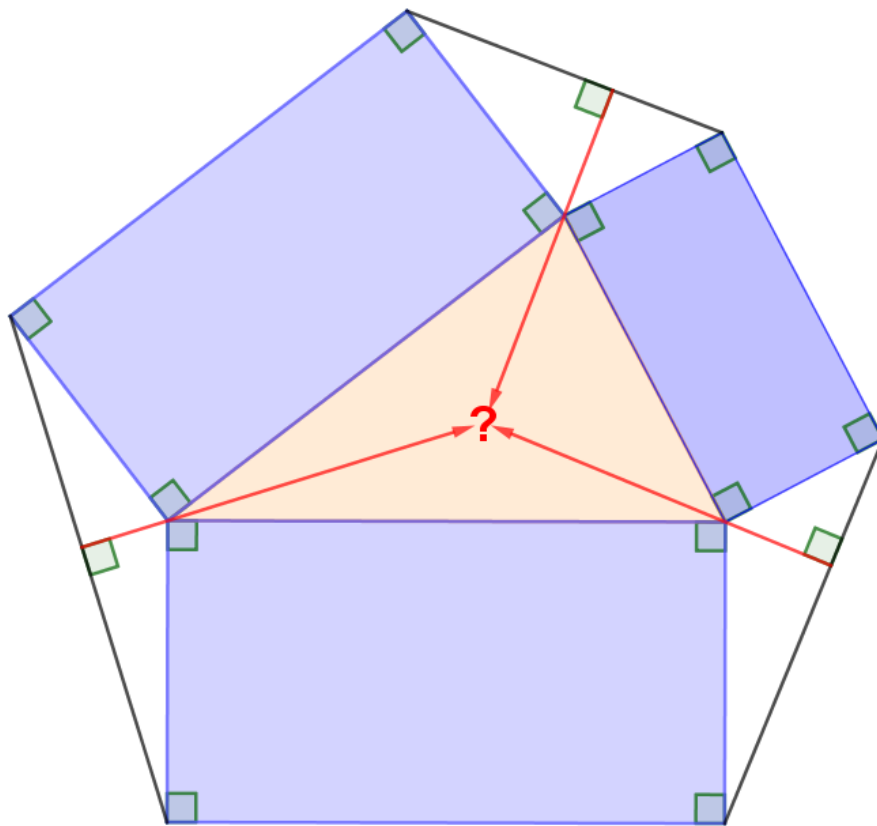


Prachtige meetkunde:

de wereld van

算額



Fred Muijers

Voor mijn zonen
en
kleinkinderen.

Ter lering ende vermaeck.

Dit boekje bevat voorbeelden van prachtige meetkunde: we stappen in de wereld van de *sangaku*.

Er staan vrijwel geen woorden of formules bij de voorbeelden. Uit de figuren moet voor de lezer duidelijk zijn wat eigenlijk de vraag of de probleemstelling is. Dat gaat vooral door kleurgebruik. Achterin staan bewijzen of oplossingen, van elke *sangaku* één. Hier is gekozen voor een aanpak met Euclidische meetkunde (congruentie, gelijkvormigheid, cirkeleigenschappen,...) inclusief gonio- en trigonometrie. Aan de lezer om een eigen en ander verhaal te maken, want dat is er vaak zeker. ^{1 2 3}

Veel plezier.
Fred Muijers
augustus 2022

V2

算額

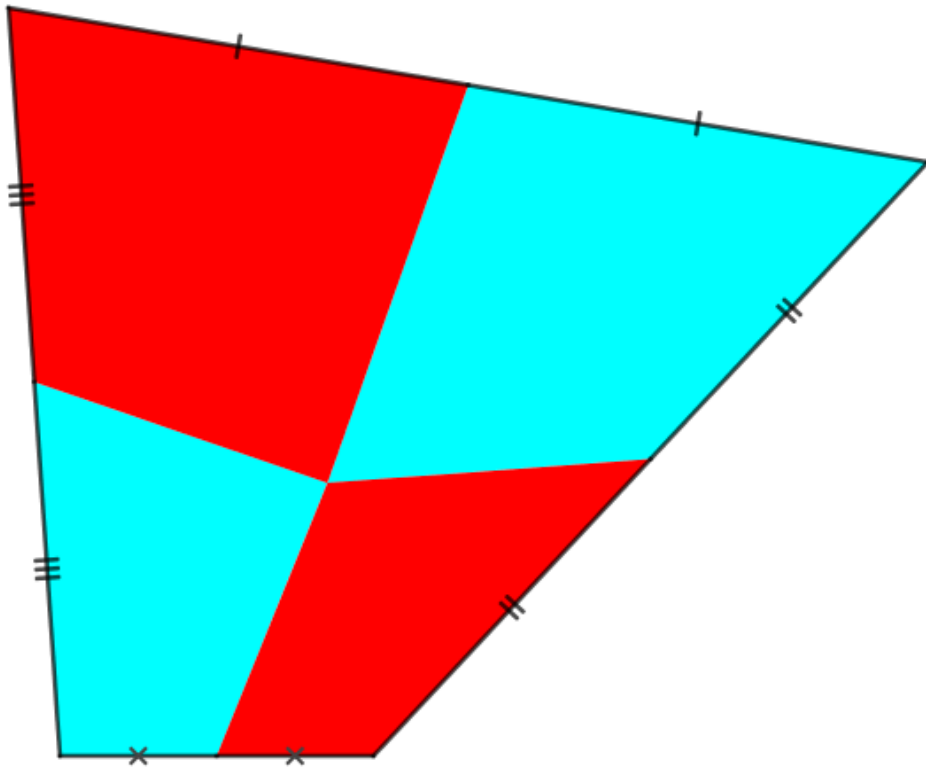
Sangaku (*san*: berekening; *gaku*: plaat, bord)

¹ Voor een voorbeeld met aanpak zie de tekst '*Solving sangaku: a traditional solution to a nineteenth century Japanese temple problem*'. Rosalie Hosking, School of Mathematics and Statistics; University of Canterbury, Christchurch, New Zealand. Zie <https://doi.org/10.14477/jhm.2017.30.2.053>
Voor enige achtergrond zie de laatste pagina van dit boekje.

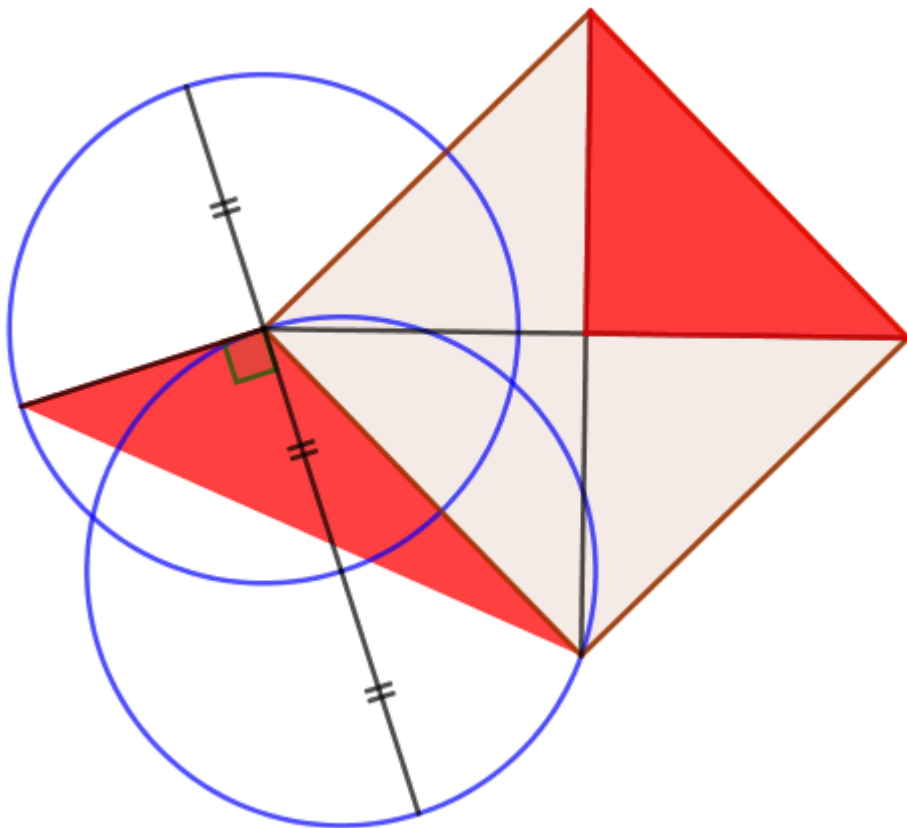
² Zie ook Zebra-boekje 42: Lint H. van, Breeman J. (2015) *Sangaku's*. Epsilon Amsterdam.

³ De meeste voorbeelden komen van *gogeometry.com* van Antonio Gutierrez en zijn vaak aangepast door mij. De primaire bronnen zijn bij mij onbekend.

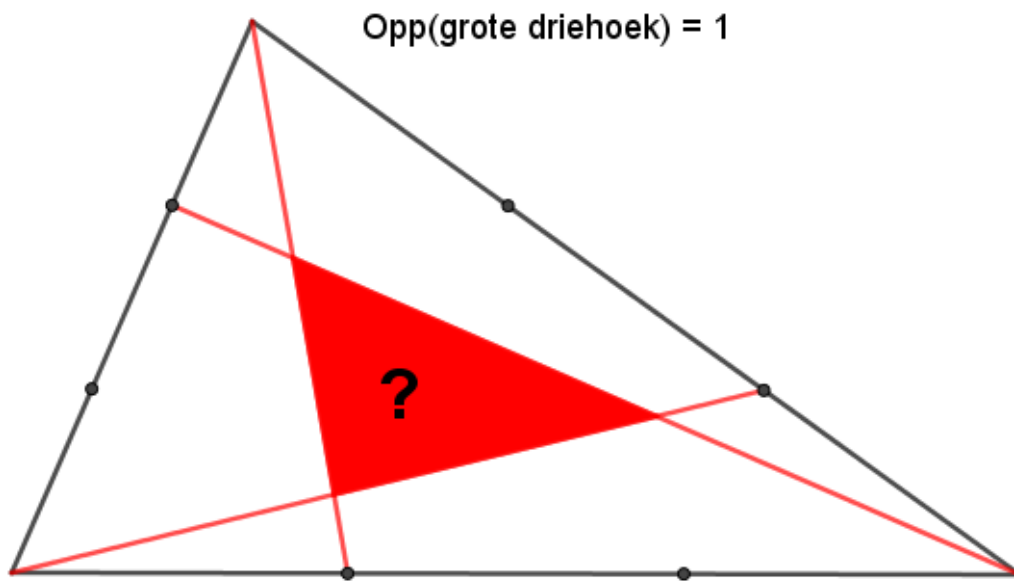
S1.1



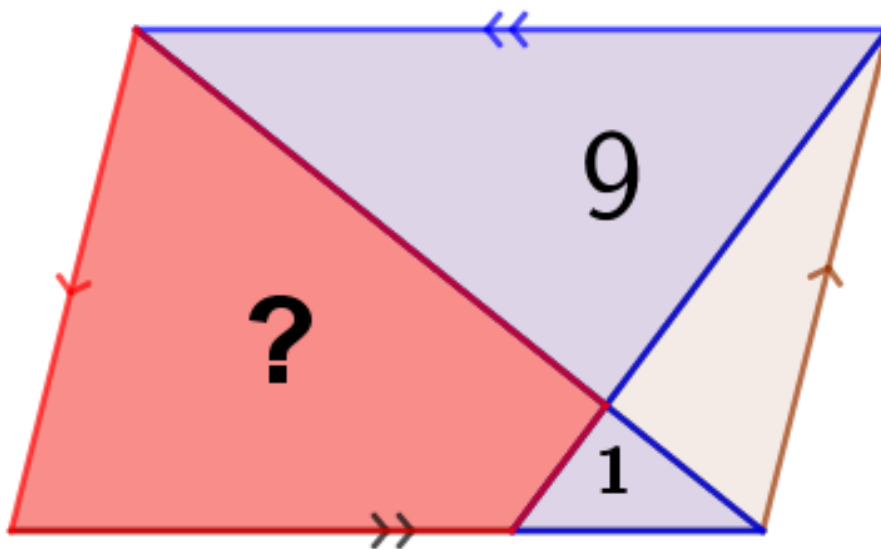
S1.2



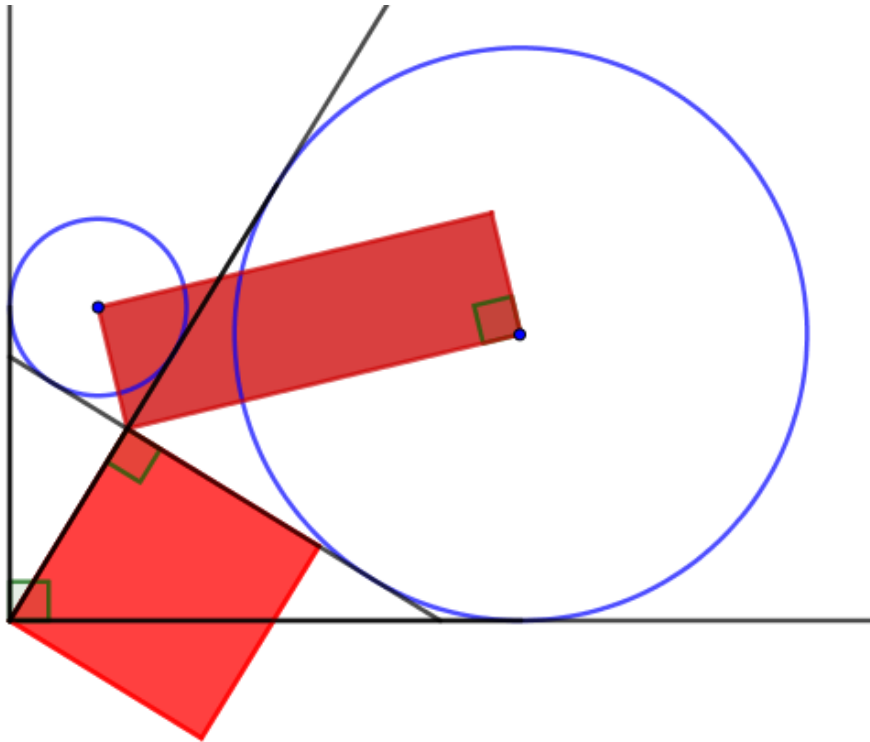
S1.3



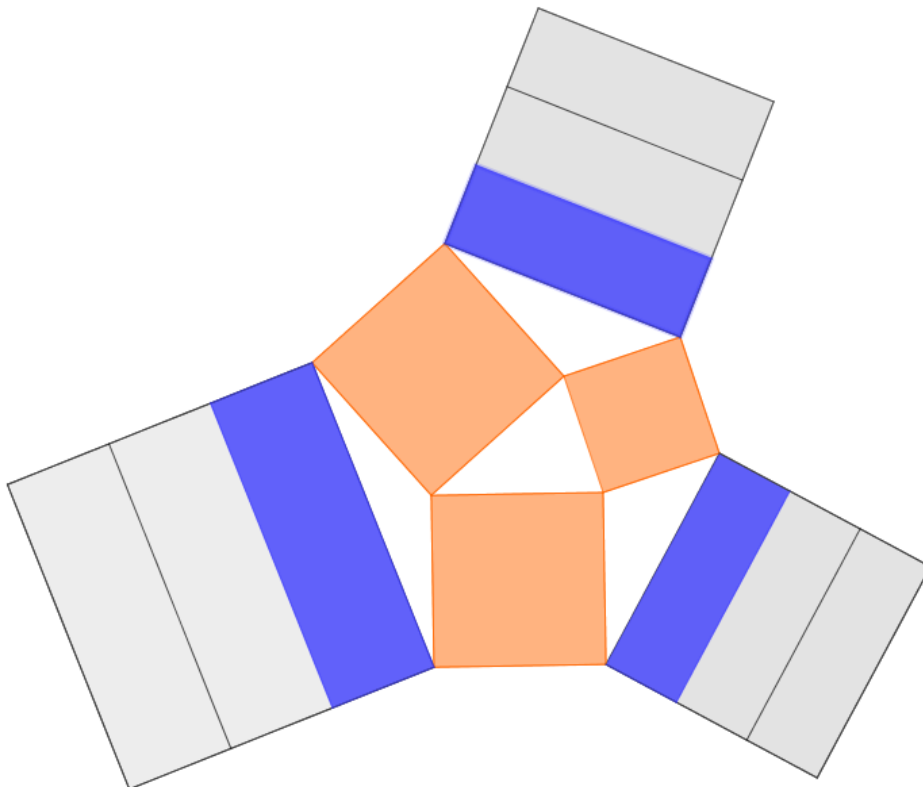
S1.4



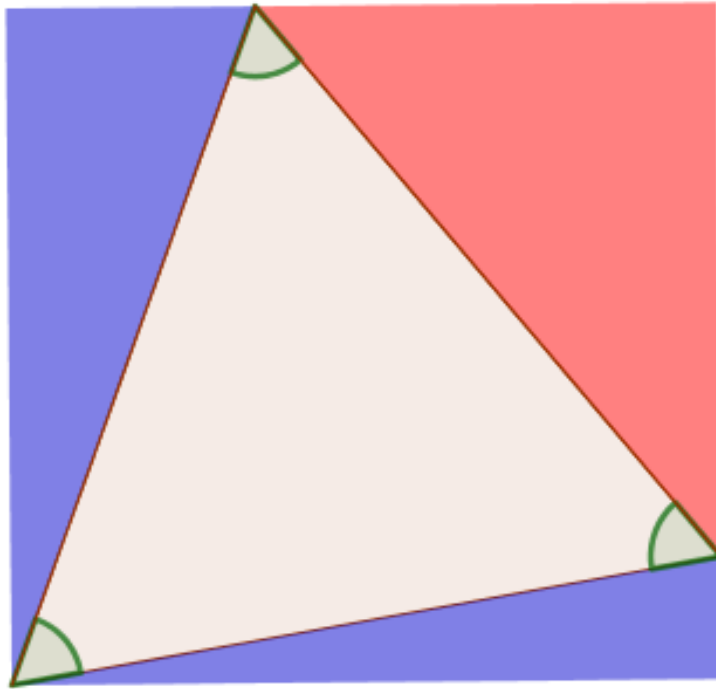
[S1.5](#)



