{2}{3}x_P = 2$  en:  $y_Z = \frac{1}{3}y_C = 5$ .

Dus:  **$Z(2,5)$**

Vergelijking hoogtelijn uit C:  $x = 0$ .

Vergelijking hoogtelijn uit A:  $y = x + 9$ .

Zie (\*). Dat geeft:  **$H(0,9)$**

4b.

Lijn door H en Z heeft rico:  $-2$ .

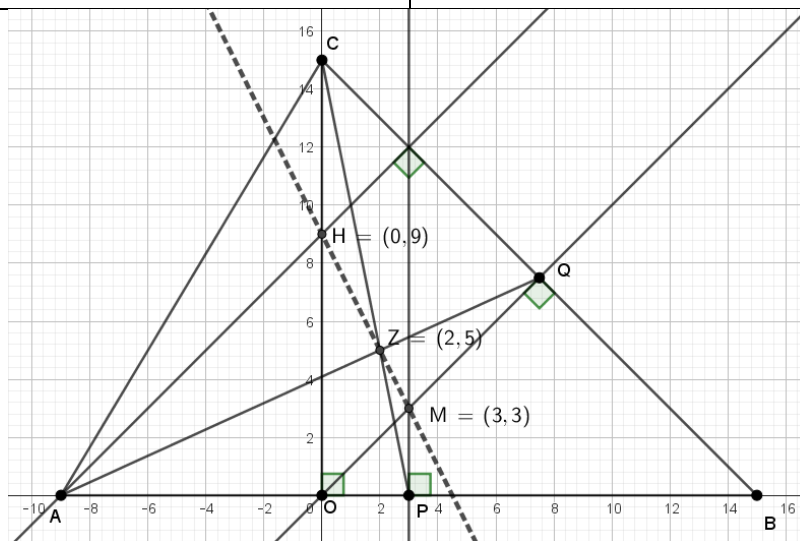
Via:  $rico = \frac{y_Z - y_H}{x_Z - x_H}$ . (@)

Lijn door H en M heeft rico:  $-2$ .

Dus die lijnen door H vallen samen en gaan door M én Z. Die punten liggen dus op één lijn.

Extra: Zie de figuur.

De lijn van 4b is gestippeld.



Opmerking: De lijn bij 4b heet de 'rechte van Euler.'

Niet gevraagd, maar goed te zien:  $|HZ| = 2 * |ZM|$ .

B61-5

Gegeven is de lijn  $y = 2x + 1$  en een punt  $A$  op deze lijn met  $x$ -coördinaat  $\lambda$ .

a. Stel de vergelijking op van de hyperbool, die de lijnen  $y + 2x = 0$  en  $y - 2x = 0$  als asymptoten heeft en door het punt  $A$  gaat.

b. Stel de vergelijking op van de raaklijn in  $A$  aan deze hyperbool.

c. Als we  $\lambda$  variabeel onderstellen, dan stelt de onder b gevonden vergelijking een stelsel lijnen voor. Bewijs, dat alle lijnen van dit stelsel door één punt gaan, en bereken de coördinaten van dit punt.

5a.

Hyperbool met de gegeven lijnen als asymptoten heeft vergelijking: (@)

$(y + 2x)(y - 2x) = c$ . Met  $c$  een reëel getal.

Punt  $A(\lambda, 2\lambda + 1)$  ligt daarop dus:

$$c = (2\lambda + 1)^2 - 4\lambda^2 = 4\lambda + 1.$$

De vergelijking van de hyperbool wordt:

$$y^2 - 4x^2 = 4\lambda + 1.$$

5b.

De raaklijn i.h.a. aan deze hyperbool door een punt  $P(x_1, y_1)$  is: (@)

$$yy_1 - 4xx_1 = 4\lambda + 1.$$

Dus door  $A$  wordt dat:

$$(2\lambda + 1)y - 4\lambda x = 4\lambda + 1.$$

5c. Noem dat punt  $P(p, q)$ .

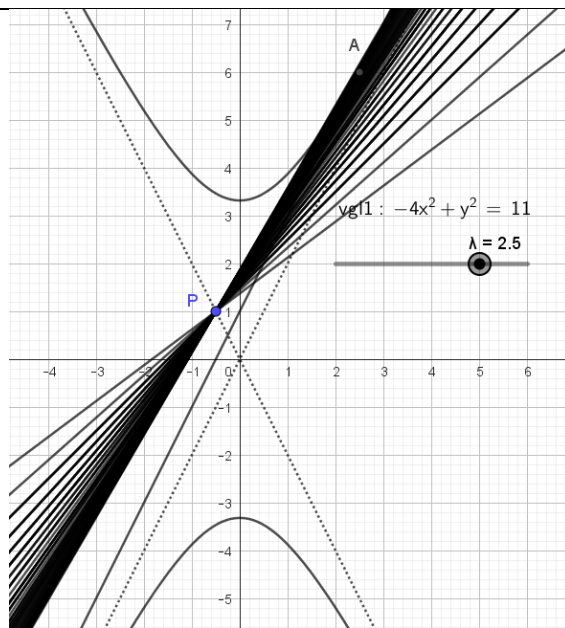
Dan moet de uitdrukking bij 5b (\*) onafhankelijk zijn van  $\lambda$  als  $p$  en  $q$  zijn ingevuld. (@)

Invulling geeft:  $\lambda(2q - 4p - 4) = 1 - q$ .

Als nu *én*  $(1 - q = 0)$  *én*  $(2q - 4p - 4 = 0)$  dan doet de  $\lambda$ -waarde er niet meer toe.

Dus:  $q = 1$  en  $p = -\frac{1}{2}$ .

Dus: alle lijnen van het stelsel van 5b gaan door het punt  $P(-\frac{1}{2}, 1)$ .



Eén hyperbool en het punt P.

(\*) Om 5c te kunnen maken moet dus 5b goed gedaan zijn: feitelijk basiskennis maar toch...

B61-6

Gegeven zijn het punt  $A(-2a, 0)$ , de lijn  $l$  met vergelijking  $x = \frac{1}{2}a$ , en de cirkel  $x^2 + y^2 = a^2$ . Hierin is  $a \neq 0$ . Neem een willekeurig punt  $P$  op  $l$ . De poollijn van  $P$  t.o.v. de gegeven cirkel snijdt de lijn  $AP$  in  $S$ .

Wat is de verzameling van de punten  $S$ , als  $P$  de lijn  $l$  doorloopt?

Neem  $\lambda$  als variabele. Dan  $P(\frac{1}{2}a, \lambda)$ .

De poollijn is dan (@):  $\frac{1}{2}ax + \lambda y = a^2$ . [1]

De lijn door A en P heeft vergelijking (@):  $y = \frac{2\lambda}{5a}(x + 2a)$ . [2]

Noem  $S(p, q)$ . Dus uit [2]:  $q = \frac{2\lambda}{5a}(p + 2a)$  [3]. En uit [1]:  $\frac{1}{2}ap + \lambda q = a^2$ .

$\lambda$  wegwerken gaat via eerst delen door  $a$  en dan vermenigvuldigen met  $(p + 2a)$ :

Dus:  $\frac{1}{2}p + \frac{\lambda}{a}q = a$ . Omdat  $a \neq 0$  ontstaat hier geen probleem.

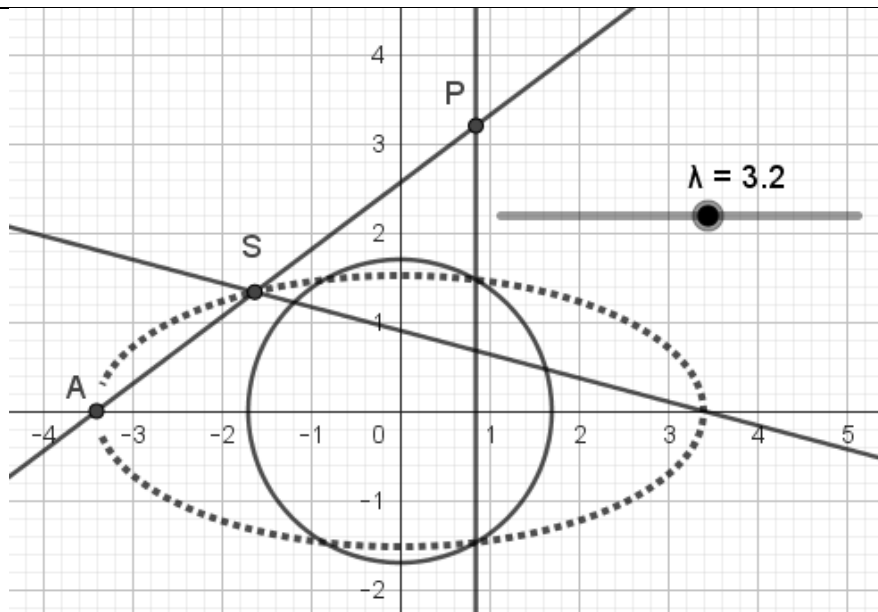
En dan:  $\frac{1}{2}p(p + 2a) + q\frac{\lambda}{a}(p + 2a) = a(p + 2a)$ .

Verder met [3]:  $\frac{1}{2}p(p + 2a) + q\frac{5}{2}q = a(p + 2a)$ .

Ofwel:  $\frac{1}{2}p^2 + \frac{5}{2}q^2 = 2a^2$ .

Blijkbaar ligt  $S$  op de kromme met vergelijking:  $x^2 + 5y^2 = 4a^2$ .

Extra: zie de figuur. Die kromme is een ellips.



B62-3

Gegeven is de parabool  $y^2 = 2px$  en het punt  $P$  op de richtlijn van deze parabool.

a. Bewijs, dat de poollijn van  $P$  t.o.v. de parabool door het brandpunt  $F$  gaat.

b. Deze poollijn snijdt de parabool in  $A$  en  $B$ .

Bewijs, dat  $PF$  een hoogtelijn van driehoek  $PAB$  is.

c. Wat is de verzameling van de middens van de raakkoorden  $AB$ , als  $P$  de richtlijn doorloopt?

3a. Brandpunt bij deze parabool is  $F(\frac{1}{2}p, 0)$ . (@)

De richtlijn heeft dan vergelijking:  $x = -\frac{1}{2}p$ . (@)

Met  $P(-\frac{1}{2}p, \lambda)$  op die richtlijn, volgt voor de poollijnvergelijking (@):  $yy_P = px + px_P$

Dus:  $\lambda y = px - \frac{1}{2}p^2$ . En  $F(\frac{1}{2}p, 0)$  ligt hier op, blijkt na invulling.

3b. De poollijn heeft rico:  $\frac{p}{\lambda}$  met  $\lambda \neq 0$ . [1]

De lijn door  $P$  en  $F$  heeft als rico (@):  $\frac{y_F - y_P}{x_F - x_P} = \frac{-\lambda}{p}$ . [2]

Uit {1} en {2} volgt: product =  $-1$ .

De lijnen  $AB$  en  $PF$  staan dus loodrecht op elkaar (@) ofwel  $PF$  is een hoogtelijn in  $\Delta PAB$ .

Bij [1]: als  $\lambda = 0$  dan is de vergelijking van de poollijn  $x = \frac{1}{2}p$  en van de lijn  $PF$   $y = 0$ . (X-as)

Deze twee lijnen staan ook loodrecht op elkaar dus ook voor dit geval:  $PF \perp AB$ .

3c. Met  $A(x_A, y_A)$  volgt:  $y_A^2 = 2px_A$  en  $yy_A = px + px_A$ .  $A$  op parabool en de raaklijn.

Analoog met  $B(x_B, y_B)$  volgt:  $y_B^2 = 2px_B$  en  $yy_B = px + px_B$ .

Als  $P$  op de richtlijn, dan  $PA$  loodrecht op  $PB$  (@?) dus (rico's):  $\frac{p}{y_A} * \frac{p}{y_B} = -1$ . [3]

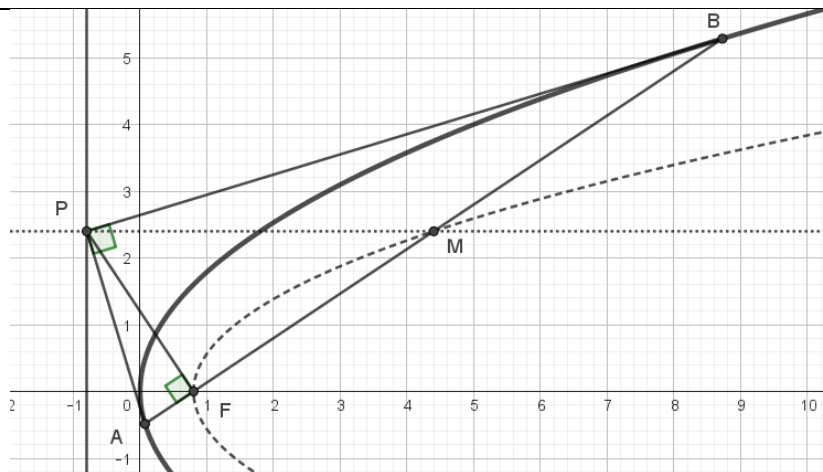
Midden van  $AB$  is  $M(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B)) = M(x_M, y_M)$ .

Er volgt:  $y_M^2 = \frac{1}{4}(y_A + y_B)^2 = \frac{1}{4}(y_A^2 + y_B^2) + \frac{1}{2}y_A y_B = \frac{1}{4}(2px_A + 2px_B) + \frac{1}{2}(-p^2)$ . Zie [3].

Dus:  $y_M^2 = p(\frac{x_A + y_B}{2}) - \frac{1}{2}p^2 = px_M - \frac{1}{2}p^2$ .

Ofwel:  $M$  ligt op de parabool met vergelijking:  $y^2 = px - \frac{1}{2}p^2$ .

Extra: in de figuur is de gestippelde kromme deze parabool. NB:  $PM \parallel X$ -as.



B62-4

Gegeven is de orthogonale hyperbool  $xy = 1$ .

a. Bewijs, dat de normalen van deze hyperbool een positieve richtingscoëfficiënt hebben.

b. Door een willekeurig punt  $P(a, \frac{1}{a})$  van de hyperbool trekt men twee onderling loodrechte lijnen.

Deze lijnen snijden de hyperbool behalve in  $P$  elk nog in een tweede punt; noem deze punten  $Q$  en  $R$ .  
Bewijs, dat de lijn door  $Q$  en  $R$  evenwijdig is aan de normaal in  $P$ .

4a.

$$xy = 1, \text{ dus } y = \frac{1}{x} \text{ en } y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Rico van een raaklijn in een punt  $T(x_T, y_T)$ :  $y' = -\frac{1}{x_T^2}$ . Er geldt zeker:  $x_T \neq 0, y_T \neq 0$ .

Rico van de normaal in zo'n punt  $T$  (@):  $y' = x_T^2$ . En deze waarde is altijd positief.

4b.

Rico van de normaal in  $P(a, \frac{1}{a})$ :  $y' = a^2$ . [1] Uit 4a.(\*)

Lijn door  $P$  heeft vergelijking (@):  $y - \frac{1}{a} = m(x - a)$ . [2] Met  $m$  de richtingscoëfficiënt.

De lijn hier loodrecht op heeft de vergelijking:  $y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{m}(x - a)$ . [3] Voorwaarde:  $m \neq 0$ . [4]

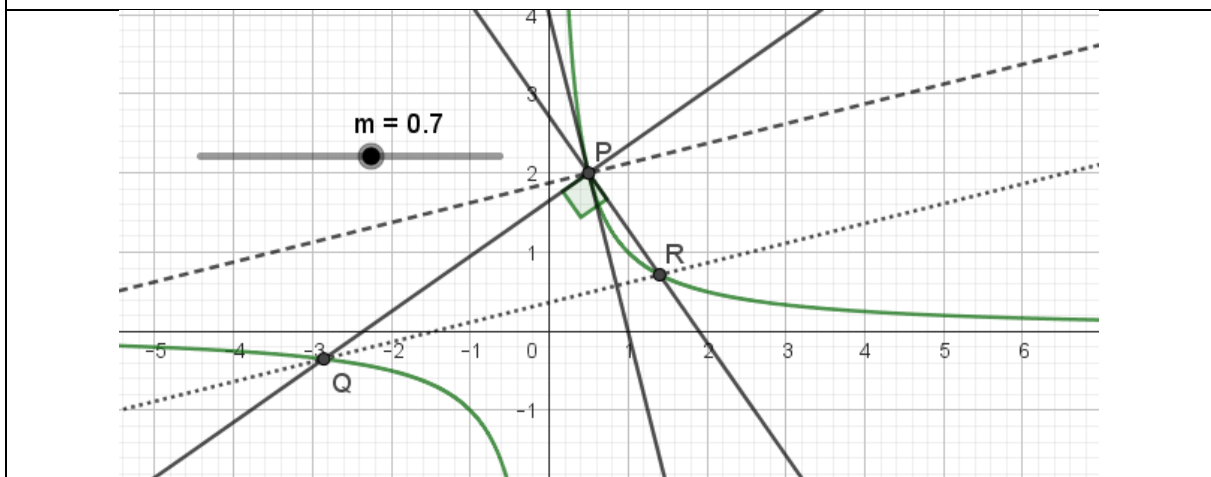
Snijden met [2] geeft:  $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = m(x - a)$ . Ofwel  $x = a$  (punt  $P$ ) ofwel  $xma = -1$  (punt  $Q$ ).

Dus  $Q(-\frac{1}{ma}, -ma)$ .

Analoog met [3]:  $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{m}(x - a)$ . Dat geeft  $R(\frac{m}{a}, \frac{a}{m})$ .

De rico van de lijn  $RQ$  is (@):  $\frac{y_R - y_Q}{x_R - x_Q} = \frac{\frac{am + \frac{a}{m}}{\frac{m}{a} + \frac{1}{ma}}}{\frac{m}{a} + \frac{1}{ma}} = a^2$ . Dus zie [1]: Lijn  $RQ$  // normaal in  $P$ .

Extra: In de figuur de streepjeslijn is de normaal, de stippellijn de lijn  $RQ$ .



(\*) Voor 4b moet dus 4a gelukt zijn en er wordt geen beperking gegeven zoals bij [4].

In het geval  $m = 0$  zijn er wel twee onderling loodrechte lijnen, maar geen punten  $Q$  en  $R$ .

Er had dus bij moeten staan: de twee lijnen zijn niet evenwijdig aan de assen.

B62-5

Gegeven zijn de cirkel  $x^2 + y^2 = r^2$  en op de positieve X-as het punt  $A(a, 0)$ ;  $a \neq r$ .

Het punt  $P(x_1, y_1)$  is een punt van de cirkel. De lijn  $OP$  snijdt de middelloodlijn  $l$  van  $AP$  in  $S$ .

a. Stel de vergelijking van  $l$  op.

b. Wat is de verzameling van de punten  $S$ , als  $P$  de cirkel doorloopt?

c. Wat stelt de onder b gevonden vergelijking voor, als  $a < r$ , en wat als  $a > r$  is?

5a. Het midden van  $AP$ :  $M(\frac{1}{2}(a + x_1), \frac{1}{2}y_1)$ .

Rico van  $AP$  (@):  $-\left(\frac{y_1}{a-x_1}\right) = m$ .

Dus vergelijking van  $l$  met rico  $= -\frac{1}{m}$ .

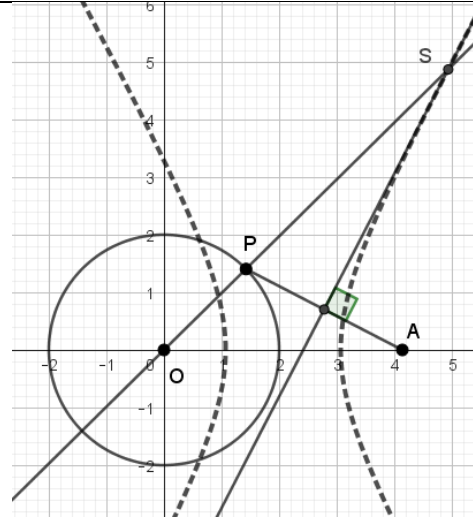
$y - \frac{1}{2}y_1 = \left(\frac{a-x_1}{y_1}\right)\left(x - \frac{1}{2}(a + x_1)\right)$ .

Uitgewerkt:

$yy_1 = (a - x_1)x - \frac{1}{2}(a^2 - x_1^2 - y_1^2)$ .

Ofwel:  $yy_1 = (a - x_1)x + \frac{1}{2}(r^2 - a^2)$ .

Extra: Figuur bij 5b en 5c en  $a > r$ .



5b. Snijden met lijn  $l$  uit 5a geeft punt  $S(p, q)$ :

Die lijn is een middelloodlijn dus:  $|SP| = |SA|$ . Gevolg:  $|\sqrt{p^2 + q^2} - r| = \sqrt{(p - a)^2 + q^2}$ .

Dit kwadrateren geeft:  $2r\sqrt{p^2 + q^2} = 2pa - a^2 + r^2$ .

En nogmaals kwadrateren:  $4r^2(p^2 + q^2) = 4p^2a^2 + 4pa(r^2 - a^2) + (r^2 - a^2)^2$ .

Dit geeft al een vergelijking van de kromme waarop  $S$  ligt: kwadratisch dus een kegelsnede.

Vervang  $(p, q)$  door  $(x, y)$  om de vergelijking te krijgen.

Verder uitgewerkt:  $4x^2(r^2 - a^2) - 4xa(r^2 - a^2) + 4r^2y^2 = (r^2 - a^2)^2$ . [1]

Er volgt:  $(2x - a)^2 + \frac{4r^2}{r^2 - a^2}y^2 = r^2$ . Er is gedeeld door  $(r^2 - a^2)$  etc.

En dan tenslotte:  $\frac{4\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2}{r^2} + \frac{4y^2}{r^2 - a^2} = 1$ .

Dit is de gewenste standaardvergelijking van een kegelsnede bij analytische meetkunde.

5c.

Er is géén  $xy$  -term dus de informatie komt uit de waarden bij de kwadratische termen (@):

Zie bij [1]:  $4r^2 * 4(r^2 - a^2) > 0$ : *ellips*;  $4r^2 * 4(r^2 - a^2) < 0$ : *hyperbool*.

Dus bij  $a < r$ : *ellips*, bij  $a > r$ : *hyperbool*.

Overigens bij bijvoorbeeld  $a > r$ :

$|SO| - |SA| = |SP| + |PO| - |SA| = |PO| = r$ . Constant, dus  $S$  op een hyperbool(-tak).

Dit is namelijk de definitie bij analytische meetkunde van een hyperbool. (@)

Analoog bij  $a < r$ .

Daarmee zou 5c te doen zijn als 5b niet gelukt zou zijn, maar er staat wel

'de onder b gevonden vergelijking' dus is verondersteld, dat 5b gelukt is.