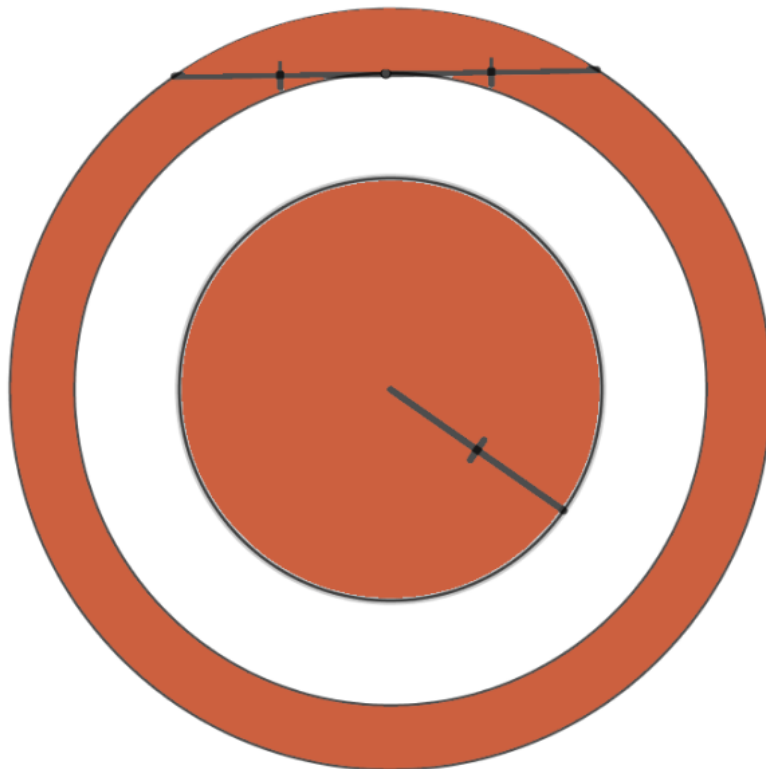
[S1.6](#)



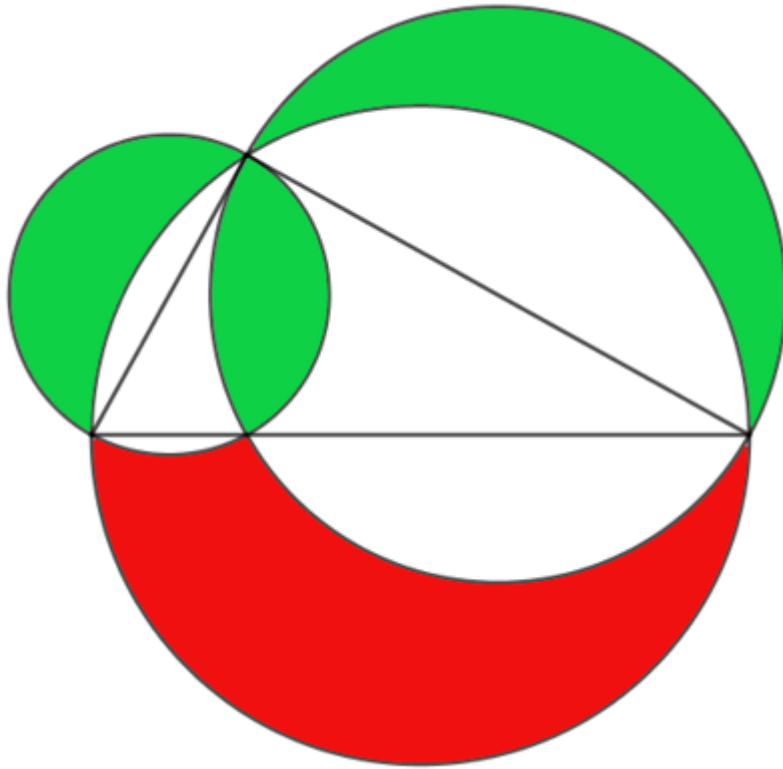
[S1.7](#)



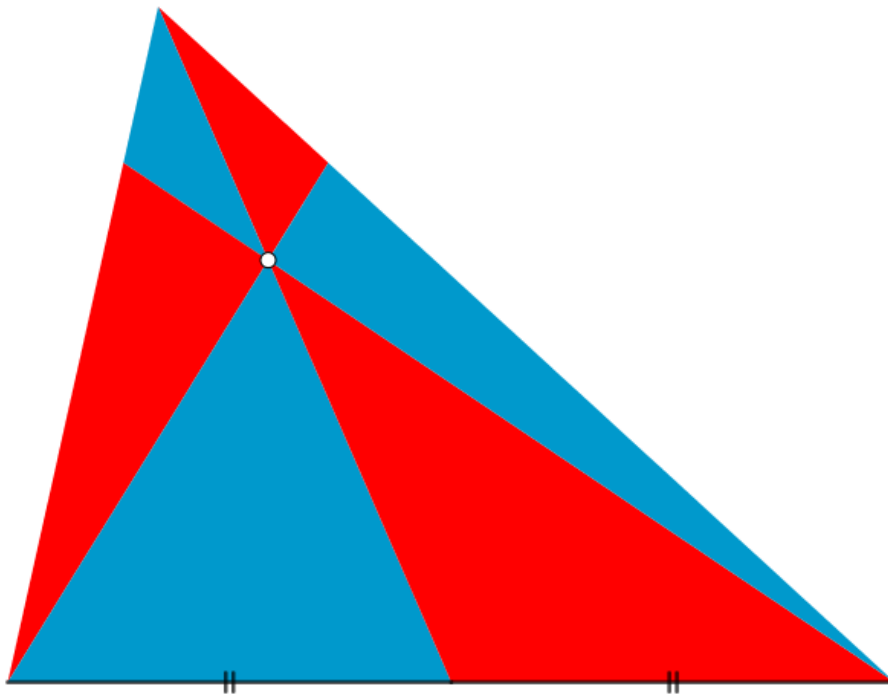
[S1.8](#)



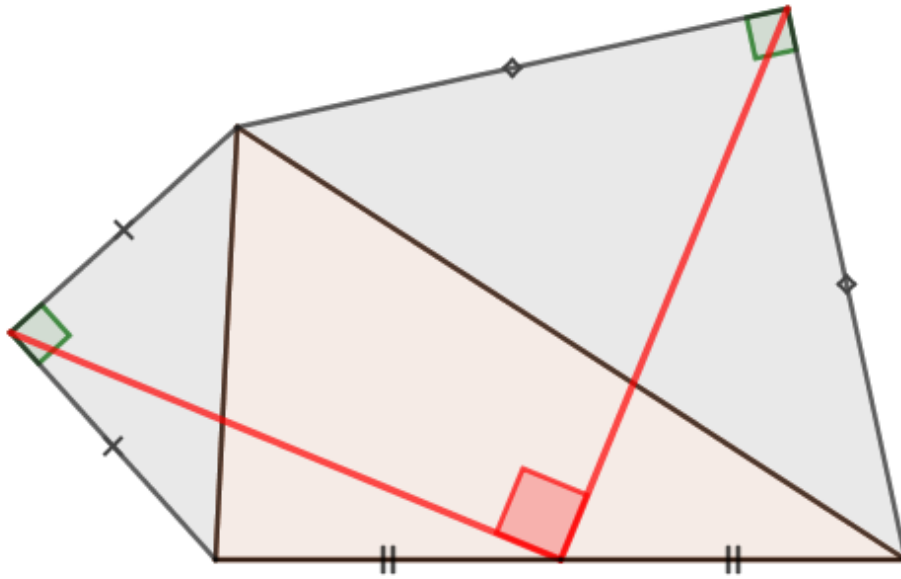
[S1.9](#)



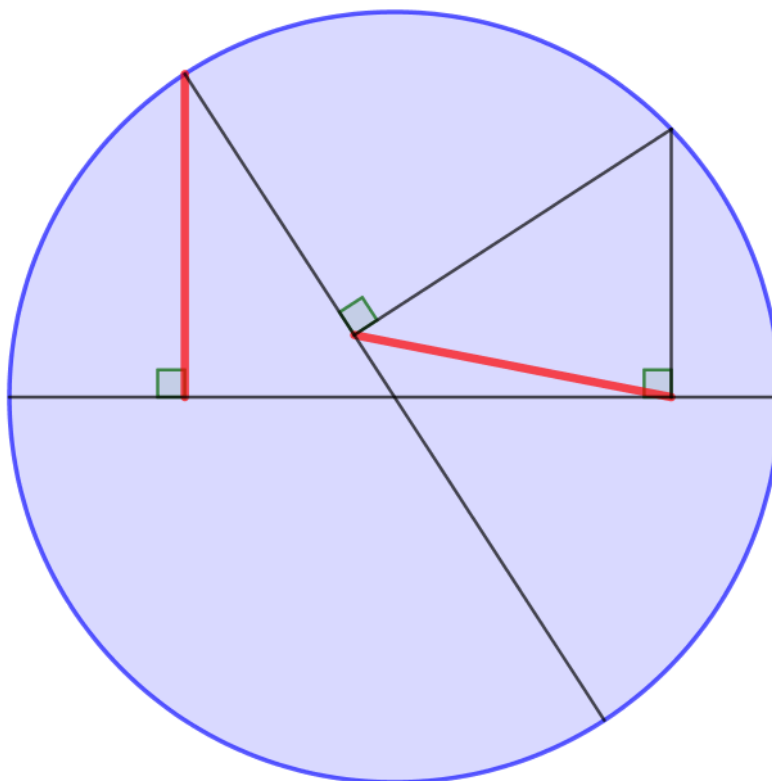
[S1.10](#)



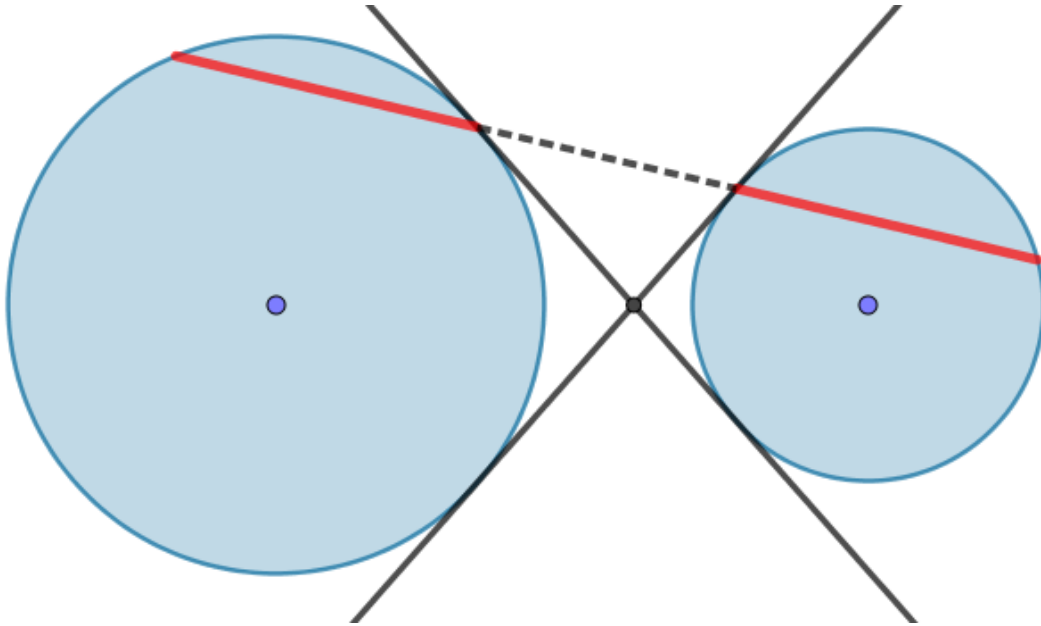
[S2.1](#)



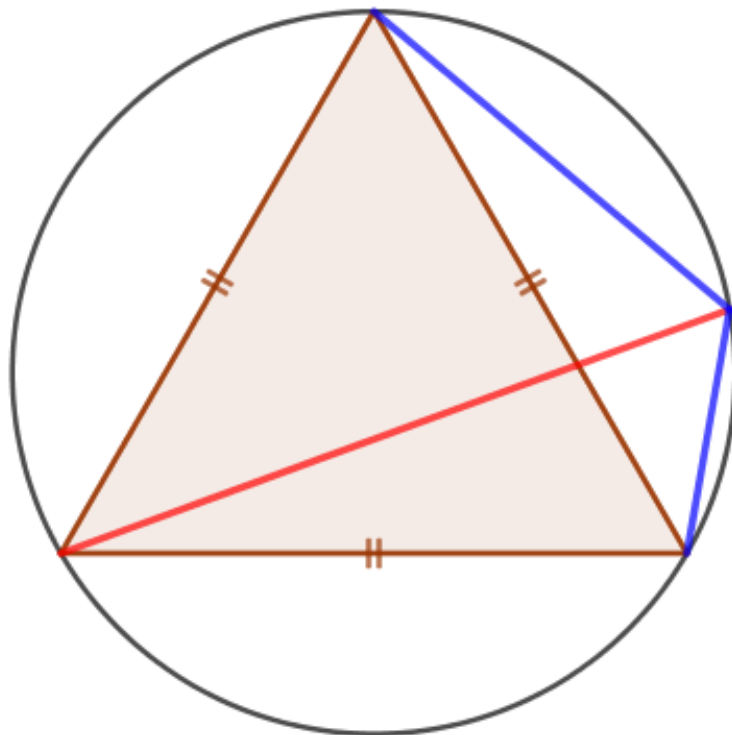
[S2.2](#)



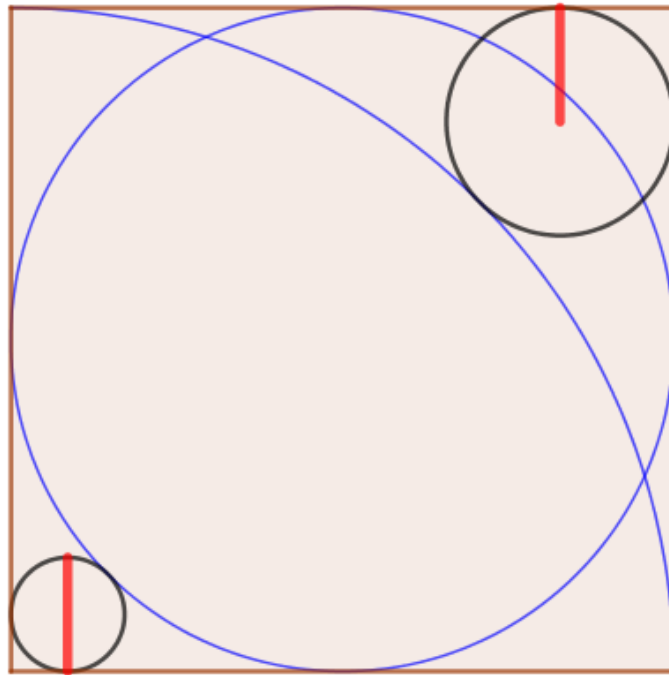
S2.3



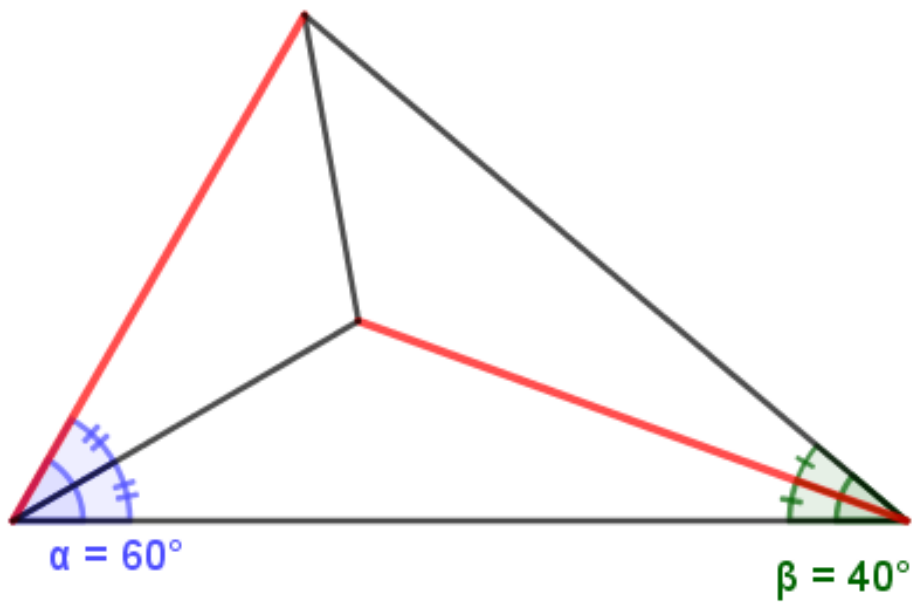
S2.4



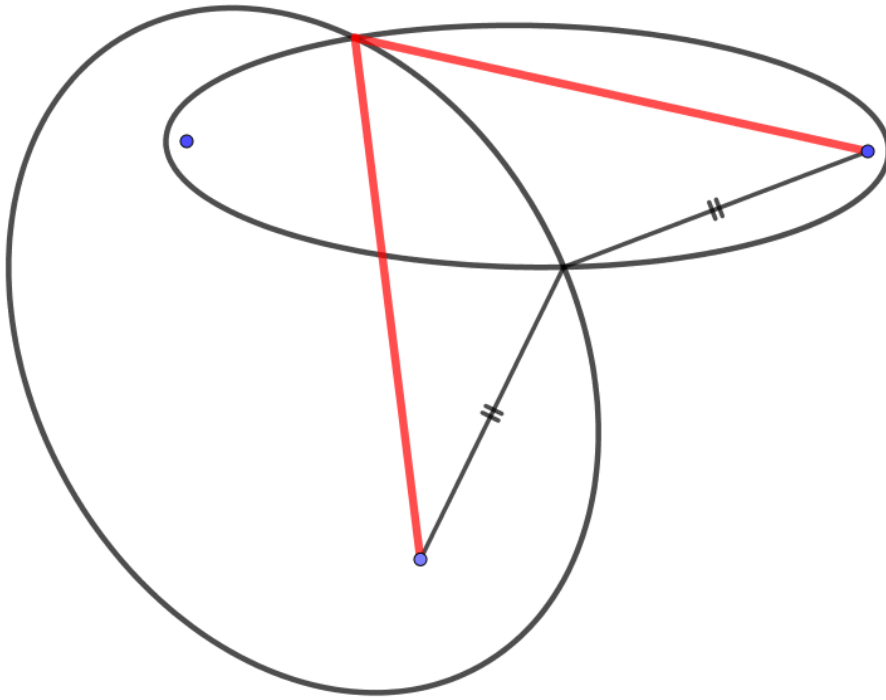
[S2.5](#)