B63-2

Gegeven zijn de ellips  $x^2 + 4y^2 = 16$  en de lijn  $l$  met vergelijking  $x - 2y + 4 = 0$ .

a.  $P$  is een punt van  $l$ , en  $p$  is de poollijn van  $P$  ten opzichte van de ellips. Gegeven is, dat  $p$  loodrecht staat op  $l$ . Bereken de coördinaten van  $P$ .

b.  $Q$  is een punt van  $l$ , en  $q$  is de poollijn van  $Q$  ten opzichte van de ellips.  $S$  is het snijpunt van  $q$  en de lijn  $OQ$ . Wat is de verzameling van de punten  $S$ , als  $Q$  de lijn  $l$  doorloopt?

Teken deze verzameling.

2a. Noem  $P(x_P, y_P)$ . Dan volgt met  $P$  op  $l$ :  $x_P - 2y_P + 4 = 0$ . [1] Rico lijn  $l$ :  $\frac{1}{2}$ .

Vergelijking poollijn (@)  $p$ :  $xx_P + 4yy_P = 16$ . Rico lijn  $p$ :  $-\frac{x_P}{4y_P}$ .

Omdat  $p \perp l$  volgt (@):  $\frac{1}{2} * \left(-\frac{x_P}{4y_P}\right) = -1$ . Dus:  $x_P = 8y_P$ . [2]

Uit [1] en [2] volgt:  $y_P = -\frac{2}{3}$ ;  $x_P = -\frac{16}{3}$ . Gevolg:  $P\left(-\frac{16}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ .

2b.

$Q(x_Q, y_Q)$  op lijn  $l$ :  $x_Q - 2y_Q + 4 = 0$ . [1] Vergelijking poollijn  $q$ :  $xx_Q + 4yy_Q = 16$ .

Vergelijking lijn  $OQ$ :  $y = \frac{y_Q}{x_Q}x$ . Bij  $Q(0,2)$ :  $x = 0$ . En dan voor de poollijn:  $y = 2$ .

Punt  $S(a, b)$  op lijn  $q$  en  $OQ$ . Bij  $Q(0,2)$  hoort  $S(0,2)$ . (\*)

Dus:

[2]  $b = \frac{y_Q}{x_Q}a$ . En [3]:  $ax_Q + 4by_Q = 16$ .

Uit [1]:  $x_Q = 2y_Q - 4$  en dit ingevuld in [3]:  $a(2y_Q - 4) + 4by_Q = 16$ .

Dat geeft:  $y_Q = \frac{16+4a}{2a+4b}$ . En daarmee bij [1]:  $x_Q = \frac{32-16b}{2a+4b}$ .

Dit alles ingevuld in [2] geeft:

$b = \frac{16+4a}{32-16b}a$  ofwel:  $8b - 4b^2 = 4a + a^2$ .

Met kwadraat afsplitsen (@) volgt:  $(a + 2)^2 + 4(b - 1)^2 = 8$ .

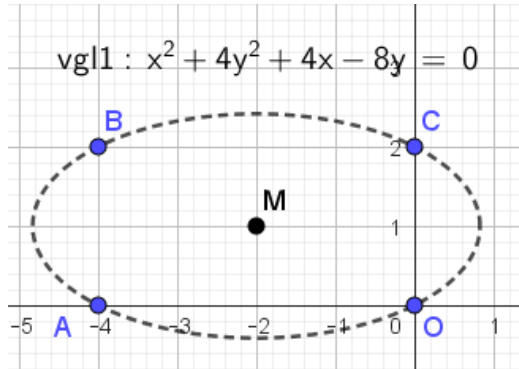
Dus punt  $S$  ligt op de ellips met vergelijking:  $\frac{(x+2)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$ . (\*) Ook  $S(0,2)$  hierop!

Tekening van de verzameling is meer een schets van die ellips.

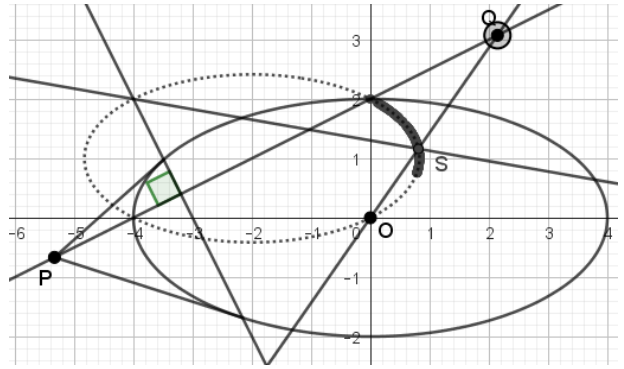
mp  $M(-2,1)$ , toppen  $(-2, 1 \pm \sqrt{2})$  en  $(-2 \pm 2\sqrt{2}, 1)$ .

Belangrijk te zien in de tekening:  $O(0,0)$ ,  $A(-4,0)$ ,  $B(-4,2)$ ,  $C(0,2)$  op deze ellips!

2b Met GeoGebra ...



2ab



B63-3

De vergelijking  $x - py + 2p^2 = 0$  stelt, bij veranderlijke  $p$ , een verzameling lijnen voor.

a. Bewijs, dat elke lijn van deze verzameling de parabool  $y^2 = 8x$  raakt, en dat elke raaklijn van deze parabool tot de gegeven verzameling behoort.

b. Wat is de verzameling van de middens van de koorden, die de hyperbool  $xy = 8$  van de gegeven verzameling behorende lijnen afsnijdt?

Teken deze verzameling.

3a.

Snij de lijn met de parabool. Dat geeft:

$$y^2 = 8(py - 2p^2).$$

Discriminant van deze v.k.v. (@):

$64p^2 - 64p^2 = 0$ . De lijn snijdt dus in één punt en is niet evenwijdig aan de as:  $\text{rico} = \frac{1}{p} \neq 0$ .

Dus: elke lijn ... raakt de parabool.

Met  $P(\frac{b^2}{8}, b)$  op de parabool is de vergelijking van de raaklijn (@):

$$by = \frac{1}{2}b^2 + 4x.$$

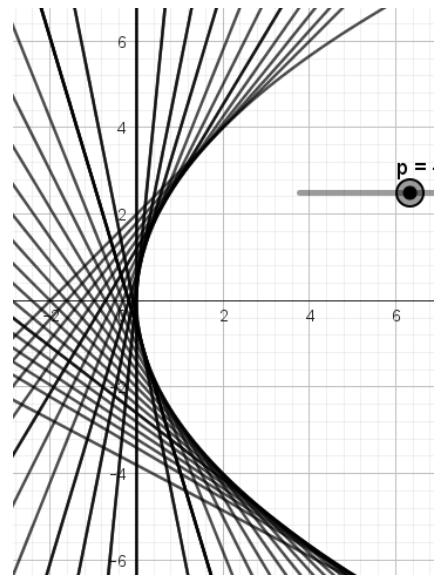
Dus:  $x - \frac{1}{4}by + \frac{1}{8}b^2 = 0$ . [1]

Met  $p = \frac{1}{4}b$  volgt:  $2p^2 = \frac{1}{8}b^2$ .

En [1] wordt:  $x - py + 2p^2 = 0$ .

Dus ja, bij punt P hoort een raaklijn uit de verzameling van gegeven lijnen.

Extra: een deel van de verzameling lijnen.



3b.

Snij de hyperbool met de lijn. Dat geeft:  $y(py - 2p^2) = 8$ . Dus:  $py^2 - 2p^2y - 8 = 0$ . [1]

Er zijn oplossingen mits voor discriminant(@):  $D = 4p^4 + 32p \geq 0$ .

Dus voor:  $p \geq 0$  of  $p \leq -2$ .

Maar voor  $p = 0$  snijdt de Y-as ( $x = 0$ ) de hyperbool niet, dus er geldt:  $p > 0$  of  $p \leq -2$ . [2]

Noem de snijpunten  $A(x_1, y_1)$  en  $B(x_2, y_2)$  en het midden  $M(x_M, y_M)$ .

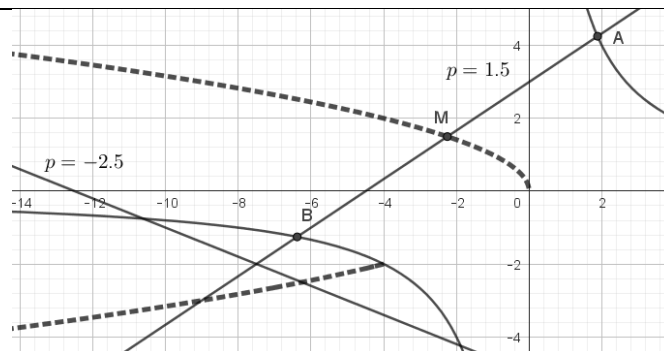
Oplossingen van [1]:  $y_{1,2} = \frac{2p^2 \pm \sqrt{D}}{2p}$  en dan:  $x_{1,2} = py_{1,2} - 2p^2 = -p^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{D}$ .

Dan volgt:  $x_M = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -p^2$ . En:  $y_M = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = p$ . [3]

Blijkbaar geldt, dat M ligt op de kromme met vergelijking:  $y^2 = -x$ .

Maar wel volgens [2] en [3]:  $y > 0$  of  $y \leq -2$ .

Dat geeft met *Geogebra* een parabool (gestippeld) met een stuk eruit weggelaten.



B64-2

Gegeven is de ellips  $x^2 + 4y^2 = 4$ .  $A$  is het snijpunt van de ellips met de negatieve X-as.  $P(0, p)$  is een willekeurig punt van de Y-as. De poollijn van  $P$  t.o.v. de ellips snijdt de lijn  $AP$  in  $S$ .

- Wat is de verzameling van de punten  $S$ , als  $p$  variabel is?
- Wat is de verzameling van de punten  $S$ , als  $|p| \geq 1$ ?
- Voor welke waarden van  $a$  heeft de lijn  $y = a(x - 2)$  een punt met de onder b gevonden verzameling gemeen?

2a.

Met:  $A(-2,0)$  is de vergelijking lijn  $AP$  (@):  $y = \frac{1}{2}p(x + 2)$ .

Poollijnvergelijking (@):  $4py = 4$ .

$S(x_1, y_1)$  op beide lijnen dus:  $y_1 = \frac{1}{2y_1}(x_1 + 2)$ . Dus:  $y_1 \neq 0$  dus  $x_1 \neq -2$ .

$S$  blijkt op de parabool met vergelijking:  $y^2 = \frac{1}{2}(x + 2)$  maar  $x \neq -2$ .

2b.

Als  $|p| \geq 1$  dan dus  $p \leq -1$  of  $p \geq 1$ . Dus met  $y = \frac{1}{p}$  volgt:  $-1 \leq y \leq 1$ .

En dan:  $0 \leq y^2 \leq 1$ . Verder met  $x = 2y^2 - 2$  uit 2a. (\*)

Er volgt:  $-2 \leq x \leq 0$ .

Bij 2a gevonden:  $x \neq -2$ . (\*)

Dus  $S$  blijkt op de parabool met vergelijking:  $y^2 = \frac{1}{2}(x + 2)$  met  $-2 < x \leq 0$ .

2c.

Uit 2b (\*): dat paraboolstuk heeft als 'eindpunten':  $B(0,1)$  en  $C(0,-1)$ .

En punt  $A(-2,0)$  doet niet mee.

De lijnen met vergelijking  $y = a(x - 2)$  gaan allemaal door  $D(2,0)$ .