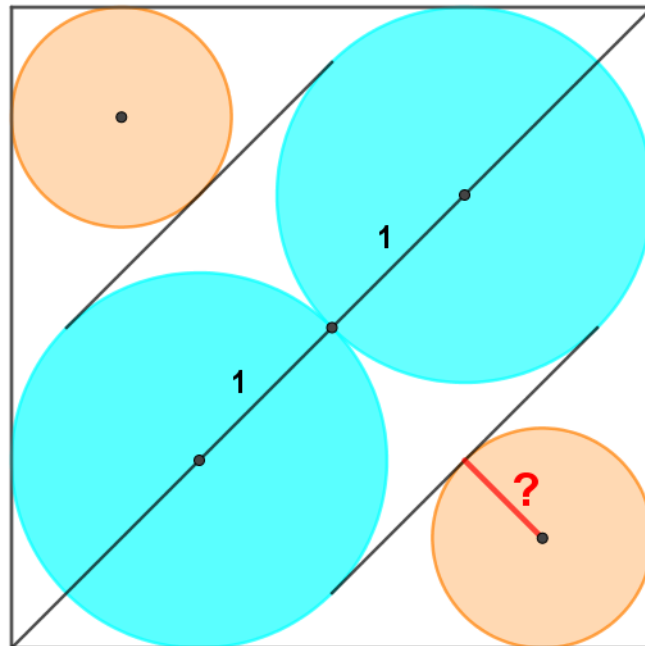
[S2.6](#)



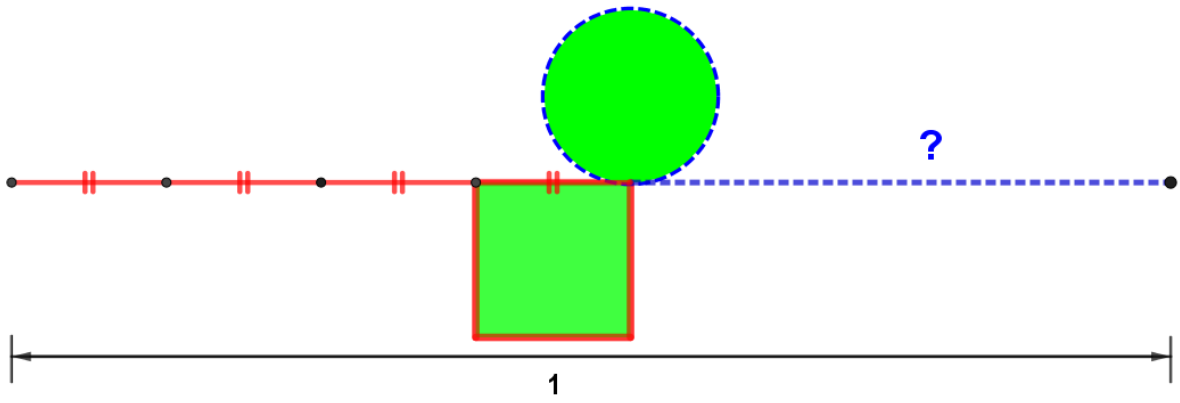
S2.7



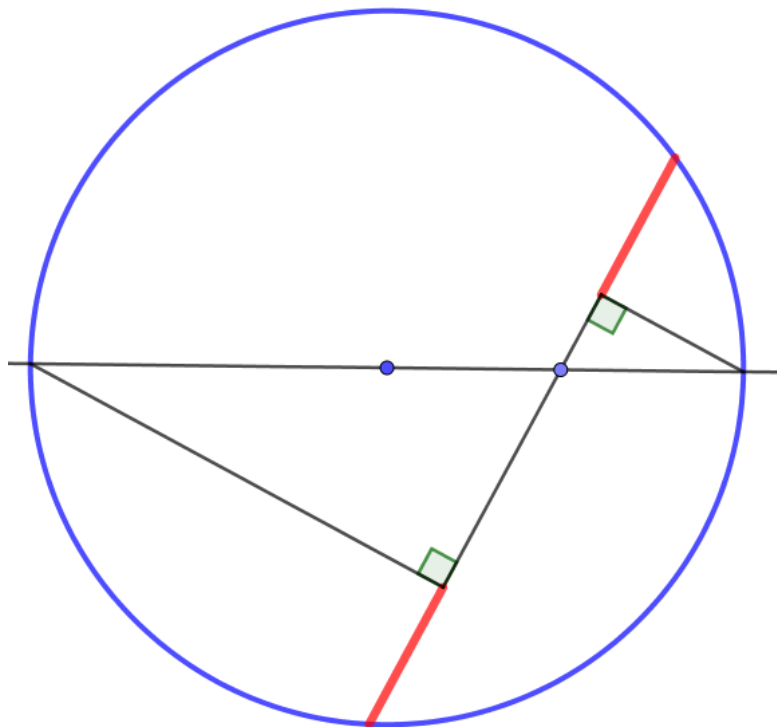
S2.8



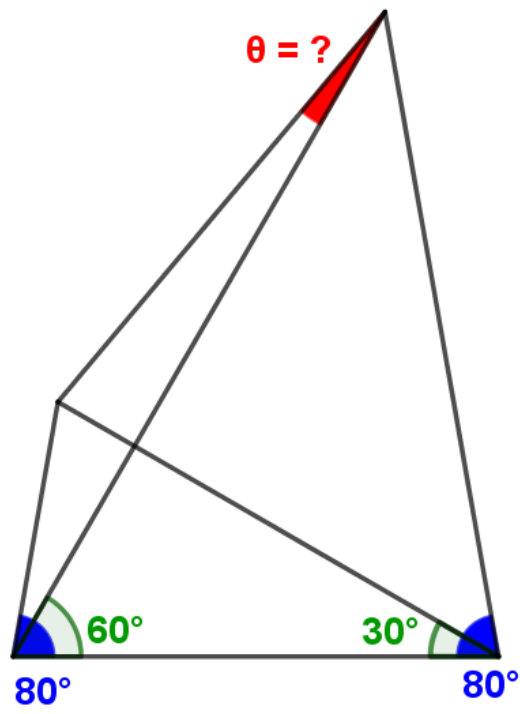
[S2.9](#)



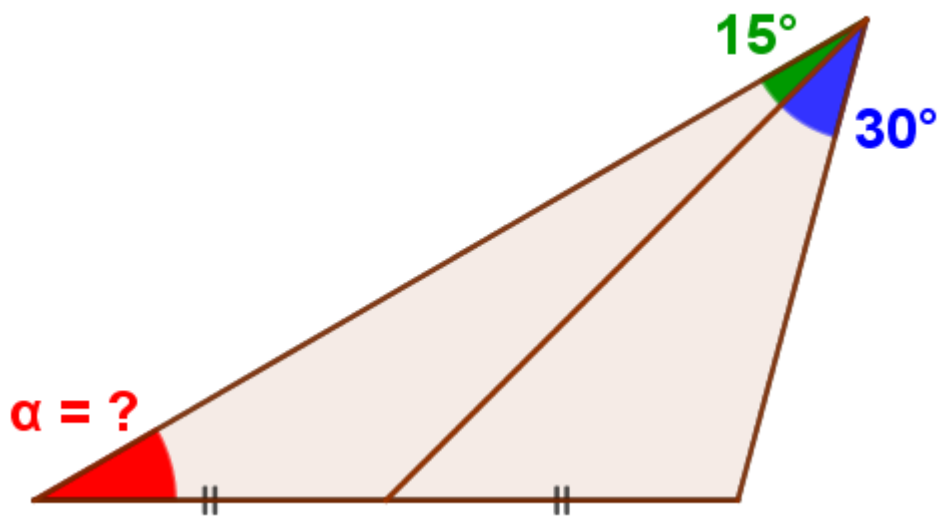
[S2.10](#)



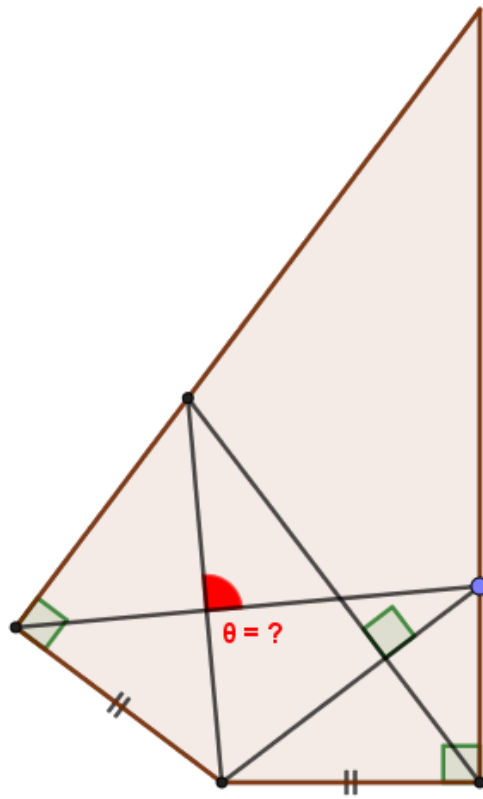
S3.1



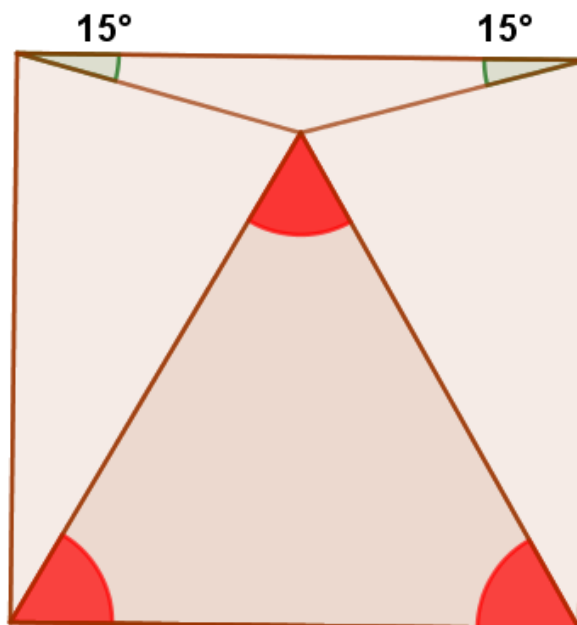
S3.2



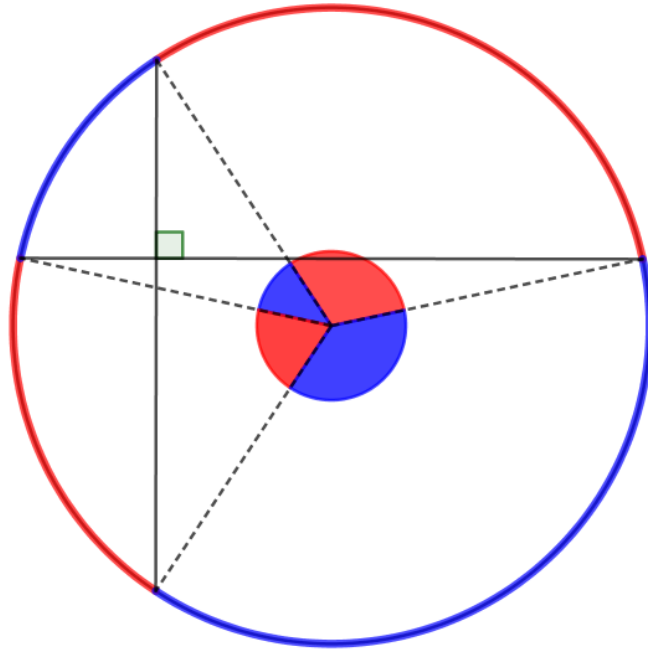
[S3.3](#)



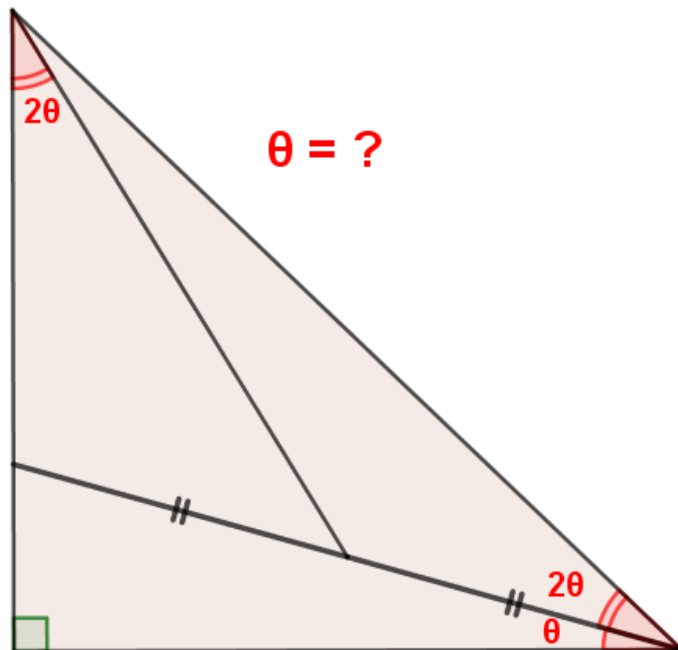
[S3.4](#)



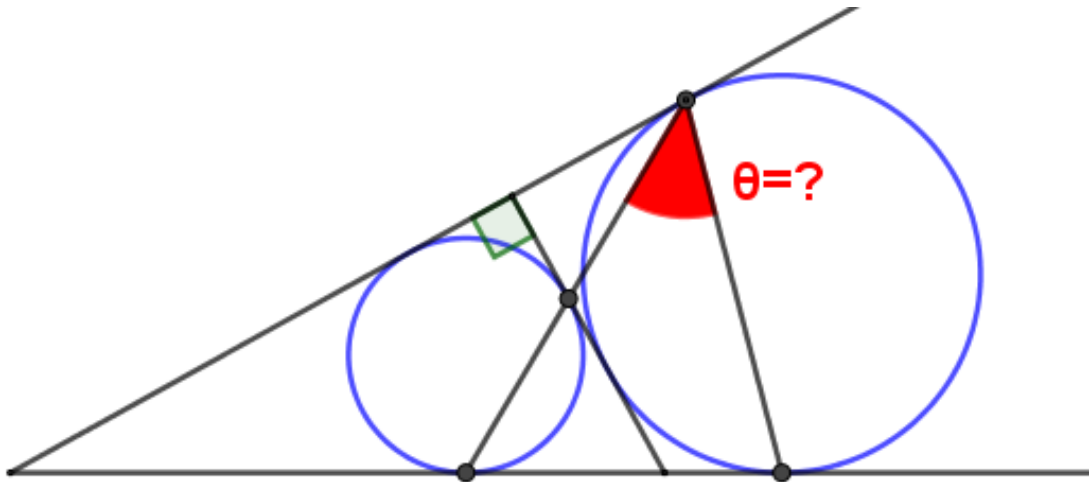
S3.5



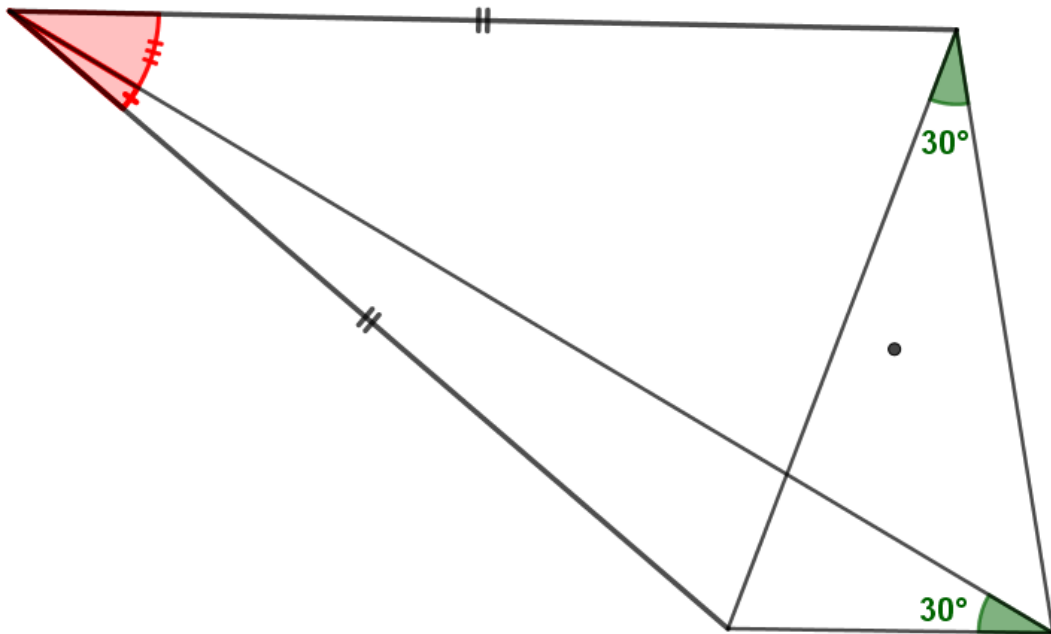
S3.6



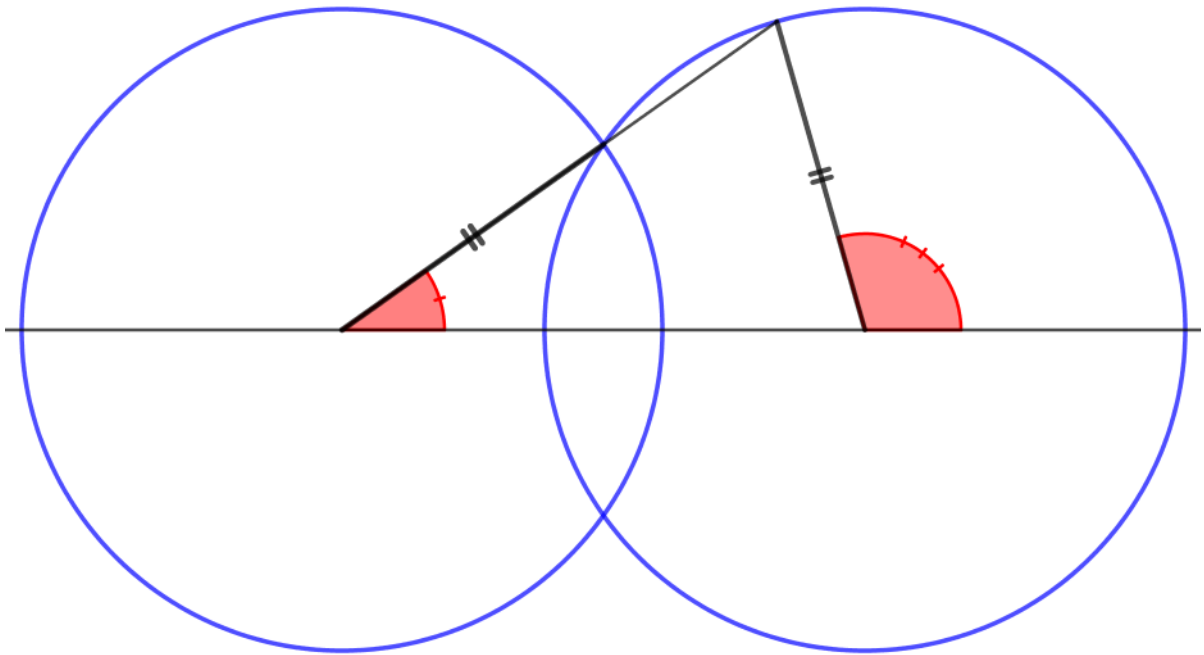
S3.7



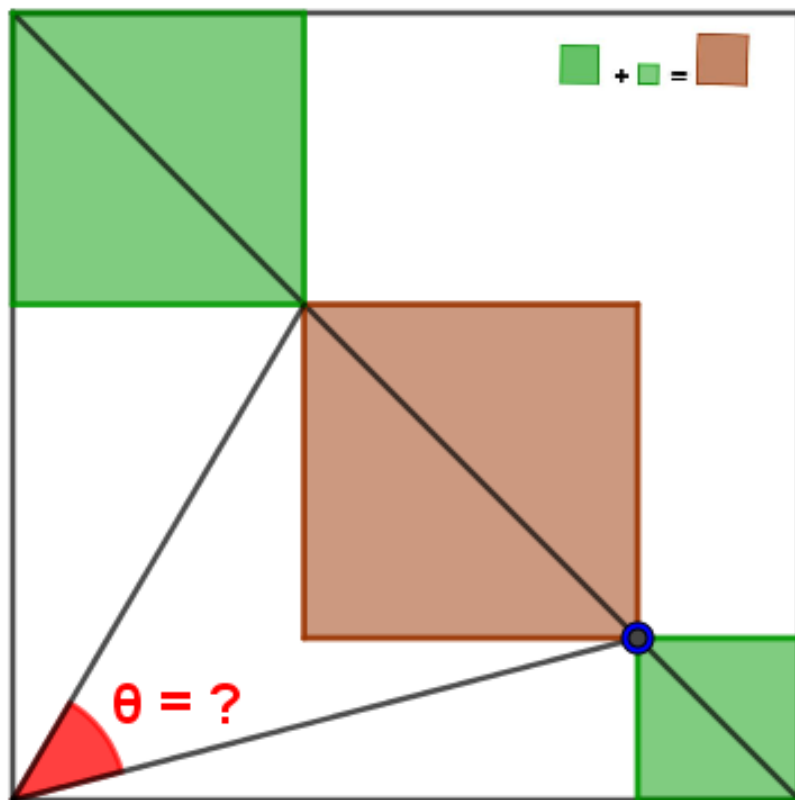
S3.8



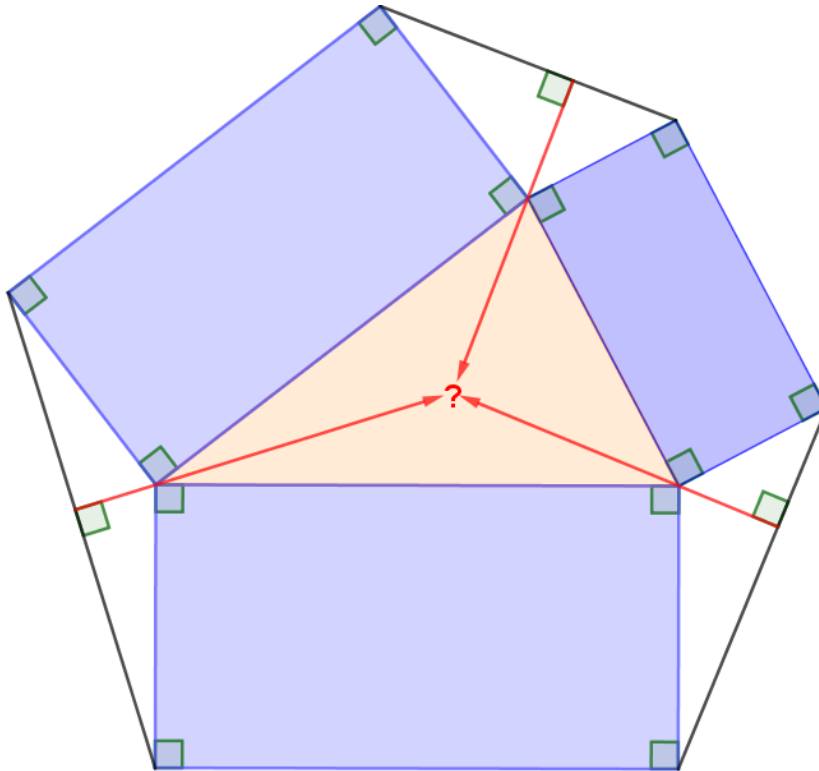
S3.9



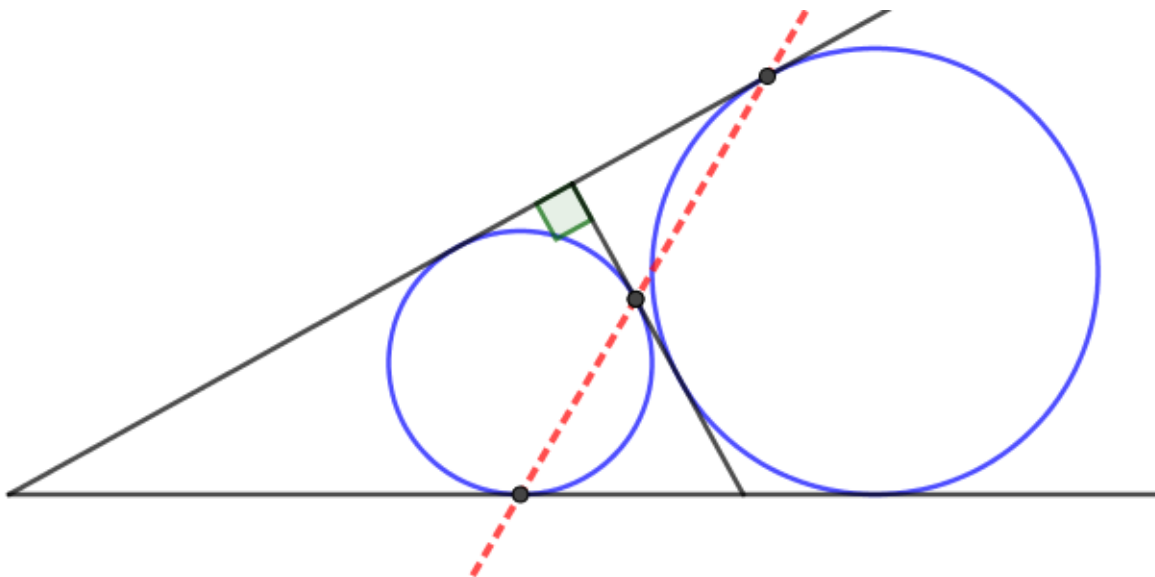
S3.10



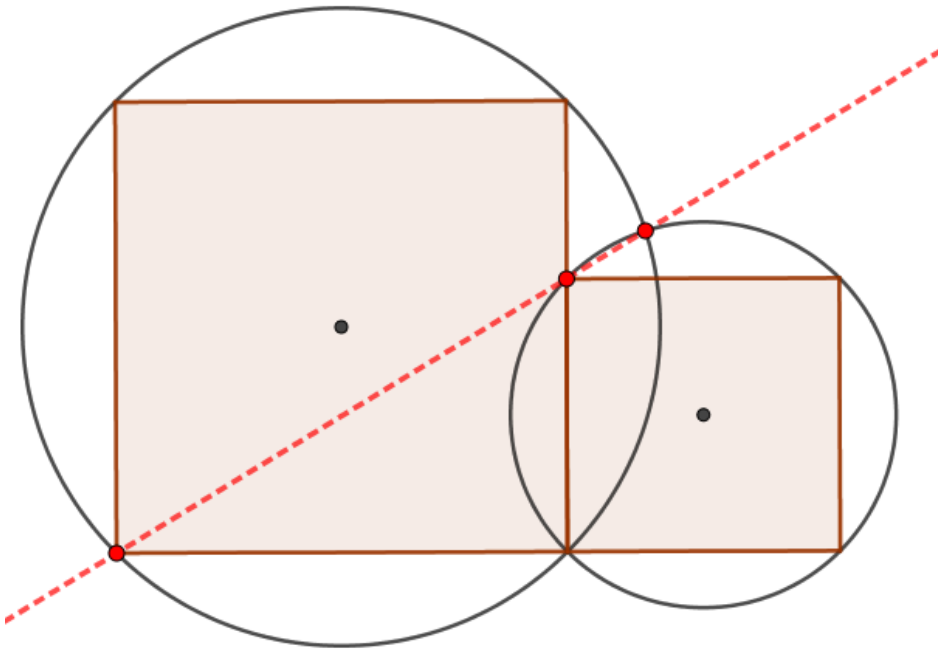
[S4.1](#)



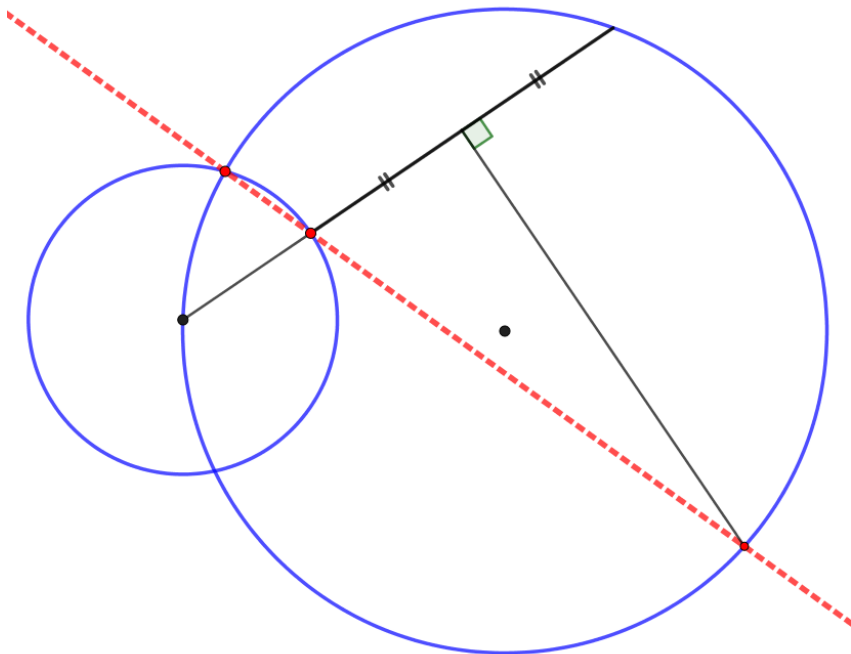
[S4.2](#)