Dat geeft:

lijn  $DB$  met vergelijking:  $y = -\frac{1}{2}(x - 2)$ , dus  $a = -\frac{1}{2}$ .

lijn  $DC$  met vergelijking:  $y = \frac{1}{2}(x - 2)$ , dus  $a = \frac{1}{2}$ .

lijn  $DA$  ( $y = 0$ ) doet niet mee dus  $a \neq 0$ .

Er zijn dus snijpunten met het paraboolstuk als geldt:  $-\frac{1}{2} \leq a < 0$  of  $0 < a \leq \frac{1}{2}$ .

(\*) 2a moet goed gedaan zijn om 2b én 2c te kunnen maken.

B64-3

Gegeven is de parabool  $y^2 = 2x$ . Op deze parabool liggen de punten  $A(2,2)$ ,  $B(8,4)$  en  $C(18,-6)$ .

a. Bewijs, dat de normalen in de punten  $A, B$  en  $C$  van de parabool door één punt  $S$  gaan.

Bereken de coördinaten van  $S$ .

b. Stel de vergelijking op van de parabool, die de X-as als as van symmetrie heeft en die gaat door de middens van de lijnstukken  $AB$  en  $AC$ .

Bewijs, dat ook het midden van het lijnstuk  $BC$  op deze parabool ligt.

c. Stel de vergelijking op van de hyperbool, waarvan de ene asymptoot samenvalt met de X-as, de andere asymptoot evenwijdig is aan de Y-as en die door de punten  $A$  en  $B$  gaat.

Bewijs, dat ook de punten  $C$  en  $S$  op deze hyperbool liggen.

3a.

Raaklijn te A (@):  $2y = 2 + x$ . Rico =  $\frac{1}{2}$ . Normaal in A:  $y - 2 = -2(x - 2)$ ;  $y = -2x + 6$ . [1]

Raaklijn te B:  $4y = 8 + x$ . Rico =  $\frac{1}{4}$ . Normaal in B:  $y - 4 = -4(x - 8)$ ;  $y = -4x + 36$ . [2]

Raaklijn te C:  $-6y = 18 + x$ . Rico =  $-\frac{1}{6}$ . Normaal in C:  $y + 6 = 6(x - 18)$ ;  $y = 6x - 114$ . [3]

Snijpunt van [1] en [2]: **S(15, -24)**. En S ook op [3], vul de coördinaten maar in.

3b.

In het algemeen heeft zo'n parabool de vergelijking (@):  $y^2 = ax + b$ .

Met midden van AB dus (@)  $M(5,3)$  hierop geeft:  $9 = 5a + b$ .

Met midden AC dus  $N(10, -2)$  hierop geeft:  $4 = 10a + b$ .

Dit stelsel opgelost (@) geeft:  $a = -1$  en  $b = 14$ .

Dus de parabool door M en N heeft vergelijking:  **$y^2 = -x + 14$** .

Het midden van BC is  $P(13, -1)$  en inderdaad, deze  $(x, y)$  voldoen aan de vergelijking.

Dus punt P ligt ook op de parabool.

3c.

In het algemeen heeft zo'n hyperbool de vergelijking (@):  $y(x - p) = q$ .

Punt A hierop dus:  $4 - 2p = q$ . Punt B hierop dus:  $32 - 4p = q$ .

Dit stelsel opgelost (@) geeft:  $p = 14$  en  $q = -24$ .

Dus de hyperbool door A en B heeft vergelijking:  **$y(x - 14) = -24$** .

Dat C en S (\*) hierop liggen, volgt na invulling.

(\*) S moet dus bekend zijn ofwel 3a moet gelukt zijn.

NB: 3b en 3c testen feitelijk dezelfde kennis en vaardigheid.

B65-2

Gegeven is de bundel cirkels  $x^2 + y^2 - 8 + \lambda(x + y) = 0$ .

a. Bereken de coördinaten van de basispunten van de bundel.

Wat is de verzameling van de middelpunten van de cirkels van de bundel?

b. Stel de vergelijking op van die cirkel van de bundel, welke de cirkel, waarvoor  $\lambda = 2$ , loodrecht snijdt.

c. Elke cirkel van de bundel heeft een middellijn met richtingscoëfficiënt  $-1$ .

Wat is de verzameling van de eindpunten van deze middellijnen?

2a.

Basispunten zijn punten die op elk object van de bundel liggen (@).

Dat betekent onafhankelijk van de  $\lambda$ -waarde.

Dan geldt:  $x + y = 0$  én  $x^2 + y^2 = 8$ . Ofwel:  $2x^2 = 8$  en  $y = -x$ .

Dat geeft:  **$A(2, -2)$  en  $B(-2, 2)$** .

De bundel in te herschrijven:  $(x + \frac{1}{2}\lambda)^2 + (y + \frac{1}{2}\lambda)^2 = 8 + \frac{1}{2}\lambda^2$ .

Dus bij keuze van  $\lambda$  hoort:  $x_{mp} = -\frac{1}{2}\lambda$  en  $y_{mp} = -\frac{1}{2}\lambda$ .

Blijkbaar liggen de middelpunten op de lijn met vergelijking:  $y = x$ .

2b.

De eerste cirkel  $c_1$  heeft vergelijking:  $x^2 + y^2 - 8 + 2x + 2y = 0$

De tweede cirkel  $c_2$  snijdt deze cirkel in A én B. (@)

Rico raaklijn aan  $c_1$  (@) in  $A(2, -2)$ :  $2 * 2 + 2 * (-2)y' + 2 + 2y' = 0$ ;  $y' = 3$ .

Rico raaklijn aan  $c_2$  in  $A(2, -2)$ :  $4 - 4y' + \lambda + \lambda y' = 0$ . Dus:  $y' = \frac{4+\lambda}{4-\lambda}$ .

Loodrecht snijden dus (@):  $3 * \frac{4+\lambda}{4-\lambda} = -1$ . Dat geeft:  $\lambda = -8$ .

Dus de vergelijking van  $c_2$  is:  **$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 40$** .

Alle cirkels liggen symmetrisch om de lijn met vergelijking:  $y = x$ .

Dus ook te B snijden de twee cirkels loodrecht.

2c.

Zo'n middellijn heeft dan vergelijking (@):

$$y + \frac{1}{2}\lambda = -1 \left( x + \frac{1}{2}\lambda \right);$$

Dus:  $\lambda = -(x + y)$ .

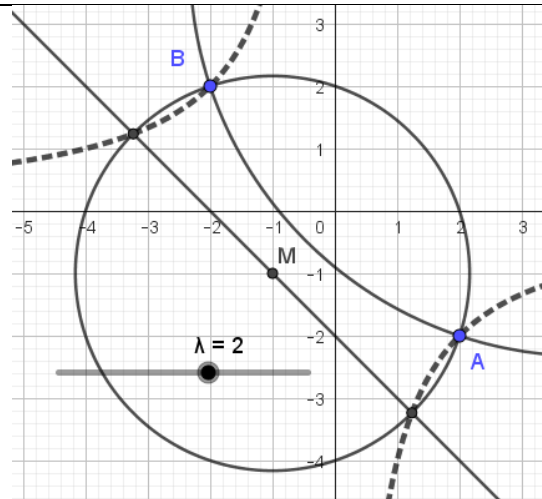
Snijden met de cirkel geeft twee snijpunten waarvoor geldt:

$$x_1^2 + y_1^2 - 8 - (x_1 + y_1)(x_1 + y_1) = 0.$$

Ofwel:  $-8 - 2x_1y_1 = 0$ .

De snijpunten liggen dus op de hyperbool met vergelijking:  **$xy = -4$** .

Extra: een deel van de cirkel uit 2b die loodrecht snijdt. En stukken van de hyperbool.



B65-3

Gegeven zijn de parabool  $y^2 = 4x$  en de cirkel  $(x - 2)^2 + y^2 = 8$ .  $V$  is de verzameling van de raaklijnen aan de parabool, waarvan het raakpunt binnen de cirkel ligt.

- a. Stel de vergelijkingen op van de raaklijnen aan de parabool, die een afstand  $3\frac{1}{2}$  tot het punt  $(4,0)$  hebben. Behoren deze raaklijnen tot de verzameling  $V$ ?
- b. Wat is de verzameling van de punten, waarvan de poollijn ten opzichte van de cirkel tot  $V$  behoort. Teken deze verzameling.

3a. De punten op de parabool binnen de cirkel zijn te vinden. Eerst snijden geeft:

$$x^2 - 4x + 4 + 4x = 8; \text{ dus: } x = 2. \text{ NB: } x = -2 \text{ voldoet niet want } x = \frac{1}{4}y^2 \geq 0.$$

Snijpunten zijn:  $A(2, -2\sqrt{2})$  en  $B(2, +2\sqrt{2})$ .

Blijkbaar hebben de gevraagde raakpunten  $x$ -coördinaat  $< 2$ . [1]

Punten op afstand 3.5 van P liggen op de cirkel met vergelijking:  $(x - 4)^2 + y^2 = 12.25$ .

Snijden met de parabool geeft:  $(x - 4)^2 + 4x = 12.25$ ; Ofwel:  $x^2 - 4x + 3.75 = 0$

$$\text{Dus: } x = 2 \pm \frac{1}{2}.$$

Raakpunten binnen de cirkel zijn dan  $D(1.5, -\sqrt{6})$  en  $E(1.5, +\sqrt{6})$ . Zie [1].

Raakpunten buiten de cirkel zijn dan  $C(2.5, -\sqrt{10})$  en  $F(2.5, +\sqrt{10})$ . Zie [1].

Vergelijking van raaklijn aan de parabool (@):  $yy_1 = 2x + 2x_1$ . Bij raakpunt  $R(x_1, y_1)$ .

Dus de raaklijnen die **wel** tot  $V$  behoren zijn de raaklijnen door D en E.

Dat geeft de vergelijkingen:  $\pm y\sqrt{6} = 2x + 3$ .

Raaklijnen die **niet** tot  $V$  behoren zijn de raaklijnen door C en F.

Dat geeft de vergelijkingen:  $\pm y\sqrt{10} = 2x + 5$ .

3b. Noem  $S(x_1, y_1)$  zo'n punt. De poollijnvergelijking is dan (@):  $(x_1 - 2)(x - 2) + yy_1 = 8$ .

Ofwel:  $yy_1 + (x_1 - 2)x - 4 - 2x_1 = 0$ . [2]

Snijden met de parabool moet één snijpunt geven waarvan de  $x$ -coördinaat  $< 2$ . (Zie 3a)

Dus:  $4yy_1 + (x_1 - 2)y^2 - 4(4 + 2x_1) = 0$ . Discriminant =  $16y_1^2 + 16(4 + 2x_1)(x_1 - 2) = 0$ .

Dus S ligt op de ellips met vergelijking:  $y^2 + 2x^2 = 8$ .

Te A en B zijn raaklijnen aan de parabool de 'grenzen' voor de poollijnen uit S. (Zie 3a)

De raaklijn te A ( $-2\sqrt{2}y = 2x + 4$ ) is de poollijn van S, zie [2]. Dus dat punt S doet niet mee.

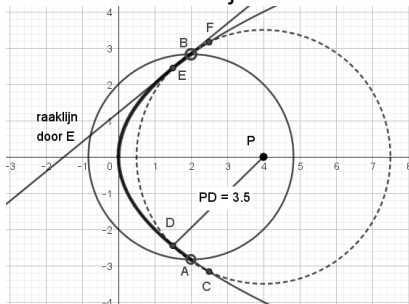
Dat geeft:  $S(0, -2\sqrt{2})$ . Analoog voor B volgt:  $S(0, +2\sqrt{2})$  doet niet mee.