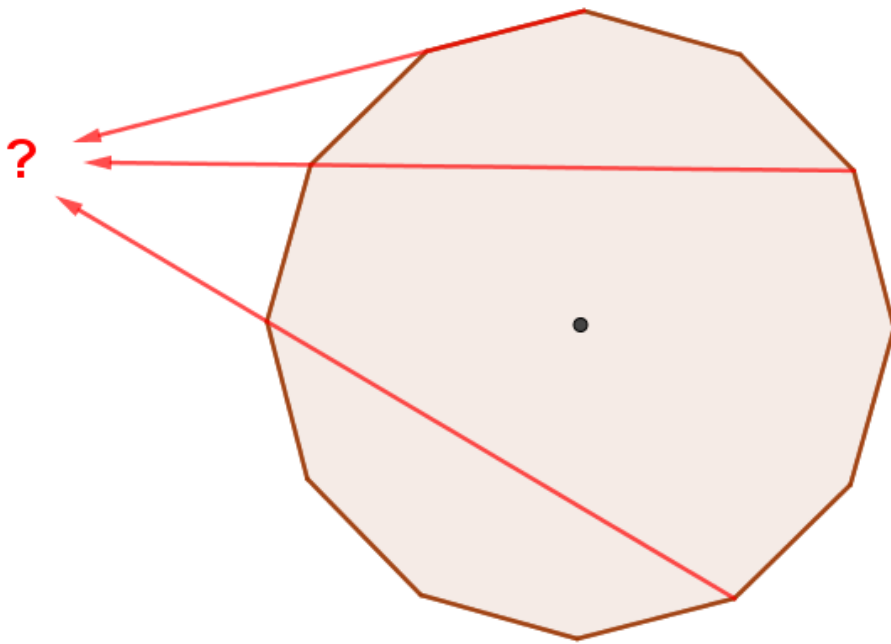
S4.3



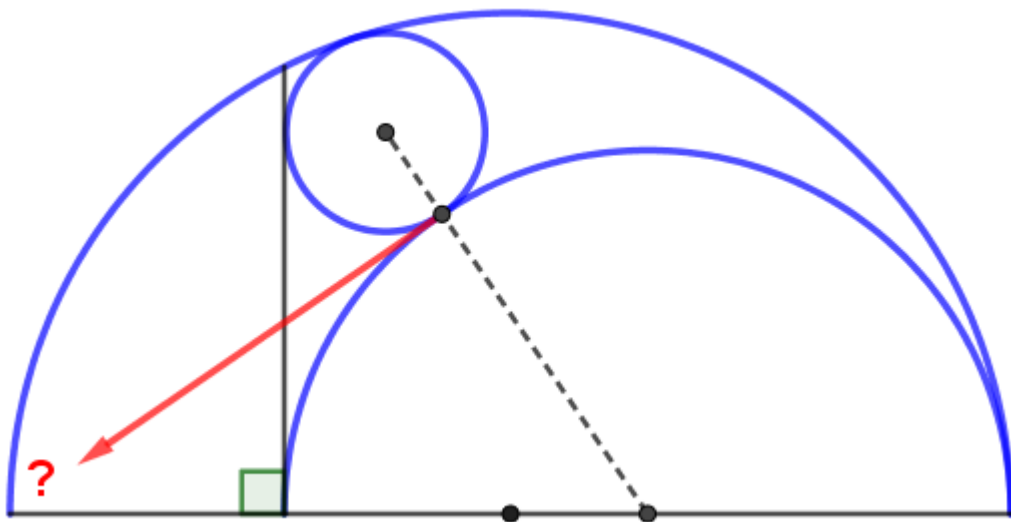
S4.4



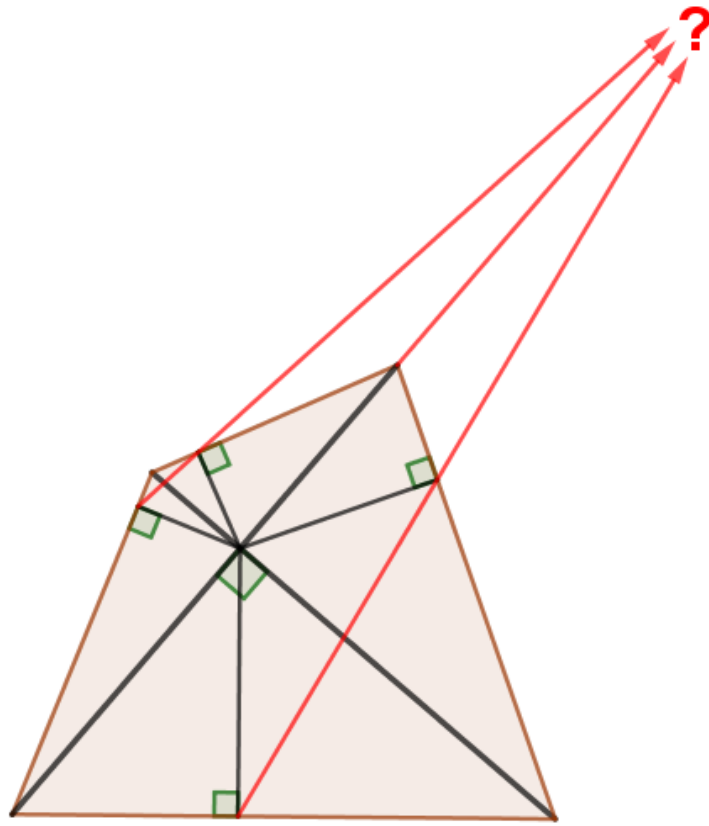
S4.5



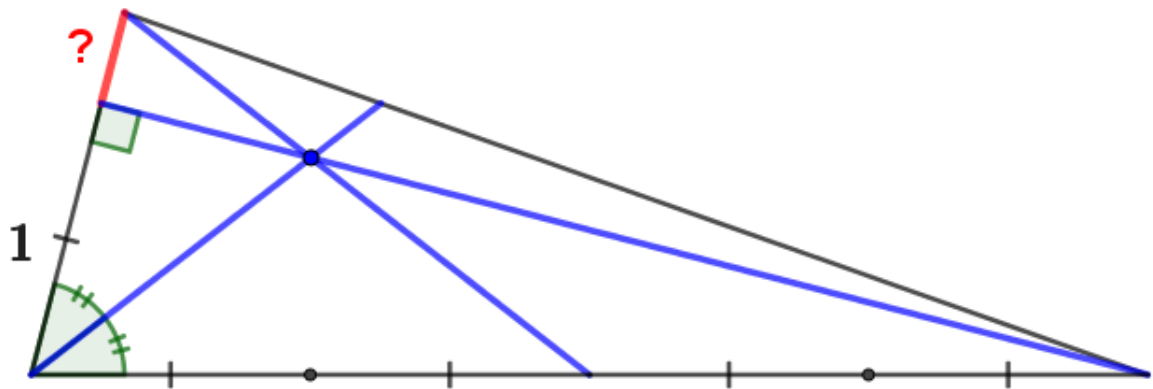
S4.6



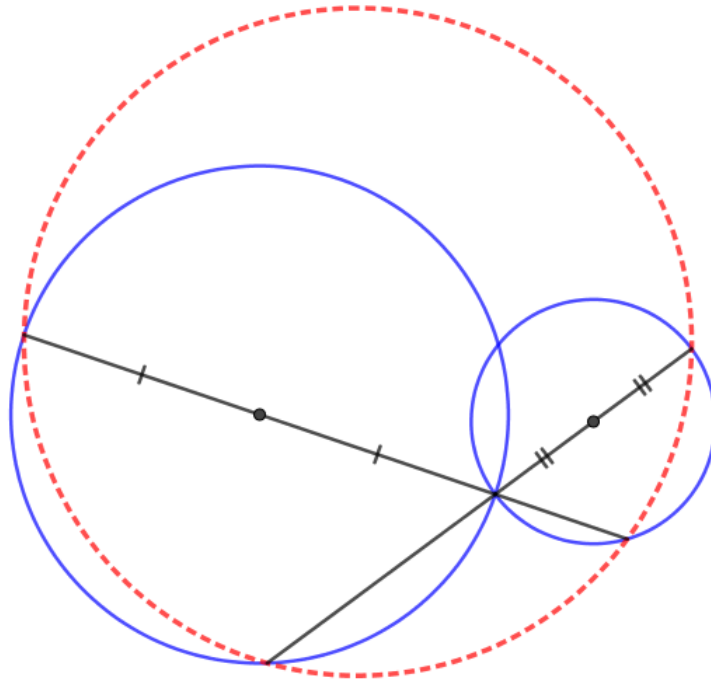
S4.9



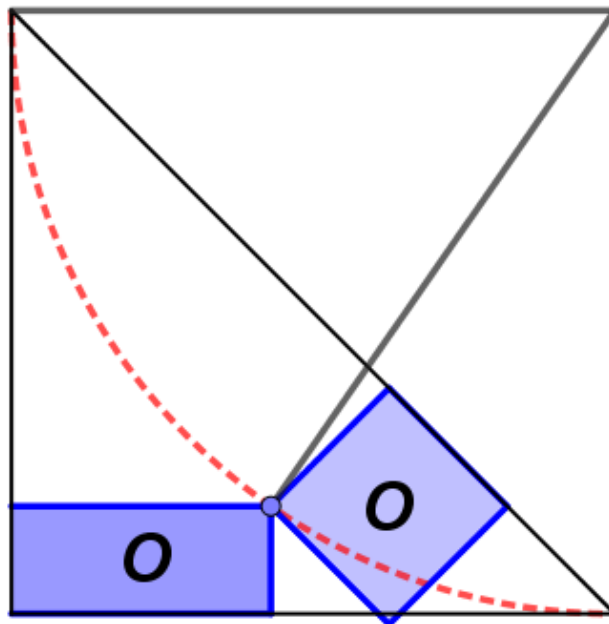
S4.10



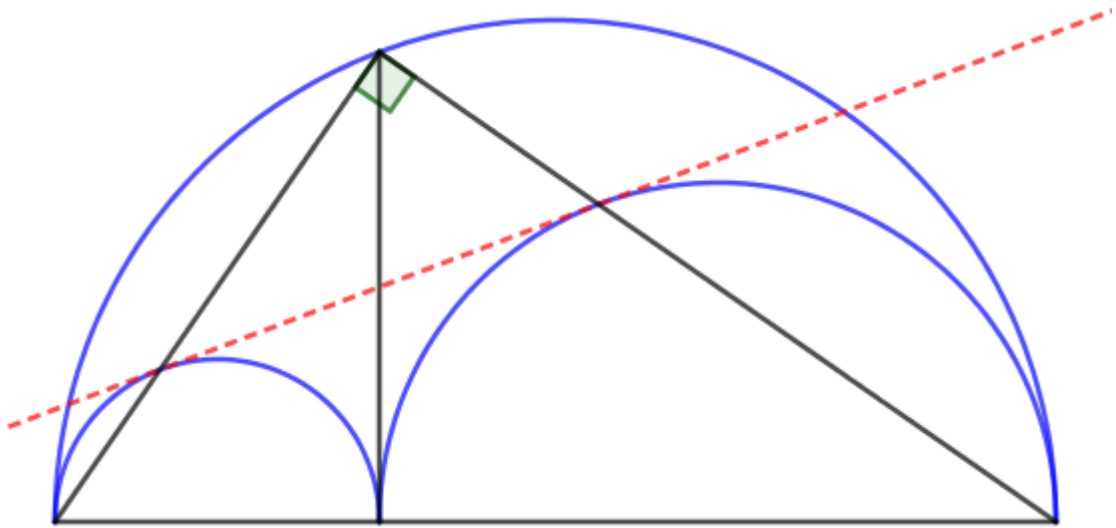
S5.1



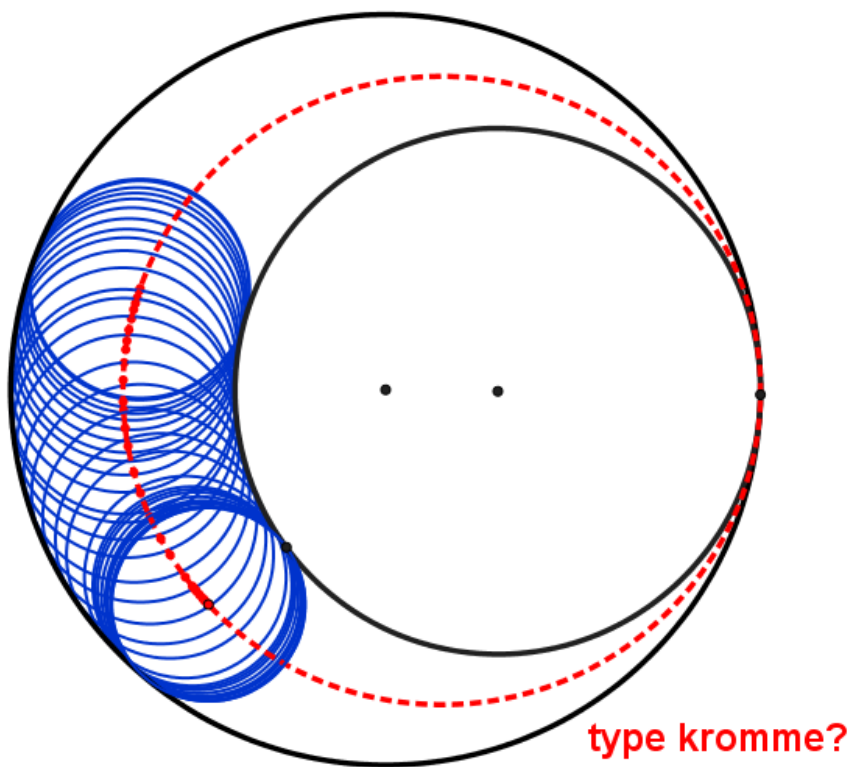
S5.2



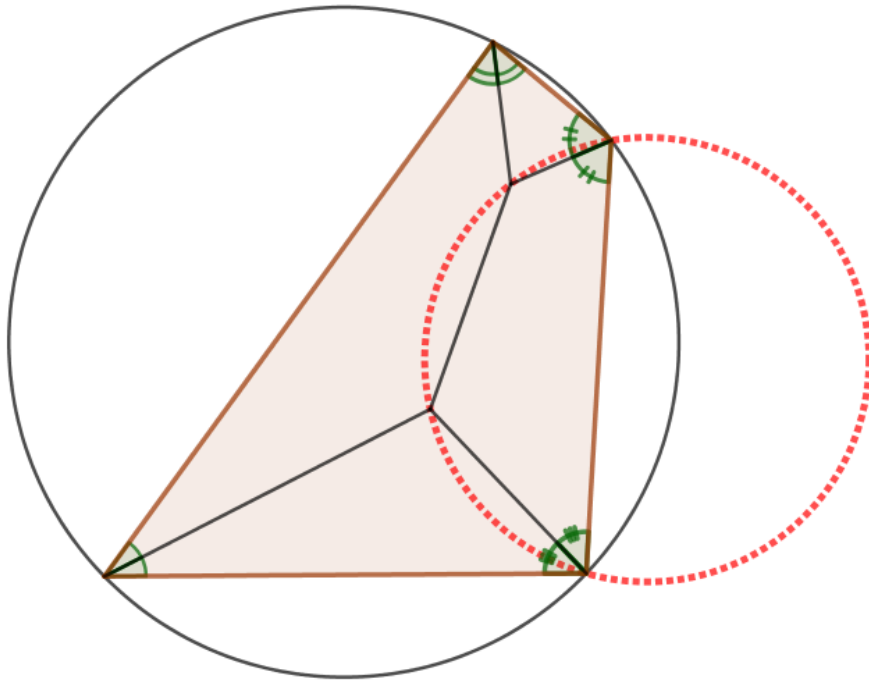
S5.3



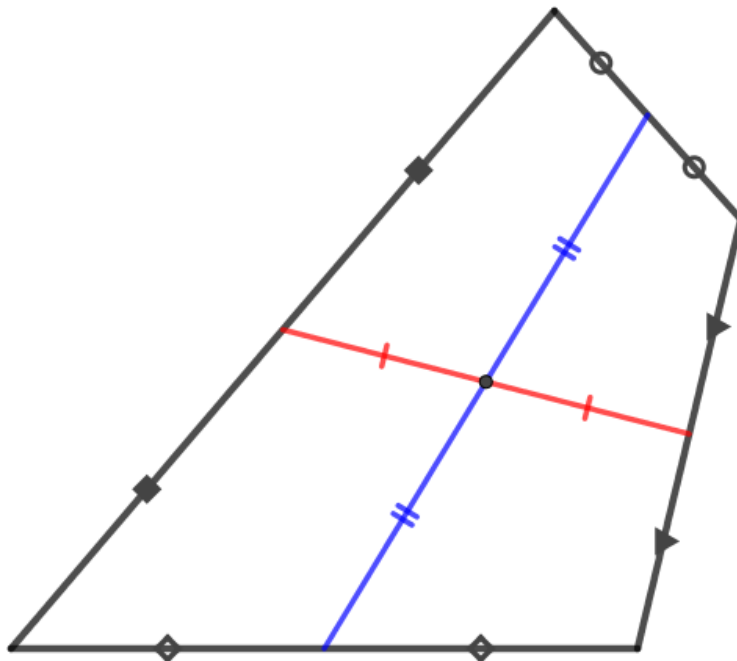
S5.4



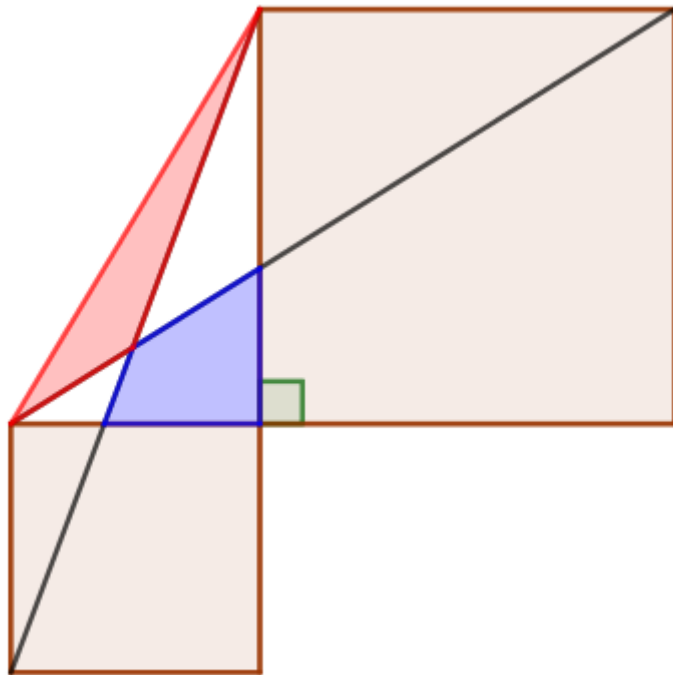
[S5.7](#)



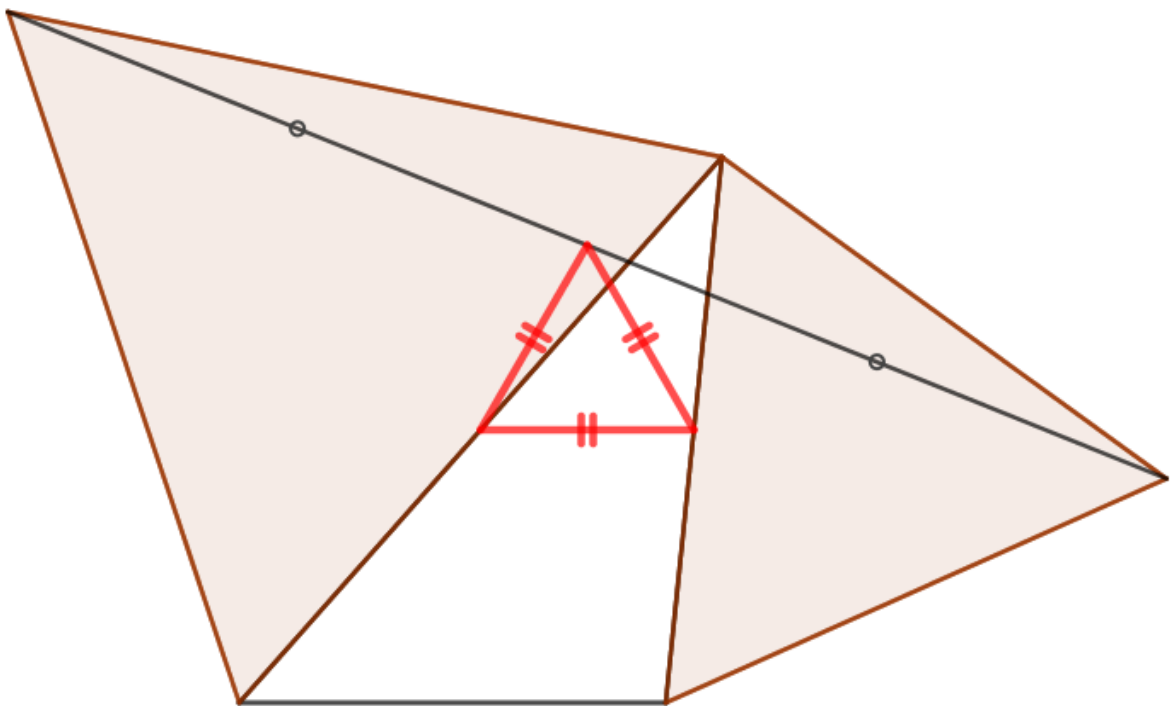
[S5.8](#)



[S5.9](#)



[S5.10](#)



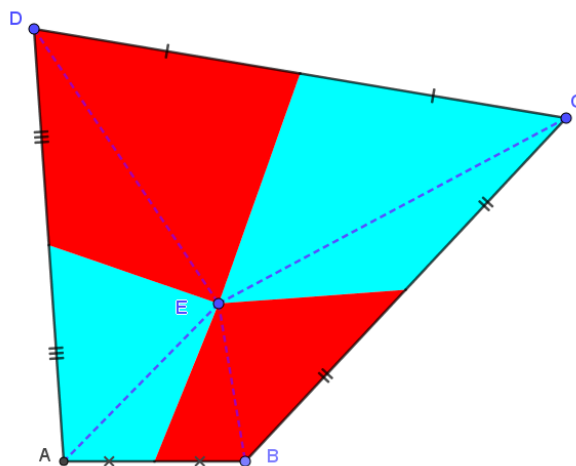
Oplossingen serie S1.x: over oppervlakte.

S1.1: Gegeven: Vierhoek willekeurig waarvan de zijden zijn gehalveerd.

Te bewijzen: Oppervlakte blauw gebied = oppervlakte rood gebied.

Bewijs: De hulplijnen verdelen de vierhoeken. In $\triangle ABE$ is de oppervlakte van het blauwe deel gelijk aan de oppervlakte van het rode deel (zelfde hoogte en gelijke basis). En dat geldt bij elke driehoek met tophoek E in de figuur.

Q.E.D.



S1.2: Gegeven: Even grote cirkels, een zijde van een driehoek raakt aan cirkel, op de andere zijde staat een vierkant.

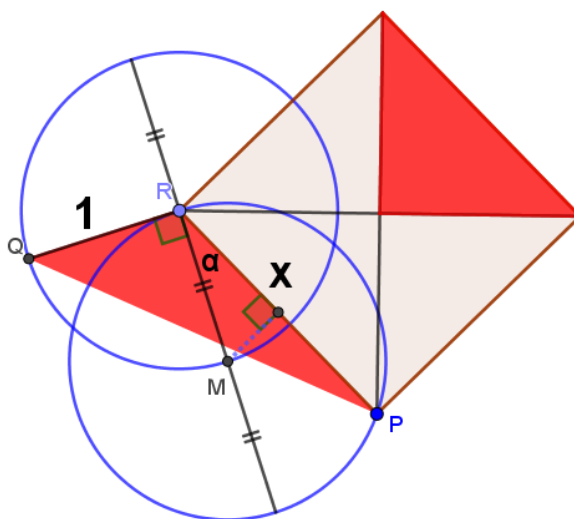
Te bewijzen: Oppervlakte rode driehoeken zijn gelijk.

Bewijs: $x = 2\cos(\alpha)$.

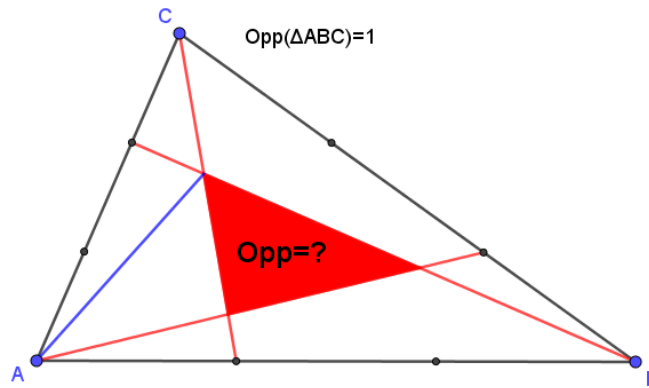
$$\text{Opp } \triangle PRQ = \frac{1}{2}x \cdot 1 \cdot \sin(90^\circ + \alpha) = \frac{1}{2}x \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2}x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{4}$$

En dit is een kwart van de oppervlakte van het vierkant met zijde x .

Q.E.D.

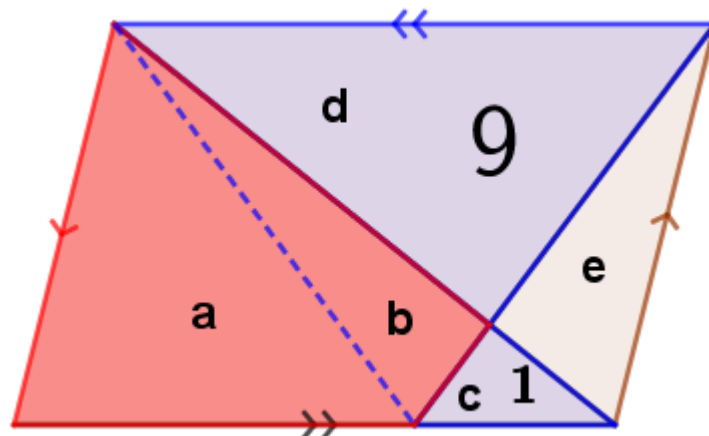


S1.3: Gegeven: Driehoek waarvan de zijden in drie gelijke stukken zijn gedeeld.
 Gevraagd: Oppervlakte van het ingesloten driehoekje.
 Oplossing: Eerst via de stelling van Menelaos de ligging van de hoekpunten van dat driehoekje bepalen. Dan blijkt dat alle rode lijnstukken worden verdeeld in de verhouding 3:3:1. De blauwe lijn is toegevoegd.
 Daarmee volgt: $Opp = \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3} O(ABC) = \frac{1}{7}$.



Voorbeeld bij de formule van Routh; FM.

S1.4: Gegeven: Parallellogram, getallen stellen oppervlaktes voor.
 Gevraagd: Oppervlakte van de vierhoek.
 Oplossing: Blauwe stippellijn is toegevoegd. Die verdeelt de vierhoek in stukken a en b.
 $Ob+Oc=Oe+Oc$ dus: $Ob=Oe$ (vlinderfiguur).
 $Oa+Ob+Oc=Od+Oe$ (helft van het parallellogram). Gevolg: $Oa=8$.
 $Od=9=\frac{1}{2}h_1p$ (p is langste zijde parallellogram) en $Oc=1=\frac{1}{2}h_2q$ (q basis kleine driehoek).
 En t.g.v. gelijkvormigheid: $\frac{h_1}{p} = \frac{h_2}{q}$. Gevolg: $p^2 = 9q^2$ ofwel $p = 3q$.
 $Oa=8$, met basis $2q$. Dus: $Ob+Oc=4$, met basis q . Dus: $Oa+Ob=8+3=11$.
 NB: In het algemeen geldt dat als $Od=m^2$ en $Oc=n^2$ dan $Oa+Ob = m^2 - n^2 + mn$.



S1.5: Gegeven: Rechthoekige driehoek met twee raakcirkels.

Te bewijzen: Oppervlakte vierkant = oppervlakte rechthoek.

Bewijs: Via $\triangle MPA \sim \triangle MAN$, want

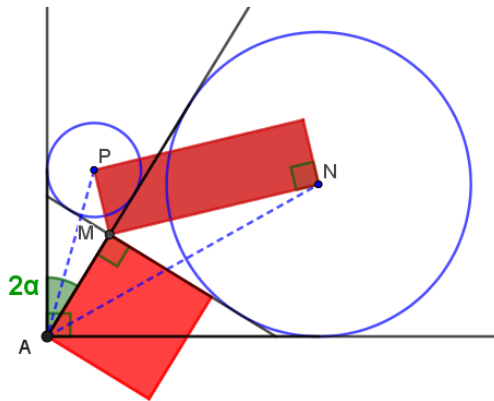
$\sphericalangle MAP = \alpha$; $\sphericalangle AMP = 135^\circ$ dus $\sphericalangle MPA = 45^\circ - \alpha$.

en $\sphericalangle MAN = 45^\circ - \alpha$; $\sphericalangle AMN = 135^\circ$ dus $\sphericalangle MNA = \alpha$.

Gevolg: $MP : MA = MA : MN$

Dus: $|MA|^2 = |MP| \cdot |MN|$.

Q.E.D.



S1.6: Gegeven: Driehoek met vierkanten op de zijden en nog drie vierkanten waarvan een derde deel gemarkeerd is.

Te bewijzen: Oppervlakte vierkanten op driehoek = oppervlakte gemarkeerde stukken.

Bewijs: Met de cos-regel bij hoekpunt A: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\sphericalangle A)$.

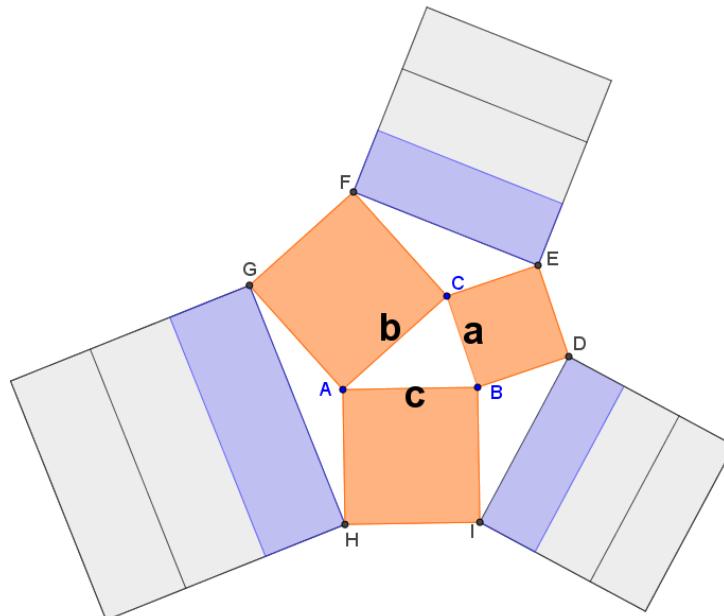
En ook: $|GH|^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\sphericalangle HAG) = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(\sphericalangle A)$.

Dus: $|GH|^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$.

Analoog bij de hoekpunten B en C. Tel die laatste uitdrukkingen bij elkaar. Er volgt:

$|GH|^2 + |DI|^2 + |EF|^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$.

Q.E.D.



S1.7: Gegeven: Een gelijkzijdige driehoek en daar omheen een rechthoek.

Te bewijzen: Oppervlakte rode driehoek = som oppervlakten blauwe driehoeken.

Bewijs: Neem zijde driehoek = 1. $\gamma = 180^\circ - (60^\circ + \beta) = 30^\circ + \alpha$ en $\delta = 90^\circ - (60^\circ + \alpha)$.

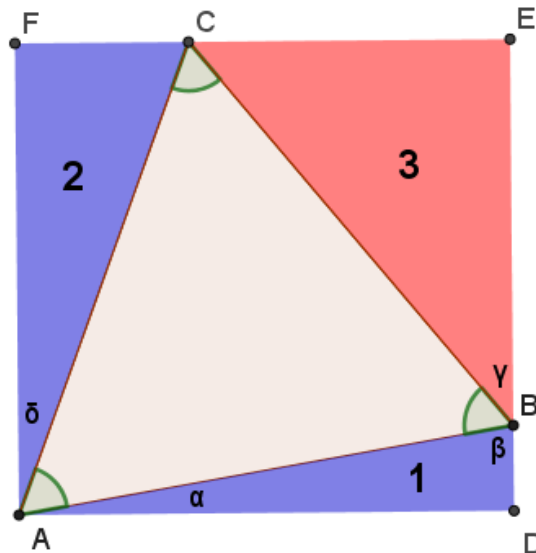
$$O_1 = \frac{1}{2} |BD| \cdot |AD| = \frac{1}{2} \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{4} \sin(2\alpha).$$

$$O_2 = \frac{1}{2} \sin(\delta) \cos(\delta) = \frac{1}{2} \sin(30^\circ - \alpha) \cos(30^\circ - \alpha) = \frac{1}{4} \sin(60^\circ - 2\alpha).$$

$$O_1 + O_2 = \frac{1}{4} (\sin(2\alpha) + \sin(60^\circ - 2\alpha)) = \frac{1}{4} \cdot 2 \sin(30^\circ) \cos(30^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{4} \cos(30^\circ - 2\alpha).$$

$$O_3 = \frac{1}{2} \sin(\gamma) \cos(\gamma) = \frac{1}{2} \sin(30^\circ + \alpha) \cos(30^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \sin(60^\circ + 2\alpha) = \frac{1}{4} \cos(30^\circ - 2\alpha).$$

Q.E.D.

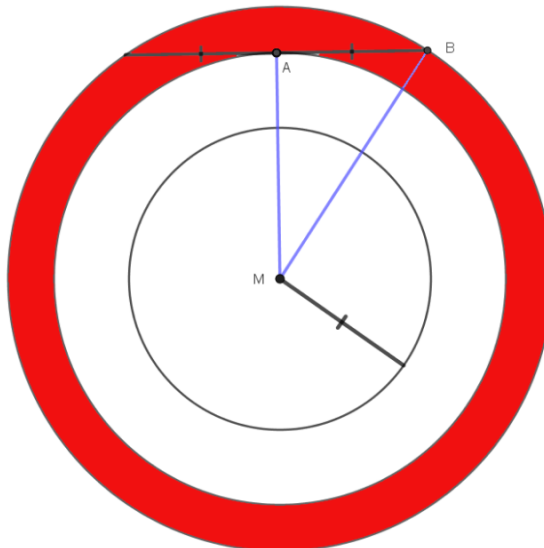


S1.8: Gegeven: Drie cirkels. Raaklijnstukken zijn gelijk aan de straal van de kleinste cirkel.

Te bewijzen: Oppervlakte rode gebied = oppervlakte kleine cirkel.

Bewijs: Noem straal kleine cirkel a . $O_{pp} = \pi a^2$. Oppervlakte rode gebied is verschil van twee cirkels. $O_{pp} = \pi \cdot |MB|^2 - \pi \cdot |MA|^2 = \pi \cdot |AB|^2 = \pi a^2$.

Q.E.D.



Voorbeeld bij de stelling van Holditch; FM.

S1.9: Geg: Rechthoekige driehoek waarvan de zijden middellijnen zijn van drie cirkels.
 Te bewijzen: Som oppervlaktes gebieden 1, 3, 4 en 6 = oppervlakte gebied 9.

Bewijs: $O_1 + O_2 + O_4 + O_8 + Opp(\text{driehoek met hypotenusa } a) = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

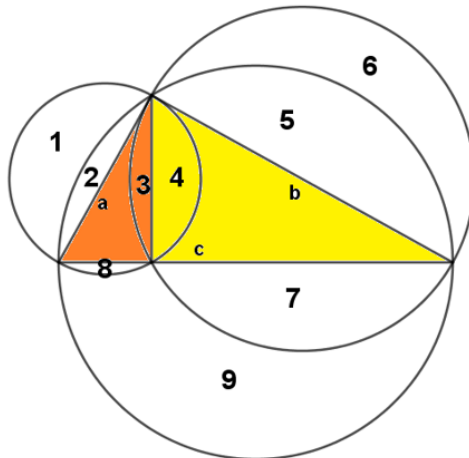
$O_3 + O_5 + O_6 + O_7 + Opp(\text{driehoek met hypotenusa } b) = \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

$O_2 + O_5 + O_7 + O_8 + O_9 + Opp(\text{driehoek met hypotenusa } c) = \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2$.

Trek van de derde regel de eerste en de tweede regel af. Er volgt nu:

$$O_9 - O_1 - O_3 - O_4 - O_6 = \frac{\pi}{4}(c^2 - a^2 - b^2) = 0.$$

Q.E.D.



Voorbeeld uit Lessen Voortgezette meetkunde MLW-HAN⁴; FM

S1.10: Gegeven: Driehoek met zwaartelijns en een punt willekeurig daarop.

Te bewijzen: Som oppervlakte rode driehoeken is gelijk aan som oppervlakte blauwe driehoeken.

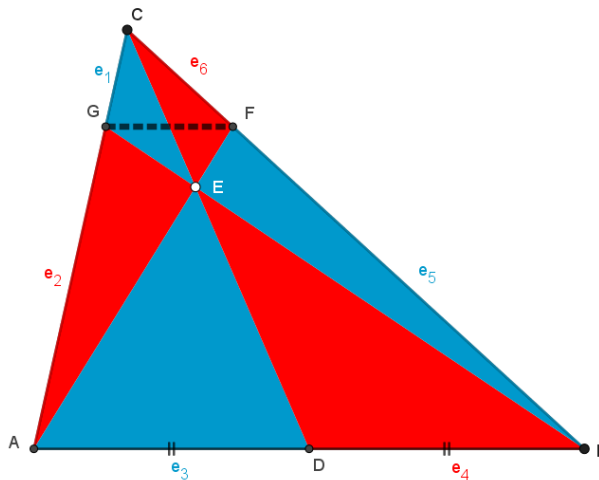
Bewijs: M.b.v. stelling van Ceva, $\frac{e_1}{e_2} \frac{e_3}{e_4} \frac{e_5}{e_6} = 1$ volgt: $e_1 : e_2 = e_6 : e_5$. Dus $GF \parallel AB$.

Gevolg: $O(\triangle BGF) = O(\triangle AGF)$, zelfde hoogte en basis. Gevolg: $O(\triangle AEG) = O(\triangle BEF)$ (1).

Omdat $O(\triangle ADC) = O(\triangle BDC)$ en $O(\triangle ADE) = O(\triangle BDE)$ (2) volgt: $O(\triangle CGE) = O(\triangle CFE)$ (3).

Uit (1), (2) en (3) volgt het gestelde.

Q.E.D.



⁴ Master Leraar Wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen.

Oplossingen serie S2.x: over lengte.

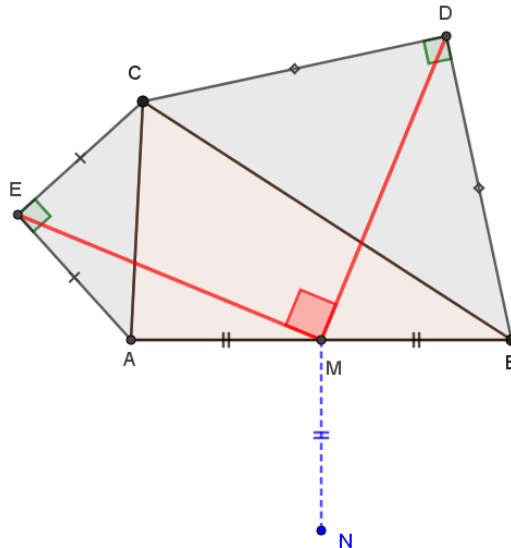
S2.1: Geg: Driehoek willekeurig. Op de zijden staan gelijkbenige rechthoekige driehoeken.
Te bewijzen: Rode lijnstukken zijn even lang en staan loodrecht op elkaar.

Bewijs: Maak de afbeelding $K = D_{B,-45^\circ} \circ F_{B,\frac{1}{\sqrt{2}}} \circ F_{A,\sqrt{2}} \circ D_{A,-45^\circ}$. Volg punt E: $E \rightarrow C \rightarrow D$.

K is een directe congruentieafbeelding (factor=1) maar behoudt niet evenwijdigheid. Dus K is een draaiing: $D_{X,-90^\circ}$. Volg nu M onder afbeelding K: $M \rightarrow N \rightarrow M$. Blijkbaar is M invariant onder K ofwel onder $D_{X,-90^\circ}$. Dus $X=M$. Blijkbaar geldt: $D_{M,-90^\circ}(E) = D$.

Dus: $|ME| = |MD|$ en $ME \perp MD$.

Q.E.D.



S2.2: Gegeven: Loodlijnen op middellijnen van de cirkel.

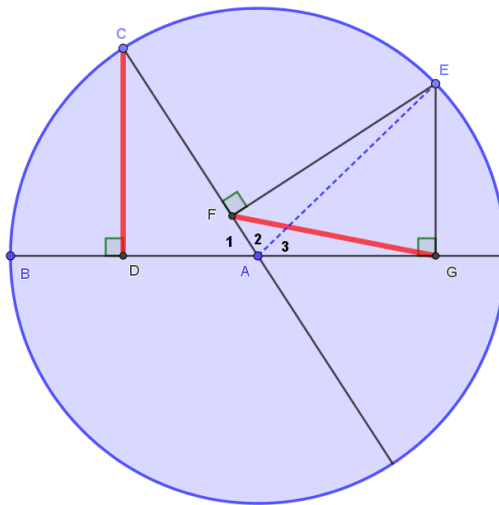
Te bewijzen: Rode lijnstukken zijn even lang.

Bewijs: De blauwe stippellijn is toegevoegd. Neem: straal= 1. Vierhoek AGEF is een koordenvierhoek.