Blijkbaar geldt voor zo'n poollijn [2] van S:  $|rico| > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ . En dat is zo indien  $x_S < 0$ .

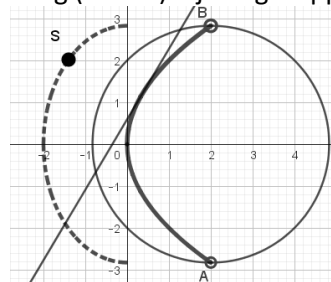
Controle voor  $S(-\sqrt{2}, +2)$ :  $rico = \frac{2+\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

Dus: S op de ellips met vergelijking  $y^2 + 2x^2 = 8$  met  $x < 0$ .

Extra bij 3a.



Tekening (schets) bij 3b: gestippeld.



B66-2

Gegeven is de parabool  $y^2 = 2x$ .

- a. Voor welke punten  $P$  van de lijn  $x - y + 2 = 0$  geldt, dat de poollijn van  $P$  ten opzichte van deze parabool loodrecht staat op de lijn  $OP$ ?
- b. Wat is de verzameling van de toppen van de parabolen, die de gegeven parabool in het punt  $(2,2)$  loodrecht snijden en die een symmetrie-as hebben, die evenwijdig is met de X-as of met de X-as samenvalt?

2a.

Neem  $P(x_1, y_1)$ : dus rico lijn  $OP$  (@):  $\frac{y_1}{x_1}$ . Met  $P(0,2)$  volgt voor  $OP$ :  $x = 0$ . [1]

$P$  op de gegeven lijn dus:  $x_1 - y_1 + 2 = 0$ . [2]

Vergelijking van de poollijn van  $P$  t.o.v. de parabool (@):  $yy_1 = x + x_1$ . Rico =  $\frac{1}{y_1}$ .

Loodrechte stand geeft voor de rico's (@):  $\frac{y_1}{x_1} * \frac{1}{y_1} = -1$ . Dus  $x_1 = -1$  (en  $y_1 \neq 0$ ). [2]

Dat geeft alvast een punt  $P_1(-1, 1)$ .

[1] apart bekeken: poollijn heeft vergelijking:  $2y = x$ . Dus niet loodrecht op de lijn  $OP$ .

[2] apart bekeken: poollijn  $m$  heeft vergelijking:  $x = -x_1$ . Lijn  $m$  loopt verticaal.

Vergelijking  $OP$ :  $y = 0$ . De X-as en dus loodrecht op lijn  $m$ . Dat geeft punt  $P_2(-2, 0)$ .

2b.

Parabolen die aan gevraagde voldoen hebben vergelijking (@):  $(y - a)^2 = bx + c$ .  $a, b, c$  uit  $\mathbb{R}$ .

Door  $S(2,2)$  dus:  $(2 - a)^2 = 2b + c$  [3]

Raaklijn in  $S$   $((2 - a)(y - a) = \frac{b}{2}x + b + c)$  heeft rico(@) =  $\frac{b}{4-2a}$ . Met  $a \neq 2$ .

Raaklijn in  $S$  aan de gegeven parabool ( $2y = x + 2$ ) rico (@) =  $\frac{1}{2}$ .

Loodrechte stand dus er volgt (@):  $\frac{b}{4-2a} * \frac{1}{2} = -1$ . Dus:  $b = 4a - 8$ .

En met [3] volgt:  $c = a^2 - 12a + 20$ .

De parabolen hebben dus als vergelijking:

$(y - a)^2 = (4a - 8)x + (a^2 - 12a + 20)$ . Met  $a \in \mathbb{R}$ .

De top van zo'n parabool (@):  $T(\frac{1}{4}(10 - a), a)$  als  $a \neq 2$ .

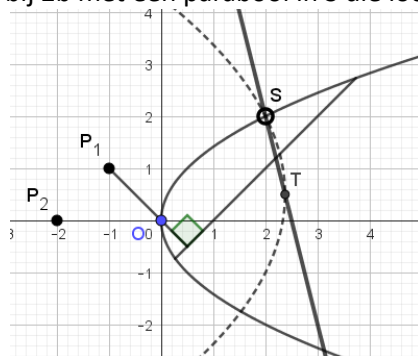
Dus de toppen liggen op de lijn met vergelijking:  $y + 4x = 10$ . [4]

Maar bij  $a = 2$  geeft dat de parabool  $(y - 2)^2 = 0$ . Die doet niet mee.

Dat is overigens een 'ontaarde' parabool, een lijn met vergelijking:  $y = 2$ .

Dus bij [4] geldt: de lijn hierbij heeft bij  $S(2,2)$  een 'gat'.  $(x, y) \neq (2,2)$ .

Extra: de lijn bij 2b met één parabool in  $S$  die loodrecht snijdt.



B66-3

Gegeven is de bundel cirkels  $x^2 + y^2 - 16 - 2\lambda(x - 4) = 0$ .

a. Bewijs, dat de bundel één basispunt heeft.

b. Welke exemplaren van de bundel raken de lijn  $x\sqrt{2} - 4y = 0$ ?

c. Uit het middelpunt van elk exemplaar van de bundel laat men de loodlijn  $l$  neer op de machtlijn  $m$  van dat exemplaar en de cirkel  $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 0$ . Het snijpunt van  $l$  en  $m$  is  $S$ .

Wat is de verzameling van de punten  $S$ ?

3a. Basispunten zijn punten die op elk object van de bundel liggen (@).

Dat betekent onafhankelijk van de  $\lambda$ -waarde.

Dat is zo indien  $x - 4 = 0$  én  $x^2 + y^2 - 16 = 0$ . Dat geeft één basispunt:  $B(4, 0)$ .

3b. Snijdt de gegeven lijn met de bundel cirkels.

Er moet één snijpunt zijn, het raakpunt, en die  $\lambda$ -waarden zijn te vinden.

De v.k.v. wordt (@):  $x^2 + \frac{1}{8}x^2 - 16 - 2\lambda(x - 4) = 0$ .

Discriminant =  $4\lambda^2 + 4 * \frac{9}{8} * (16 - 8\lambda) = 0$  ofwel:  $\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$ . (@)

Dus:  $(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0$ .

Bij  $\lambda = 3$  hoort de cirkel met vergelijking:  $x^2 + y^2 - 6(x - 4) = 16$  ofwel  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ .

Bij  $\lambda = 6$  hoort de cirkel met vergelijking:  $x^2 + y^2 - 12(x - 4) = 16$  ofwel  $(x - 6)^2 + y^2 = 4$ .

3c. De cirkels van de bundel hebben als middelpunt  $M(\lambda, 0)$ . (@)

De vergelijking van de machtlijn is (@):  $(2\lambda + 4)x - 8y - 8\lambda + 16 = 0$ .

Herschreven:  $2(\lambda + 2)x - 8y - 8(\lambda - 2) = 0$ . [1]

De gegeven cirkel heeft middelpunt  $N(-2, 4)$ .

De centrale lijn  $MN$  heeft vergelijking:  $y - 4 = -\frac{4}{\lambda + 2}(x + 2)$ . [2]

Punt  $S(x_1, y_1)$  is het snijpunt van  $MN$  met de machtlijn: die twee staan loodrecht op elkaar (@).

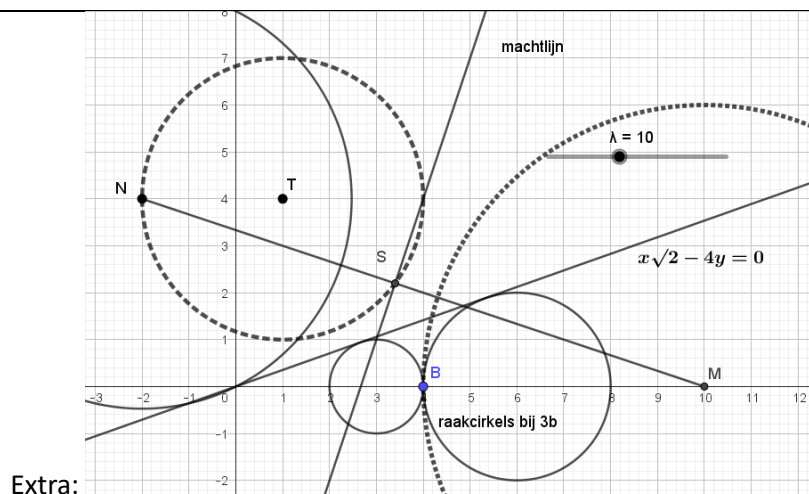
Uit [2] volgt:  $\lambda + 2 = \frac{-4x_1 - 8}{y_1 - 4}$  en daarmee:  $\lambda - 2 = \frac{-4x_1 - 4y_1 + 8}{y_1 - 4}$ .

Dit alles ingevuld in [1] om de parameter  $\lambda$  kwijt te raken.

Er volgt:  $-8 \frac{x_1 + 2}{y_1 - 4} x_1 - 8y_1 - 8 \frac{8 - 4x_1 - 4y_1}{y_1 - 4} = 0$  dus:  $x_1(x_1 + 2) + y_1(y_1 - 4) - 4x_1 - 4y_1 + 8 = 0$ .

Dat geeft de vergelijking van een cirkel:  $x^2 - 2x + y^2 - 8y + 8 = 0$ . Punt  $S$  ligt hierop.

Ofwel:  $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$ . De cirkel heeft mp  $T(1, 4)$  en straal = 3.



B67-2

- Gegeven zijn de punten  $A(4,0)$  en  $B(0,2\lambda)$ ;  $\lambda \neq 0$ . Van drie cirkels  $C_1, C_2$  en  $C_3$  is gegeven:  $C_1$  gaat door  $A$  en raakt de  $Y$ -as in  $O$ ;  $C_2$  gaat door  $B$  en raakt de  $X$ -as in  $O$ ;  $C_3$  heeft middelpunt  $O$  en straal  $|\lambda|$
- a. Elk tweetal van deze cirkel heeft een machtlijn. Bewijs dat deze drie machtlijnen door één punt  $K$  gaan. Wat is de verzameling van de punten  $K$  als  $\lambda$  veranderlijk is?
- b. Voor welke waarden van  $\lambda$  ligt  $K$  binnen de cirkels  $C_1, C_2$  en  $C_3$ ?

2a.

Vergelijkingen van de cirkels (@):

$$C_1: (x-2)^2 + y^2 = 4; C_2: x^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2; C_3: x^2 + y^2 = \lambda^2; \lambda \neq 0.$$

Vergelijkingen van de machtlijnen (@):

$$\text{Van } C_1 \text{ en } C_2: y = \frac{2}{\lambda}x; C_2 \text{ en } C_3: y = \frac{\lambda}{2}; C_1 \text{ en } C_3: x = \frac{\lambda^2}{4}.$$

Deze drie lijnen snijden in het punt (@):  $K\left(\frac{\lambda^2}{4}, \frac{\lambda}{2}\right)$ . (\*)Dus  $K$  op de kromme met vergelijking:  $x = y^2$  met  $y \neq 0$ .

2b.