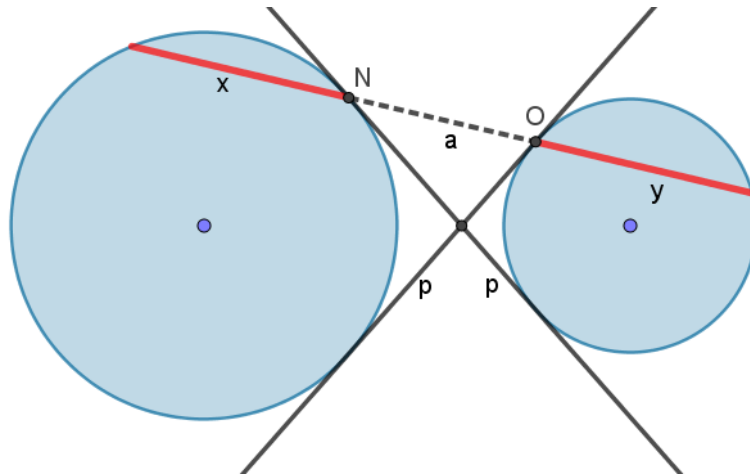
T.g.v. de stelling van Ptolemeus: $|AE| \cdot |GF| = |AF| \cdot |EG| + |AG| \cdot |EF|$. Er volgt ($|AE|=1$):

$|GF| = \cos(\angle A_2) \sin(\angle A_3) + \cos(\angle A_3) \sin(\angle A_2) = \sin(\angle A_{23}) = \sin(\angle A_1) = |CD|$.

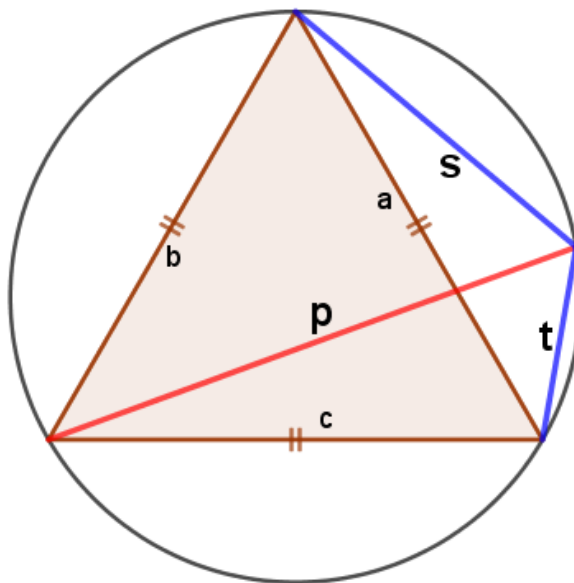
Q.E.D.



S2.3: Geg: Raaklijnen aan cirkels. Door raakpunten een lijn die de cirkels nogmaals snijdt.
 Te bewijzen: Rode lijnstukken zijn even lang.
 Bewijs: Raaklijnen zijn even lang (p). Macht (N, kleine cirkel) = $p^2 = a(a + y)$
 Macht (O, grote cirkel) = $p^2 = a(a + x)$. Dus: $x = y$.
 Q.E.D.



S2.4: Gegeven: Gelijkzijdige driehoek met omgeschreven cirkel.
 Te bewijzen: Lengte rode lijnstuk = som lengtes blauwe lijnstukken.
 Bewijs: Met Ptolemeus voor koordenvierhoek volgt: $a \cdot p = b \cdot t + c \cdot s$.
 Omdat $a = b = c$ volgt meteen $p = s + t$.
 Q.E.D.



S2.5: Gegeven: Vierkant, raakcirkel én kwartcirkel en twee kleinere raakcirkels.

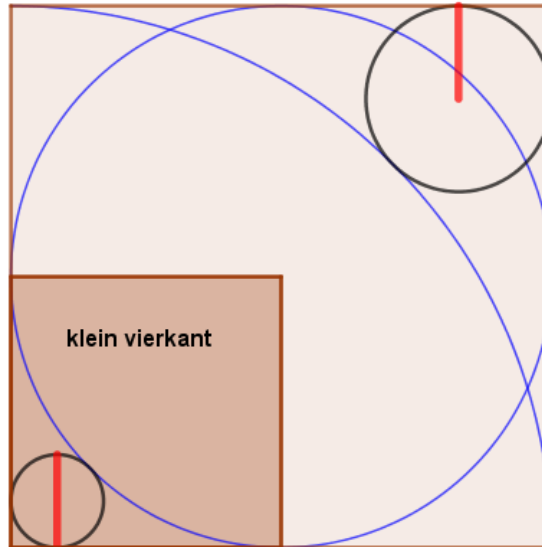
Te bewijzen: Rode lijnstukken zijn even lang.

Bewijs: In vierkantje linksonder, kwart van geheel, staat gedraaid dezelfde figuur als in het geheel.

Dus na vermenigvuldiging met factor 2 is figuur linksonder even groot als de gehele figuur. Diameter cirkeltje wordt dan 2x groter en wordt dan diameter cirkeltje rechtsboven.

Dus: straal cirkel rechtsboven = diameter cirkel linksonder.

Q.E.D.



S2.6: Gegeven: Driehoek met gegeven hoekgroottes en met drie bissectrices.

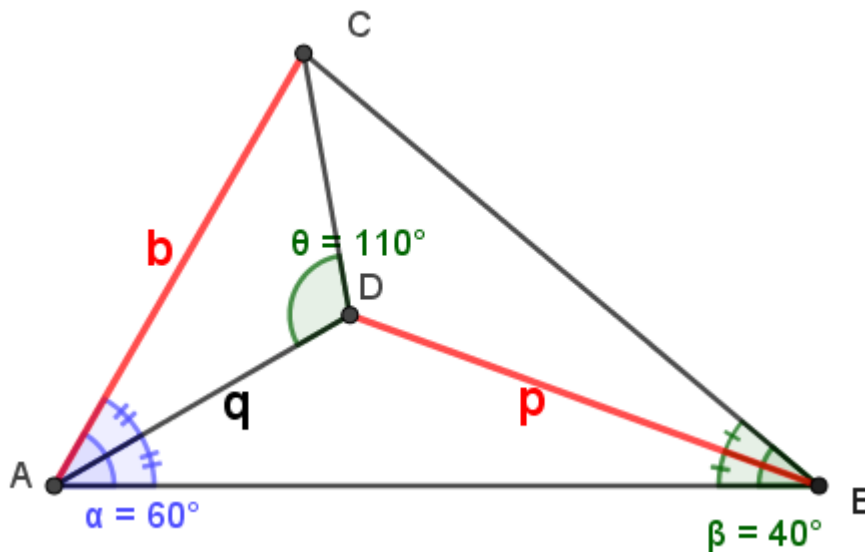
Te bewijzen: Deel bissectrice, rode lijnstuk p = lengte zijde, rode lijnstuk b .

Bewijs: $\frac{b}{\sin(110^\circ)} = \frac{q}{\sin(40^\circ)}$ en $\frac{q}{\sin(20^\circ)} = \frac{p}{\sin(30^\circ)}$.

Dus: $\frac{b \cdot \sin(40^\circ)}{\sin(110^\circ)} = \frac{p \cdot \sin(20^\circ)}{\sin(30^\circ)}$.

$b \cdot 2 \cos(20^\circ) \cdot \sin(30^\circ) = p \cdot \sin(70^\circ)$. Dus: $b \cdot \cos(20^\circ) = p \cdot \cos(90^\circ - 70^\circ)$. Dus: $b = p$.

Q.E.D.



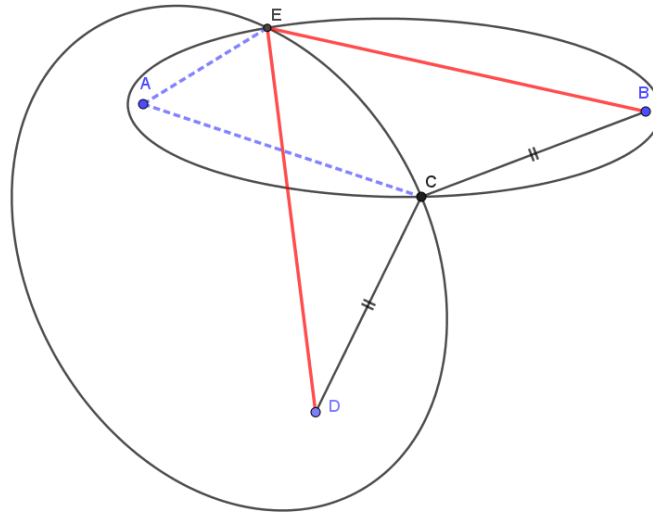
S2.7: Gegeven: Twee ellipsen met één gemeenschappelijk brandpunt. Eén snijpunt ligt op gelijke afstand van de andere brandpunten.

Te bewijzen: De rode lijnstukken zijn gelijk ofwel het andere snijpunt ligt ook op gelijke afstand van de andere brandpunten.

Bewijs: $|AE| + |BE| = |AC| + |BC|$, want C en E op ellips met brandpunten A en B.

Analoog: $|AE| + |DE| = |AC| + |CD|$. Omdat $|BC| = |CD|$ volgt: $|BE| = |DE|$.

Q.E.D.



Idee van Sep Thijssen, docent MLW-HAN.

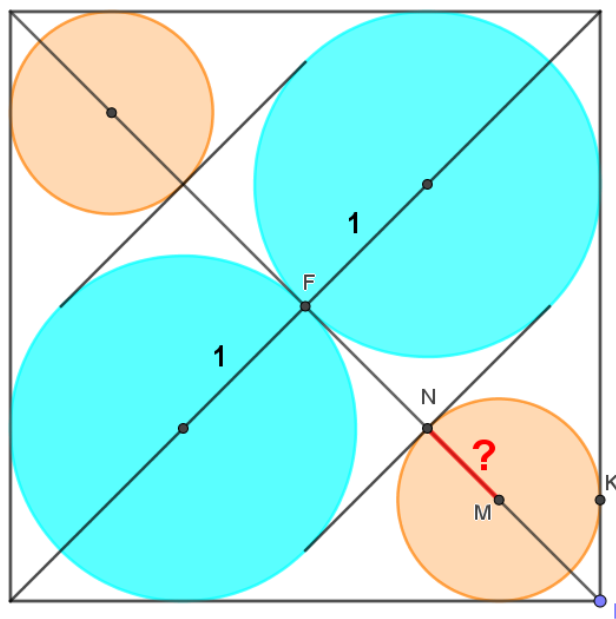
S2.8: Gegeven: Vierkant, twee grote raakcirkels met straal=1 en twee kleine raakcirkels.

Gevraagd: Straal kleine cirkel (= a).

Oplossing: Lengte diagonaal van het vierkant = $2 + 2\sqrt{2}$. $|BF| = 1 + \sqrt{2}$ dus $|BN| = \sqrt{2}$.

Dan volgt: $\sin(\sphericalangle MBK) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}-a}$.

Dus: $a = 2 - \sqrt{2}$.



Voorbeeld komt uit de tekst genoemd in voetnoot 1.

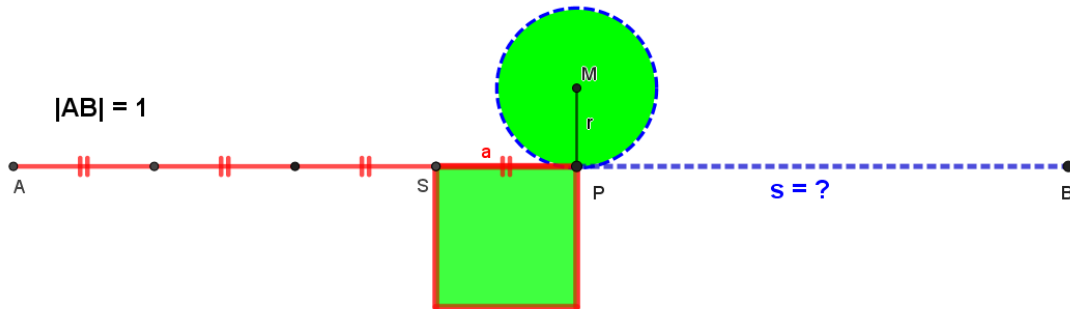
S2.9: Geg: Vierkant en cirkel met gelijke oppervlakte. Omtrek vierkant + omtrek cirkel = 1.

Gevraagd: Omtrek van de cirkel (= s).

Oplossing: Oppervlaktes gelijk dus: $a^2 = \pi r^2$. Som omtrekken = $4a + 2\pi r = 1$.

Dus: $r = \frac{1}{4\sqrt{\pi} + 2\pi}$ en met gevolg: $s = 2\pi r = \frac{\sqrt{\pi}}{2 + \sqrt{\pi}}$.

NB: $s < \frac{1}{2}$.



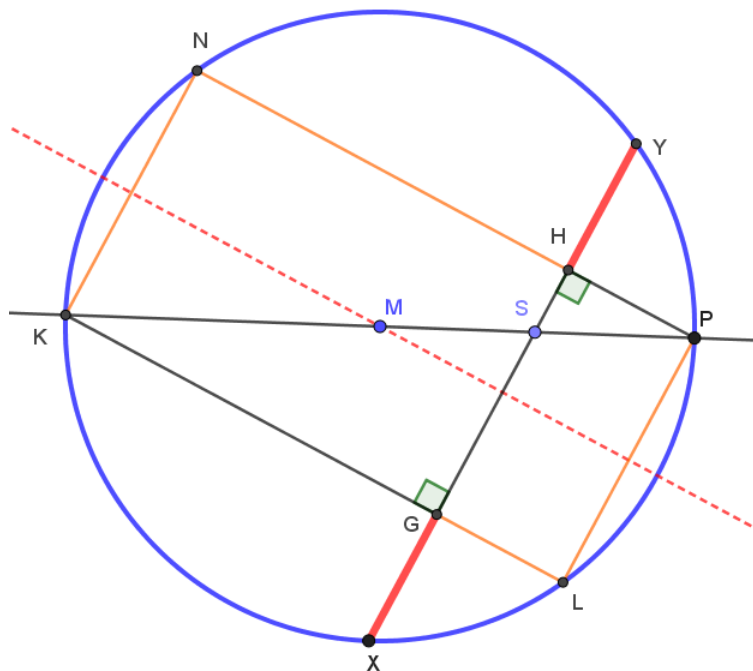
Idee van Irene van Stiphout, docente MLW-HAN.

S2.10: Geg: Middellijn PK en een lijn door een punt S en loodlijnen uit P en K op die lijn.

Te bewijzen: De rode lijnstukken zijn even lang.

Bewijs: Trek HP en KG door. Zo ontstaat rechthoek KLPN (Thales). De stippellijn door M staat loodrecht op GH. Die lijn is symmetrieas van de rechthoek én van de cirkel, want gaat door M. Spiegelen in die lijn beeldt nu HY af op GX.

Q.E.D.



Een lemma van Archimedes; FM

Oplossingen serie S3.x: over hoek en hoekgrootte.

S3.1: Gegeven: Vierhoek met diagonalen en hoeken.

Gevraagd: Grootte van hoek θ .

Oplossing: Maak punt F zodanig dat $|EF|=|EA|$. Dan geldt: $\sphericalangle EBF = 30^\circ$.

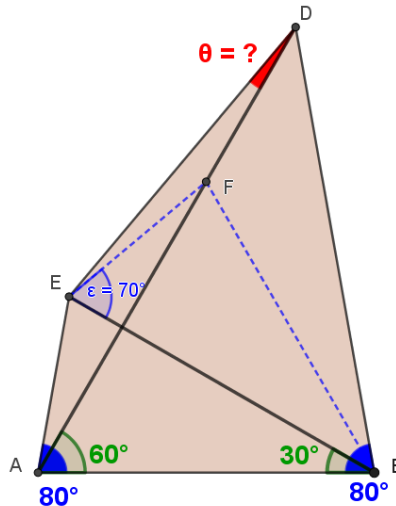
Verder met $\triangle EFB$ en $\triangle DFB$:

$$\frac{|EF|}{\sin(30^\circ)} = \frac{|BF|}{\sin(70^\circ)} \text{ en } \frac{|DF|}{\sin(20^\circ)} = \frac{|BF|}{\sin(40^\circ)}$$

Er volgt: $\frac{|DF| \sin(40^\circ)}{\sin(20^\circ)} = \frac{|EF| \sin(70^\circ)}{\sin(30^\circ)}$. Ofwel: $|DF| \cdot 2 \cos(20^\circ) = |EF| \cdot \frac{\cos(20^\circ)}{\frac{1}{2}}$

Dus: $|DF|=|EF|$. Blijkbaar is $\triangle EFD$ gelijkbenig met tophoek 160° .

Dus $\theta = 10^\circ$.



Probleem Langley-driehoek 80 60 30; FM *

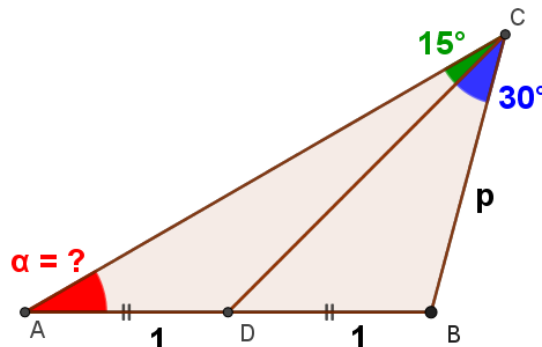
S3.2: Gegeven: In een driehoek maakt een zwaartelijijn hoeken van gegeven grootte.

Gevraagd: Grootte van hoek te A.

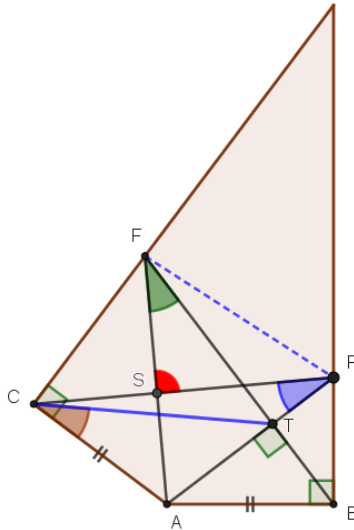
Oplossing: Via sin-regel: $\frac{1}{\sin(30^\circ)} = \frac{p}{\sin(15^\circ + \alpha)}$ en $\frac{2}{\sin(45^\circ)} = \frac{p}{\sin(\alpha)}$.

Dus: $p = 2\sqrt{2} \cdot \sin(\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha + 15^\circ)$.

Omdat $\alpha < 90^\circ$ volgt: $\alpha = 30^\circ$.