Punt  $K$  binnen  $C_3$  geeft (@):

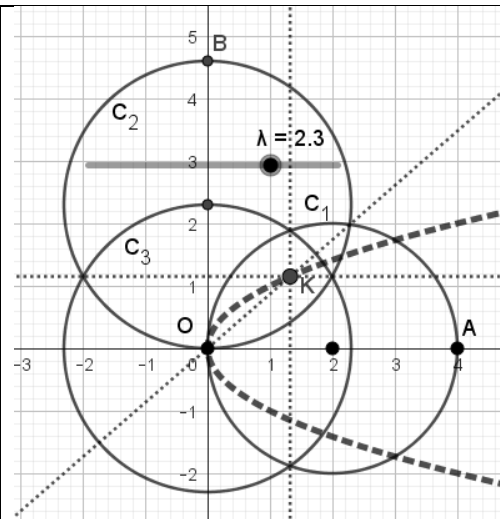
$$\frac{\lambda^4}{16} + \frac{\lambda^2}{4} < \lambda^2.$$

Dus:  $-\sqrt{12} < \lambda < +\sqrt{12}$ . Maar met:  $\lambda \neq 0$ . $K$  op de machtlijn van  $C_1$  en  $C_3$ .

In dit geval dan op de verbindinglijn van en tussen de twee snijpunten.

Dus:  $K$  ook binnen cirkel  $C_1$ .Analoog:  $K$  ook binnen cirkel  $C_2$ .

Extra: plaatje met de machtlijnen.



(\*) Dat de drie machtlijnen door één punt gaan is feitelijk een stelling uit de basiskennis.

Meer algemeen:

Op de machtlijn van  $C_1$  en  $C_2$  liggen alle punten met gelijke macht tot die twee cirkels.Op de machtlijn van  $C_1$  en  $C_3$  liggen alle punten met gelijke macht tot die twee cirkels.Als de twee lijnen snijden, en dat is zo in bovenstaande situatie, in een punt  $P$ , dan volgt: macht van  $P$  is hetzelfde tot  $C_1$  en  $C_2$  als tot  $C_1$  en  $C_3$ .Dus  $P$  heeft dezelfde macht tot  $C_2$  als tot  $C_3$  en ligt bijgevolg op de machtlijn van  $C_2$  en  $C_3$ .Dus dat punt  $P$  ligt op alle drie de machtlijnen en die gaan blijkbaar door dat ene punt.

B67-3

Gegeven zijn de punten  $A(2,0)$  en  $B(2,2)$ .

a. Stel vergelijkingen op van de parabolen door het punt  $B$ , die de  $X$ -as als as en het punt  $A$  als brandpunt hebben.

Op de  $X$ -as ligt een punt  $C$  en op de  $Y$ -as een punt  $D$  zo, dat de  $x$ -coördinaat van  $C$  2 groter is dan de  $y$ -coördinaat van  $D$ . Het snijpunt van de lijnen  $AD$  en  $BC$  is  $S$ .

b. Wat is de verzameling van de punten  $S$ , als  $D$  de  $Y$ -as doorloopt? Teken deze verzameling.

c. Teken de verzameling van de punten  $S$ , als  $D$  de positieve  $Y$ -as doorloopt?

3a.

De  $X$ -as als as betekent dat de vergelijking i.h.a. is (@):  $y^2 = ax + b$ . [1]

Punt  $B$  ligt op de parabool dus:  $4 = 2a + b$ . [2]

$A$  is het brandpunt dus (@):  $d(B, A) = d(B, \text{richtlijn})$ .

Gevolg:  $2 = d(B, \text{richtlijn})$ . Dan dus twee richtlijnen:  $x = 0$  of  $x = 4$ .

Dit volgt uit een tekening of met  $x = c$ , dus  $2 = |2 - c|$ :  $c = 0$  of  $c = 4$ .

Geval  $x = 0$  geeft als top:  $T_1(1,0)$ . Dat is het midden tussen  $A(2,0)$  en de richtlijn.(@)

Geval  $x = 4$  geeft als top:  $T_2(3,0)$ .

Bij  $T_1$  volgt met [1] en [2]:  $a = 4$  en  $b = -4$ . Dat geeft paraboolvergelijking:  $y^2 = 4(x - 1)$ .

Bij  $T_2$  volgt:  $a = -4$  en  $a = 12$ . Dat geeft vergelijking:  $y^2 = -4(x - 3)$ .

3b.

Vergelijking van de lijn door  $A(2,0)$  en  $D(0,p)$ :  $y = p - \frac{1}{2}px$ . [3]

Vergelijking van de lijn door  $B(2,2)$  en  $C(p+2,0)$ :  $y - 2 = \frac{2}{p}(2 - x)$ .

Voor  $S(x_1, y_1)$  geldt dus:  $p = \frac{2y_1}{2-x_1}$ . Met tweede vergelijking volgt:  $p = \frac{4-2x_1}{y_1-2}$ .

Dus  $S$  op de kromme met vergelijking:  $y(y - 2) = (2 - x)^2$ .

Herschreven:  $(y - 1)^2 - (x - 2)^2 = 1$ .

Die kromme is een hyperbool met mp.  $(1,2)$ .

Toppen zijn  $A$  en  $B$  en asymptootvergelijkingen:  $y - 1 = \pm(x - 2)$ .

3b. Zie de grafiek van de hyperbool met de asymptoten.

(Feitelijk werd dat dus een schets...)

3c.  $D$  over de positieve  $Y$ -as dus  $p > 0$ .

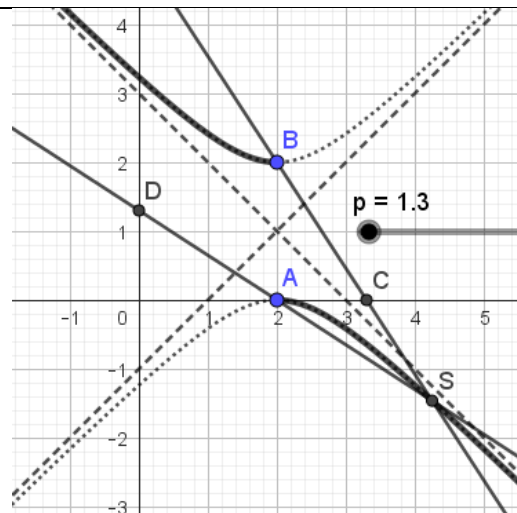
Dan volgt uit [1]:  $2y = p(2 - x)$ :

$y > 0$  dan  $x < 2$  en

$y < 0$  dan  $x > 2$ .

De punten  $S$  liggen dan op het zwartgemaakte deel van de hyperbool.

De punten  $A$  en  $B$  doen niet mee!



B68-1

Gegeven zijn de ellips  $E$  met vergelijking  $4x^2 + 9y^2 = 36$  en de hyperbool  $H$  met vergelijking  $x^2 - 4y^2 = 4$ .

- Stel de vergelijking op van elke raaklijn aan  $E$ , die evenwijdig is aan een asymptoot van  $H$ .
- Bewijs, dat  $E$  en  $H$  elkaar loodrecht snijden.

1a.

Vergelijkingen van de asymptoten (@):  $y = \pm \frac{1}{2}x$ .

In een punt  $P(x_1, y_1)$  op de ellips is de rico van de raaklijn (@):  $y' = -\frac{4x_1}{9y_1}$ . ( $y_1 \neq 0$ )

Evenwijdig aan een asymptoot geeft:  $y' = \pm \frac{1}{2}$  dus  $8x_1 = \pm 9y_1$ .

$P$  ligt op de ellips en dat geeft:  $4x_1^2 + 9 \cdot \left(\frac{8}{9}x_1\right)^2 = 36$ . Dus:  $x_1 = \pm \frac{9}{5}$ .

Als  $x_1 = +\frac{9}{5}$  dan  $y_1 = \pm \frac{8}{5}$ .

Dan volgt voor de raaklijnen:  $y - \frac{8}{5} = -\frac{1}{2}(x - \frac{9}{5})$  en  $y + \frac{8}{5} = +\frac{1}{2}(x - \frac{9}{5})$ .

Als  $x_1 = -\frac{9}{5}$  dan  $y_1 = \pm \frac{8}{5}$ .

Dan volgt voor de raaklijnen:  $y - \frac{8}{5} = +\frac{1}{2}(x + \frac{9}{5})$  en  $y + \frac{8}{5} = -\frac{1}{2}(x + \frac{9}{5})$ .

Herschreven geeft dit de vergelijkingen:  $2y \pm x = \pm 5$ .

1b.

Snijpunten van  $E$  en  $H$  zijn te bepalen. Noem zo'n snijpunt  $S(x_1, y_1)$ .

Dan volgt:  $x_1^2 - 4y_1^2 = 4$  én  $4x_1^2 + 9y_1^2 = 36$ .

Er volgt:  $y_1^2 = \frac{20}{25}$  en  $x_1^2 = \frac{180}{25}$ . [1]

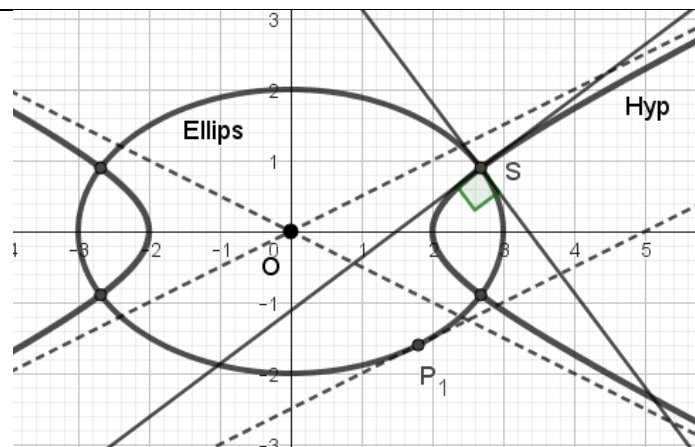
Dit geeft vier snijpunten symmetrisch om  $O$  en de assen gelegen, dus de situatie in één snijpunt geeft dezelfde situatie in de andere drie snijpunten.

In  $S$  is de rico van de raaklijn aan  $E$  resp.  $H$ :  $-\frac{4x_1}{9y_1}$  resp.  $\frac{x_1}{4y_1}$ .

Hun product is met [1]:  $-\frac{x_1^2}{9(y_1)^2} = -\frac{1}{9} \frac{180}{25} \frac{25}{20} = -1$ .

De raaklijnen staan loodrecht op elkaar, dus de krommen snijden in  $S$  loodrecht. (@)

Extra in de figuur: loodrechte stand in één punt  $S$ .



B68-2

Gegeven is het stelsel parabolen  $y^2 + py - 2x = 0$ .

a. Wat is de verzameling van de brandpunten van de parabolen van het stelsel?

Teken deze verzameling.

b. Laat op de poollijn van het punt  $(2,0)$  ten opzichte van een parabool van het stelsel de loodlijn neer uit het punt  $(0,4)$ .

Wat is de verzameling van de voetpunten van deze loodlijnen?

Teken deze verzameling.

c. Door welke punten van het vlak gaat geen enkele parabool van het stelsel?

2a. (@) Bij  $y^2 = 2x$  is het brandpunt  $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  met as  $y = 0$ . Dit is parabool [1].

Zo'n exemplaar uit het stelsel is te schrijven als:  $\left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = 2x + \frac{p^2}{4} = 2\left(x + \frac{p^2}{8}\right)$ . [2]

Een parabool met vergelijking  $\left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = 2x$  [3] is t.o.v. [1] verticaal verschoven.

Die heeft dan als as de lijn met vergelijking  $y = -\frac{p}{2}$  waar dan het brandpunt op ligt:  $F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{p}{2}\right)$ .

Een parabool met vergelijking [2] is t.o.v. [3] horizontaal verschoven over  $-\frac{p^2}{8}$ .

Dat geeft het brandpunt  $F_2\left(\frac{1}{2} - \frac{p^2}{8}, -\frac{p}{2}\right)$ .

Dat betekent dat het brandpunt ligt op de kromme met vergelijking:  $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2$ .

De brandpunten liggen op de parabool met vergelijking:  $y^2 = 1 - 2x$ .

2b. De poollijn van het punt  $A(2,0)$  heeft vergelijking (@):

$\left(0 + \frac{p}{2}\right)\left(y + \frac{p}{2}\right) = x + 2 + \frac{p^2}{4}$ . Ofwel:  $y = \frac{2}{p}x + \frac{4}{p}$ . [4] Hier geldt:  $p \neq 0$ . [5]

De loodlijn uit  $B(0,4)$  op die poollijn heeft vergelijking (@):  $y = -\frac{p}{2}x + 4$ . [6]

Voor het snijpunt  $S(x_1, y_1)$  geldt dus met [4] en [6]:  $p = \frac{2x_1 + 4}{y_1} = \frac{2(4 - y_1)}{x_1}$ . Dus(!):  $(x_1, y_1) \neq (0,0)$ .

S blijktbaar op de kromme met vergelijking:  $x^2 + 2x = 4y - y^2$ .

Dat is een cirkel met vergelijking:  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ . Maar met  $(x, y) \neq (0,0)$ .

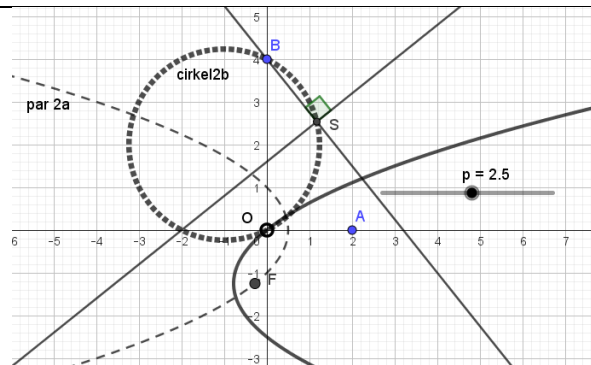
Bij [5] volgt: poollijn vergelijking  $x = -2$  en  $S(-2,4)$ . Dit punt ligt ook op de cirkel.

2c. De vraag is: voor welk punt  $P(x_1, y_1)$  is er geen  $p$ -waarde zodat  $y_1^2 - py_1 = 2x_1$ ?

Als  $y_1 = 0$  dan staat hier:  $0 = 2x_1$ . Dus alleen  $x_1 = 0$  voldoet. Elke andere waarde niet!

Gevolg: door  $P(x_1, 0)$  met  $x_1 \neq 0$  gaat geen enkele parabool van het stelsel.

Deze punten liggen op de X-as zonder  $O(0,0)$ .



Figuren bij 2a en 2b

B69-1

- a. Een parabool heeft de vergelijking  $y^2 = 2px$ . Een lijn door het punt  $(-\frac{1}{2}p, 0)$  raakt de parabool in punt  $A$ . Stel de vergelijking op van de verzameling van de punten  $A$ , als  $p$  veranderlijk is.
- b. Op de parabool  $y^2 = 2x$  ligt een punt  $P$ . Het punt  $P'$  is het productpunt van  $P$  bij vermenigvuldiging met een factor 2 ten opzichte van het punt  $(-3, 0)$ .<sup>16</sup> Stel de vergelijking op van de verzameling van de punten  $P'$ , als  $P$  de gegeven parabool doorloopt.
- c. De lijn met vergelijking  $2x + y = 6$  is een normaal van de parabool met vergelijking  $y^2 = 2px$ . Bereken  $p$ .

1a. Noem het raakpunt  $A(x_1, y_1)$ . Dus:  $y_1^2 = 2px_1$ . [1]

De raaklijn in  $A$  heeft vergelijking (@):  $yy_1 = px + px_1$ . Deze lijn gaat door  $B(-\frac{1}{2}p, 0)$ .

Dus er geldt:  $0 = -\frac{1}{2}p^2 + px_1$ . Er volgt:  $x_1 = \frac{1}{2}p$  mits  $p \neq 0$ .

Bij  $p = 0$  stelt de vergelijking geen echte parabool voor dus dat geval wordt uitgezonderd.

En met [1] volgt:  $y_1^2 = p^2$ . Dus:  $A(\frac{1}{2}p, \pm p)$  met  $p \neq 0$ .

Blijkbaar liggen de raakpunten op lijnen met vergelijkingen:  $y = \pm 2x$  maar met  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

1b. Noem  $P(\frac{1}{2}t^2, t)$  met  $t \in \mathbb{R}$ . Dus  $x_p \geq 0$ . [3]

Vermenigvuldigen vanuit  $X(-3, 0)$  geeft (@):  $P'(2 * (x_p + 3) - 3, 2 * y_p)$ . [4]

Want met [3] volgt: de afstand tot  $X$  is horizontaal  $(x_p + 3)$  en verticaal  $|y_p|$ .

Dus met [4] en [3] volgt:  $P'(t^2 + 3, 2t)$ .

Blijkbaar ligt  $P'$  op de kromme (parabool):  $\frac{y^2}{4} + 3 = x$  ofwel:  $y^2 = 4x - 12$ .

1c. De rico van de normaal =  $-2$ . De raaklijn heeft dus (@) rico =  $\frac{1}{2}$ .

De raaklijn in het snijpunt  $S(x_1, y_1)$  heeft vergelijking (@):  $yy_1 = px + px_1$ .

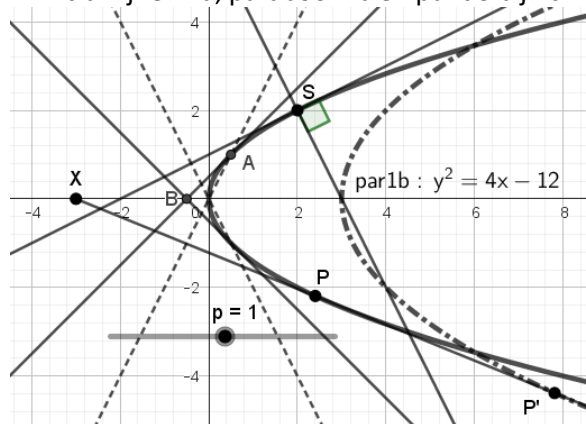
Deze lijn heeft rico =  $\frac{p}{y_1} = \frac{1}{2}$ . Dus:  $y_1 = 2p$ . Omdat  $y_1 \neq 0$  volgt:  $p \neq 0$ . [5]

$S$  ligt op de normaal dus er volgt:  $x_1 = \frac{1}{2}(6 - y_1) = 3 - p$ .

Punt  $S(x_1, y_1)$  ligt ook op de parabool natuurlijk dus:  $(2p)^2 = 2p(3 - p)$ .

Gevolg:  $6p(p - 1) = 0$ . En met [5] volgt nu:  $p = 1$ .

Extra: lijnen 1a, parabool 1b en punt  $S$  bij 1c.



<sup>16</sup> Voor het eerst komt een afbeelding nl. de 'puntvermenigvuldiging' voor.

B69-2

Gegeven zijn de punten  $P(4,0)$ ,  $Q(8,0)$  en een punt  $M$  op de Y-as.  $C_1$  is de cirkel, die  $M$  tot middelpunt heeft en die door  $P$  gaat.  $C_2$  is de cirkel met middellijn  $MQ$ .

De cirkels  $C_1$  en  $C_2$  snijden elkaar in de punten  $A$  en  $B$ .

a.  $M$  doorloopt de Y-as.

Bewijs, dat de lijnen  $AB$  door één punt gaan, en bereken de coördinaten van dit punt.

b. De lijnen  $AB$  en  $MP$  snijden elkaar in het punt  $S$ .

Stel de vergelijking op van de verzameling van de punten  $S$ , als  $M$  de Y-as doorloopt.

Teken deze verzameling.

2a.

Met  $M(0, p)$  volgt (@): vergelijking van  $C_1: x^2 + (y - p)^2 = (16 + p^2)$ . [1]

Met mp.  $T(4, \frac{1}{2}p)$  volgt: vergelijking van  $C_2: (x - 4)^2 + (y - \frac{1}{2}p)^2 = (16 + \frac{1}{4}p^2)$ . [2]

Coördinaten van T volgen eenvoudig (@):  $x_T = \frac{1}{2}(x_M + x_Q)$  en  $y_T = \frac{1}{2}(y_M + y_Q)$ .

Punten A en B liggen op beide cirkels en de lijn  $k$  daardoor heeft als vergelijking (@)

[1]-[2]:  $8x - py = 16$ .

Als M de Y-as doorloopt, dan varieert  $p$ . Maar... aan deze vergelijking voldoet voor elke  $p$ -waarde:  $x = 2$  én  $y = 0$ . Blijkbaar gaat lijn  $k$  voor elke  $p$ -waarde door punt  $C(2, 0)$ .

2b.

Vergelijking van de lijn  $m$  door M en P (@):  $y = \frac{1}{4}p(4 - x)$ .

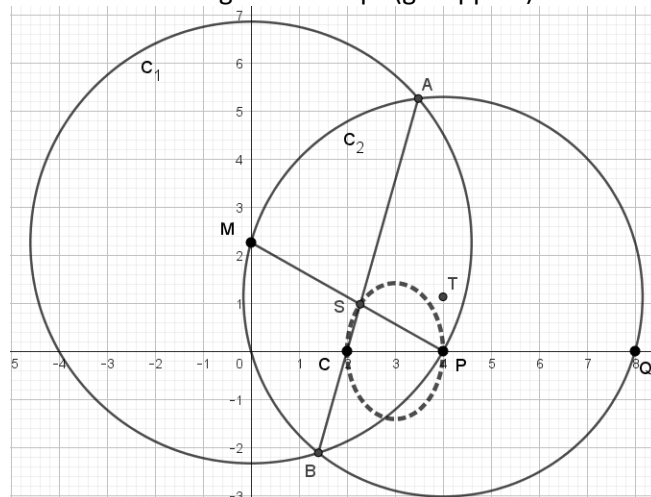
Snijpunt van  $k$  en  $m$  is  $S(x_1, y_1)$ . Dus er geldt (\*):  $py_1 = 8x_1 - 16$  én  $y_1 = \frac{1}{4}p(4 - x_1)$ .

Dus:  $p = \frac{4y_1}{4-x_1}$  maar  $x_1 \neq 4$ . [3] En verder:  $\frac{4y_1^2}{4-x_1} = 8x_1 - 16$ .

S ligt dus op de kromme (ellips) met vergelijking:  $y^2 = -2x^2 + 12x - 16$ .

De vergelijking in de standaardvorm:  $\frac{(x-3)^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$ . Maar  $(x, y) \neq (4, 0)$ .

Tekening van de ellips (gestippeld):



(\*) Onderdeel 2a moet dus gelukt zijn.

B71-1

Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel  $XOY$  is gegeven de hyperbool met vergelijking  $xy = 4$ .

a. Op de hyperbool ligt een punt  $P$ . De lijn  $OP$  snijdt de hyperbool behalve in  $P$  nog in een punt  $Q$ . De lijn door  $P$  evenwijdig aan de  $X$ -as en de lijn door  $Q$  evenwijdig aan de  $Y$ -as snijden elkaar in punt  $R$ . Punt  $P$  doorloopt de hyperbool.

Stel de vergelijking op van de verzameling van de zwaartepunten van de driehoeken  $PQR$ .

b. Bereken de coördinaten van het punt  $A$  waarvoor geldt dat de poollijn van  $A$  ten opzichte van de hyperbool samenvalt met de poollijn van  $A$  ten opzichte van de parabool met vergelijking  $y^2 = 2x$ .

1a. Nu een figuur bij deze opgave.

Lijn door  $P$  resp.  $Q$ :  $y = b, x = -a$ .

Er is veel symmetrie in de figuur.

$P(a,b)$ ;  $Q(-a,-b)$ ;  $R(-a,b)$ . Met  $a \cdot b = 4$

$|OZ| : |ZR| = 1 : 2$ . (@ ligging zwaartepunt).

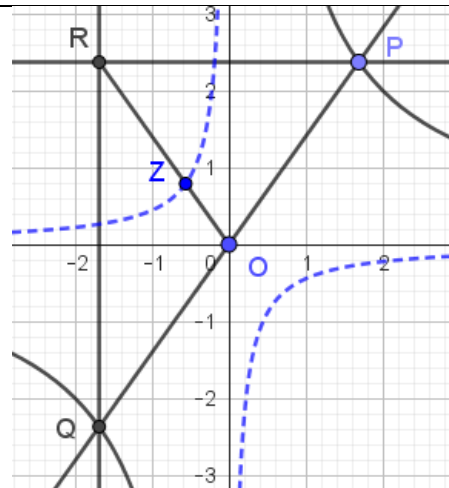
Dus:

$$Z\left(\frac{1}{3}x_R, \frac{1}{3}y_R\right) = Z\left(-\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right) = Z\left(-\frac{a}{3}, \frac{4}{3a}\right).$$

En daaruit:

$$\text{Vergelijking } \mathbf{xy} = -\frac{a}{3} * \frac{4}{3a} = -\frac{4}{9}.$$

Weer een hyperbool. (gestippeld in de figuur.)



1b. Noem  $A(a, b)$ .

Poollijn tov parabool:  $by = x + a$ . (@ poollijn algemeen:  $yy_1 = x + x_1$ )

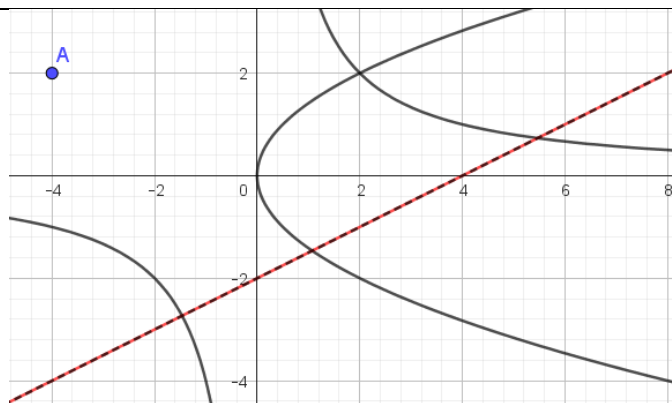
Poollijn tov hyperbool:  $xb + ay = 8$ . (@ poollijn algemeen bij  $xy = c$ :  $xy_1 + yx_1 = 2c$ )

Samenvallen wil zeggen feitelijk dezelfde vergelijkingen.

$$y = \frac{1}{b}x + \frac{a}{b} \text{ en } y = -\frac{b}{a}x + \frac{8}{a} \text{ geeft: } \frac{1}{b} = -\frac{b}{a} \text{ ofwel } a = -b^2 \text{ en } \frac{a}{b} = \frac{8}{a} \text{ ofwel } a^2 = 8b.$$

Dus:  $a^2 = 8b = b^4$ ;  $b = 0$  (VN) of  $b = 2$ . En dan  $a = -4$ .

Conclusie:  $A(-4, 2)$



figuur bij 1b.

B71-2

$XOY$  is een rechthoekig assenstelsel. Een stelsel cirkels is gegeven door de vergelijking  $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 4\lambda^2 y = 0$  waarbij  $\lambda$  variabel is en  $\neq 0$  is.<sup>17</sup>

a. Stel de vergelijking op van de verzameling van de middelpunten van de cirkels van het stelsel.

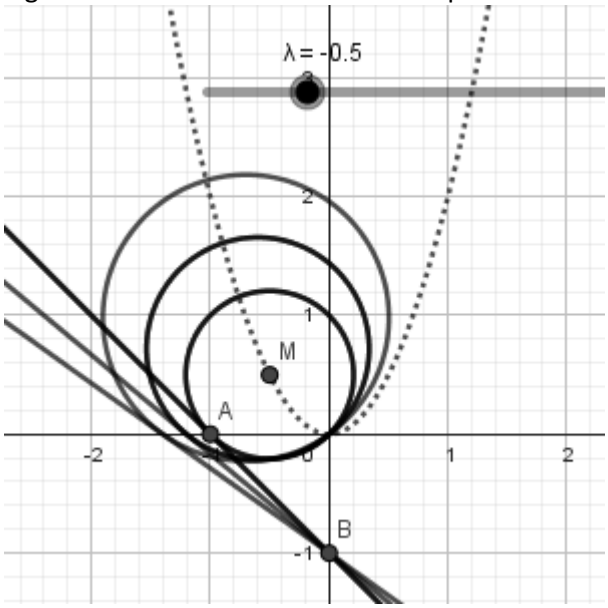
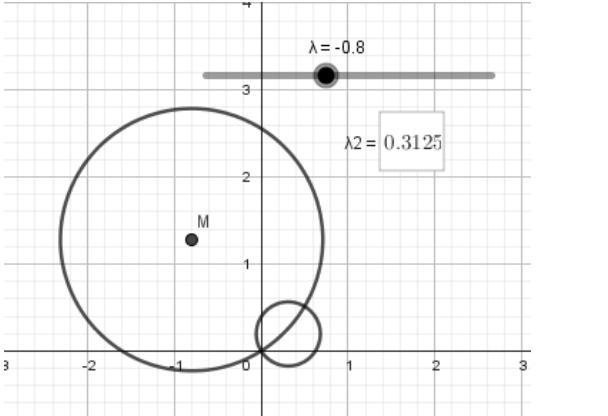
Teken deze verzameling.

b. Elk exemplaar van het stelsel snijdt de  $X$ -as in  $O$  en in een punt  $A$ . Bij elk exemplaar van het stelsel behoort een lijn  $p$  die dat exemplaar in  $A$  raakt.

Bewijs dat de lijnen  $p$  door een vast punt gaan en bereken de coördinaten van dat punt.

c. Door de waarden  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  worden twee cirkels van het stelsel gegeven.

Welke betrekking bestaat er tussen  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  als deze cirkels elkaar loodrecht snijden?

<p>2a. Herschrijving geeft:  <math>(x - \lambda)^2 + (y - 2\lambda^2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda^4</math>.  Middelpunten: <math>M(\lambda, 2\lambda^2)</math> met <math>\lambda \neq 0</math>.  Vergelijking: <math>y = 2x^2</math> m.u.v. <math>(0,0)</math>.</p>	<p>Figuur met deel van de bundel en de parabool.</p> 
<p>2b. Snijpunt met de as:  <math>A(2\lambda, 0)</math> en <math>O(0,0)</math> via <math>x^2 - 2\lambda x = 0</math>.  Vergelijking (@ algemeen raaklijn):  <math>xx_1 + yy_1 - \lambda x - \lambda x_1 - 2\lambda^2 y - 2\lambda^2 y_1 = 0</math>  Geeft nu:  <math>2\lambda x - \lambda x - 2\lambda^2 - 2\lambda^2 y = 0</math> ofwel  <math>x - 2\lambda y = 2\lambda</math>.  Snijden met de <math>y</math>-as geeft <math>B(0, -1)</math>.  Dit is onafhankelijk van <math>\lambda</math> dus <math>B</math> is het gevraagde vaste punt. Zie ook figuur.</p> <p>NB: <math>\lambda = 0</math> geeft puntcirkel <math>x^2 + y^2 = 0</math>  en de 'raaklijn' zou ook door <math>B</math> gaan!</p>	<p>Een voorbeeld:</p> 

2c. Voor  $\lambda < 0$  raken de cirkels elkaar allemaal te  $O(0,0)$ . Ook voor  $\lambda > 0$  geldt dit. Dus een andere hoek maken cirkels met één exemplaar met  $\lambda < 0$  en een met  $\lambda > 0$ .

Raaklijnen in de snijpunten  $P$  en  $O$ .  
Hoek daartussen is hetzelfde in  $P$  als in  $O$ .

De richtingscoëfficiënt (@ afgeleide):

$$2x_1 + 2y_1 y' - 2\lambda - 4\lambda^2 y' = 0$$

Geeft:  $y' = -\frac{1}{2\lambda}$  te  $O(0,0)$ .

Loodrecht snijden geeft (@ loodrecht):

$$-\frac{1}{2\lambda_1} * -\frac{1}{2\lambda_2} = -1. \text{ Dus: } \lambda_1 * \lambda_2 = -\frac{1}{4}.$$

<sup>17</sup> Laatste zinsdeel zou nu luiden: 'λ is een reëel getal ongelijk nul' of gewoon  $\lambda \neq 0$ .

## Nawoord

Zij die de moeite hebben genomen enige examens volledig te maken, zullen wellicht verbaasd zijn over de tijd die beschikbaar was om dat te doen. Bedenk daarbij wel dat de examens erg op elkaar leken en dat de kandidaten getraind waren in het herkennen van de opgaven: wat te doen was meestal direct duidelijk. De handelingen en de berekeningen gingen vaak 'automatisch'.

Zeker bij de berekeningen bij de MULO-vragen moest dat ook wel: rekenmachines waren er niet en het werken met een logaritme-tabel moest dus snel en vaardig gaan. In de 70-er jaren zijn nog rekenlinialen gebruikt in het vo en in de 80-er jaren mocht men rekenmachines gaan gebruiken.

Opvallend is ook dat er geen formulebladen waren: de basiskennis was groot en die kennis moest je maar 'gewoon' hebben. Dat is zeker een groot verschil met de huidige examen-praktijk. Opmerkelijk is ook dat er geen controle-vragen in de examens zaten. Dus een tegenwoordig veel voorkomende vraag als *'de lengte/oppervlakte/etc. is [...formule], bewijs dat die formule klopt'* kwam niet voor. Dat maakte het stapelen van vragen gevaarlijk: een fout bij onderdeel a terwijl je het resultaat wel bij b moest gebruiken, had dus grote gevolgen. In feite is dat een foute vraagconstructie, die gelukkig niet(?) meer voorkomt.

De stereometrie-vragen bij HBS-examens zijn vaak ook met coördinaten en vergelijkingen te doen en dat was in de 90-er jaren ook het geval in het toenmalige vectormeetkunde-programma van het vwo. Dat dat uiteindelijk verviel tot ordinaire rekenpartijen, waarbij leerlingen nauwelijks ruimtelijk inzicht nodig hadden, laat zien dat het klassieke stereometrie-programma nog zo gek niet was.

Analytische meetkunde verdween na de 60-er jaren uit het programma maar kwam in de jaren 'nul' weer terug. Nu is het vakgebied prominent aanwezig maar wel zonder de nadruk op kegelsneden zoals indertijd. Werken met coördinaten en vergelijkingen is de hoofdmoot. Daarbij is algebraïsche vaardigheid een steeds belangrijker te toetsen doel geworden. De vragen leiden vaak wel tot een rekenpartij en zijn soms net zo goed met synthetische meetkunde te doen...

Fred Muijers

oud-docent van de lerarenopleiding wiskunde eerste- en tweedegraad van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen.

Opmerkingen en/of foutmeldingen zijn welkom...



Aardige lectuur over deze schooltypen:

*De MULO* (2018) van Wim Daniëls.

*Wij van de HBS* (2017) van Roelof Bouwman en Henk Steenhuis.