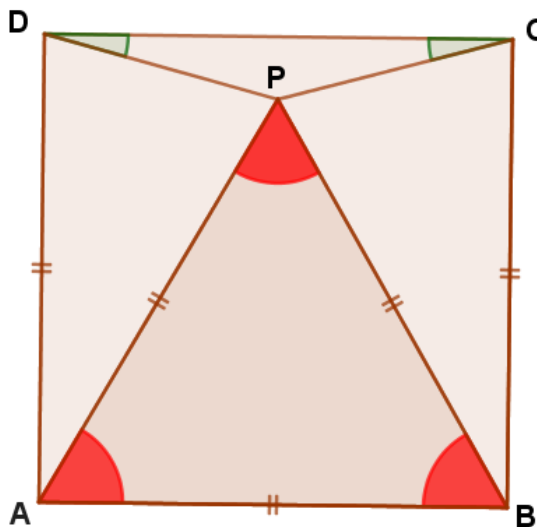


S3.3: Geg: Vlieger met rechte hoeken. Punt P willekeurig op zijde gelegen. $BT \perp AP$.
 Gevraagd: Grootte hoek bij S, het snijpunt van CP en AF.
 Oplossing: $\triangle ABT \sim \triangle APB$. Dus $AB:AT = AP:AB$. Gevolg: $|AT| \cdot |AP| = |AB|^2 = |AC|^2$.
 Hieruit volgt: $AT:AC = AC:AP$ en omdat $\sphericalangle CAT = \sphericalangle PAC$ volgt: $\triangle CAT \sim \triangle PAC$ (zzh).
 Gevolg: $\sphericalangle ACT = \sphericalangle APC \dots = \sphericalangle AFT$, want hoeken op koorde AT in de cirkel door ATFC.
 Hieruit volgt dat op ST dezelfde omtrekshoek staat vanuit P en F gezien. P, F, S en T
 liggen dus op een cirkel. Bij T rechte hoek dus PF is een middellijn (Thales) en bijgevolg is
 de hoek bij S ook recht.

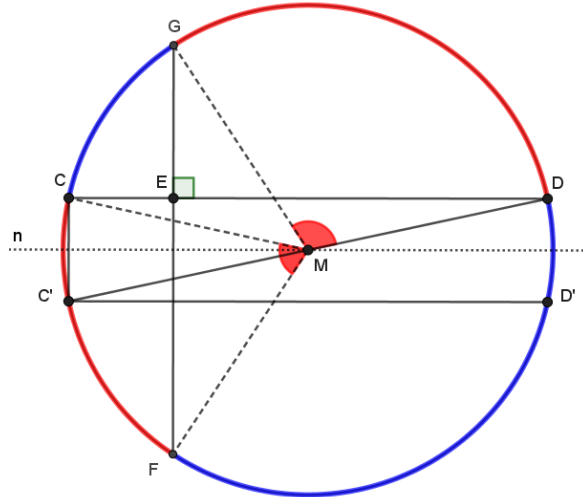


*

S3.4: Gegeven: Vierkant met lijnstukken onder twee gelijke hoeken van 15° .
 Te bewijzen: De ontstane driehoek ABP is gelijkzijdig.
 Bewijs: We bewijzen dit indirect.
 Veronderstel dat de hoekgroottes te C en D onbekend zijn, maar $\triangle ABP$ gelijkzijdig is.
 Dan volgt: $\sphericalangle PAD = \sphericalangle PBC = 30^\circ$. $\triangle PAD$ en $\triangle PBC$ zijn gelijkbenig (ABCD is een vierkant).
 Dus: $\sphericalangle ADP = \sphericalangle APD = \sphericalangle BPC = \sphericalangle BCP = 75^\circ$. Gevolg: $\sphericalangle PDC = \sphericalangle PCD = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.
 Echter: de lijnen uit C en D onder hoeken van 15° zijn uniek dus punt P is uniek.
 Gevolg: beginnen met hoeken van 15° geeft dit punt P dus $\triangle ABP$ moet gelijkzijdig zijn.
 Q.E.D.

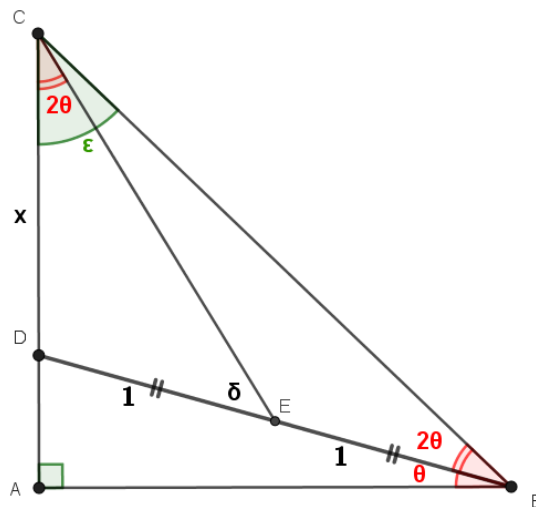


S3.5: Gegeven: Cirkel met twee koorden, loodrecht op elkaar staand.
 Te bewijzen: Rode hoeken samen zijn even groot als de blauwe hoeken samen.
 Bewijs: We gaan bewijzen dat de bijbehorende bogen (rood en blauw) gelijk zijn. ($r = 1$)
 Lijn n door M is evenwijdig aan CD . Spiegel CD in n : $C'D'$ ontstaat. $CC' \perp n$ dus $CC' \perp CD$.
 Te C dus een rechte hoek en bijgevolg is $C'D$ een middellijn (Thales).
 Dus: $bg C'CGD = \text{een halve cirkelboog} = \pi$.
 Gevolg: $\pi = bg C'C + bg CG + bg GD = bg CC' + bg C'F + bg GD = \text{som rode bogen}$.
 Dus de bijbehorende rode hoeken zijn samen 180° , de helft van de gehele hoek te M .
 Q.E.D.



Een lemma van Archimedes. FM

S3.6: Geg: Een rechthoekige driehoek, een zwaartelij en drie samenhangende hoeken.
 Gevraagd: De grootte van hoek θ .
 Oplossing.: Met $\varepsilon = 90^\circ - 3\theta$ volgt $\delta = 90^\circ - 3\theta$ en $\triangle CDE \sim \triangle BDC$ (hh). Dus: $\frac{x}{1} = \frac{2}{x}$, $x = \sqrt{2}$.
 In $\triangle DEC$ geldt: $\frac{x}{\sin(\delta)} = \frac{1}{\sin(2\theta)}$ dus: $\sqrt{2} \sin(2\theta) = \cos(3\theta)$.
 Omdat $\theta < 30^\circ$ volgt als enige oplossing: $\theta = 15^\circ$.
 De driehoek is blijkbaar rechthoekig én gelijkbenig.



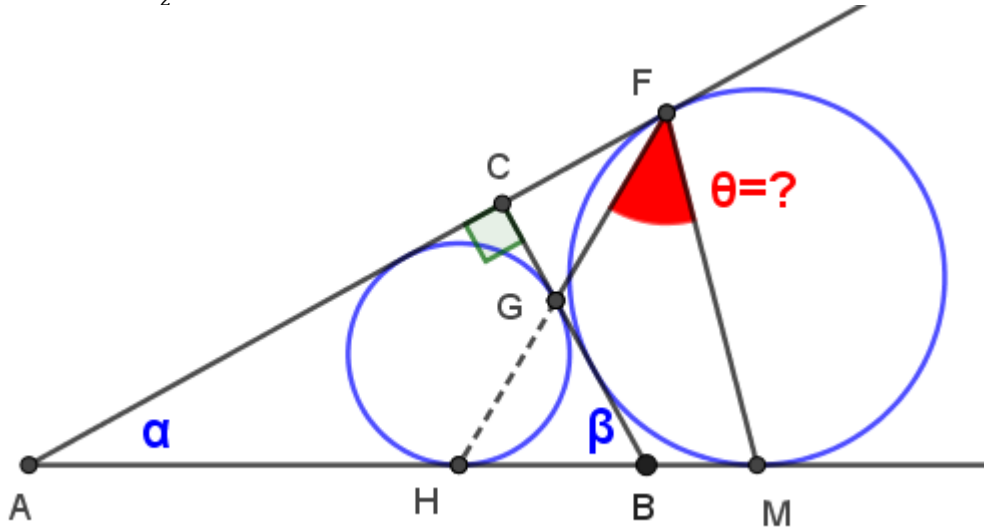
S3.7: Gegeven: Rechthoekige driehoek met twee raakcirkels en raakpunten.

Gevraagd: Hoekgrootte te F (θ).

Oplossing: F, G en H zijn collineair (zie 4.2), dat is nu gegeven.

In ΔMHF geldt: $\sphericalangle MHF = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ (ΔBHG is gelijkbenig!) en $\sphericalangle HMF = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. (zie ΔAMF).

Dus: $\theta = 180^\circ - \dots = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 45^\circ$.



S3.8: Gegeven: Driehoek met hoeken van 30° en een gelijkbenige driehoek.

Te bewijzen: $\sphericalangle BEC = 3 \cdot \sphericalangle BEA$.

Bewijs: Noem M het middelpunt van de omschreven cirkel van ΔABC .

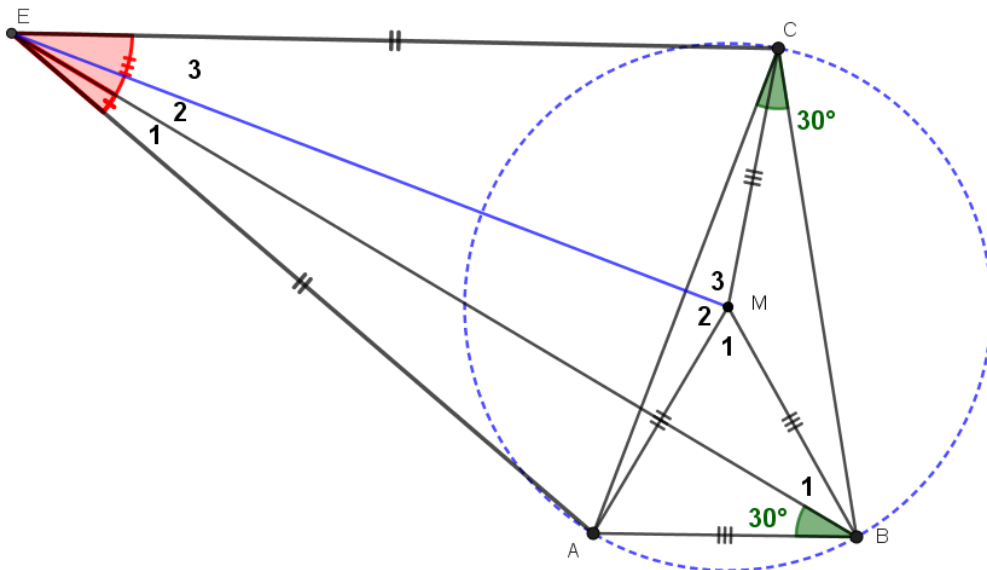
Dan volgt: $\sphericalangle M_1 = 60^\circ$ dus $|AB| = |MB|$ en $\sphericalangle B_1 = 30^\circ$. Gevolg: $\Delta ABE \cong \Delta MBE$ (ZHZ).

Dus: $|AE| = |ME|$ en $\sphericalangle EAM = \sphericalangle M_2$. En er volgt: $\sphericalangle E_1 = \sphericalangle E_2$.

Omdat AMCE een vlieger is, geldt ook: $\sphericalangle E_{12} = \sphericalangle E_3$.

Dus: $\sphericalangle E_{23} = \sphericalangle E_2 + \sphericalangle E_3 = \sphericalangle E_1 + \sphericalangle E_{12} = 3 \cdot \sphericalangle E_1$.

Q.E.D.

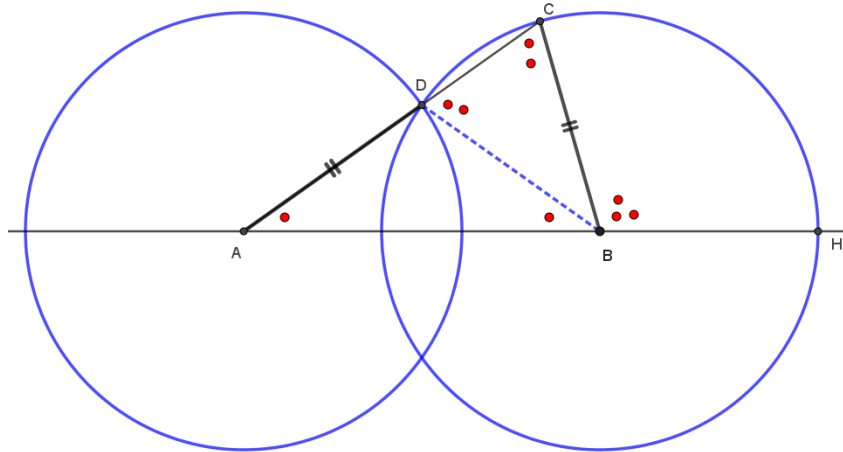


S3.9: Gegeven: Twee congruente cirkels.

Te bewijzen: $\sphericalangle CBH = 3 \cdot \sphericalangle CAH$.

Bewijs: $\triangle ABD$ is gelijkbenig dus te A en B gelijke hoeken. Buitenhoek te D is een hoek in de gelijkbenige $\triangle BDC$. En de hoek CBH is weer een buitenhoek van $\triangle ABC$.

Q.E.D.



Trisectie met de neusimethode van Archimedes. FM

S3.10: Gegeven: Vierkant met drie vierkanten om de diagonaal. $O_a + O_c = O_b$.

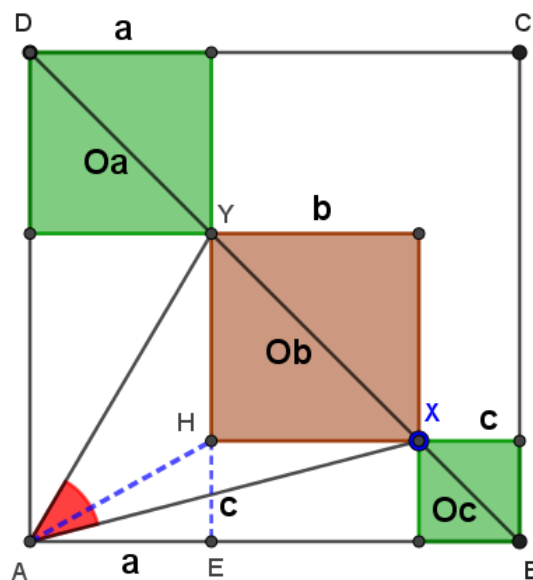
Gevraagd: Grootte hoek XAY.

Oplossing: Er geldt dus voor de oppervlakten: $b^2 = a^2 + c^2$.

$\triangle AEH$ is rechthoekig en daarvoor geldt: $|AH|^2 = a^2 + c^2$. Dus: $|AH| = b$.

A ligt dus op de cirkel door X en Y met middelpunt H en straal b. $\sphericalangle XHY = 90^\circ$.

De gevraagde hoek is een omtrekshoek op koorde XY. Dus: $\sphericalangle XAY = 45^\circ$.



Oplossingen serie S4.x: over concurrentie en collineariteit.

S4.1: Gegeven: Willekeurige driehoek met rechthoeken op de zijden. De rode lijnen staan loodrecht op de verbindingslijnen.

Te bewijzen: De rode lijnen zijn concurrent.

Bewijs:

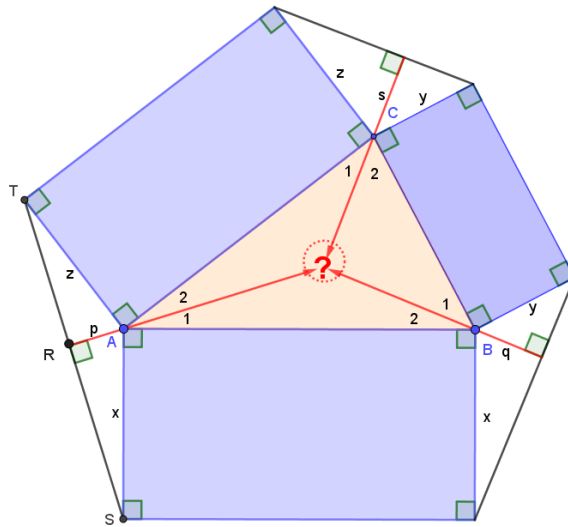
$\sin(\sphericalangle A_1) = \cos(\sphericalangle RAS) = \frac{p}{x}$. Dat is ook bij hoek B en C zo te doen.

Er volgt: $\frac{p}{x} \frac{q}{y} \frac{s}{z} = \frac{p}{z} \frac{q}{x} \frac{s}{y}$

Dus: $\sin(A_1) \sin(B_1) \sin(C_1) = \sin(A_2) \sin(B_2) \sin(C_2)$

Dit is de stelling van Ceva, trigonometrisch geformuleerd, dus de lijnen zijn concurrent.

Q.E.D.



S4.2: Geg: Rechthoekige driehoek met in- en aangeschreven cirkel met drie raakpunten.
Te bewijzen: Die raakpunten liggen op één lijn.

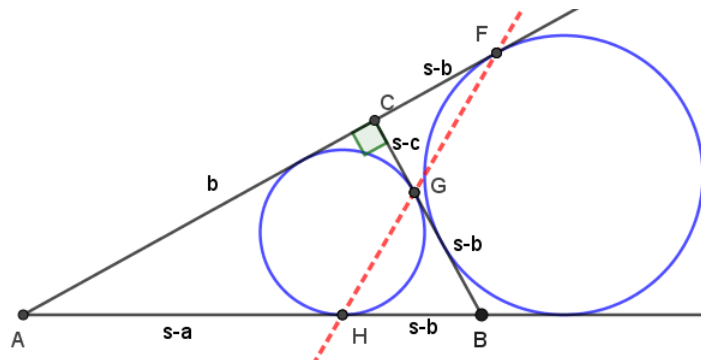
Bewijs: De raaklijnstukken en AC zijn in lengte aangegeven waarbij $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

a, b en c zijn de lengtes van de zijden. De stelling van Menelaos geeft, startend vanuit A:

$\frac{s-a}{s-b} \frac{s-b}{s-c} \frac{s-c}{s} = 1$ dan en slechts dan als $(s-a)(s-b) - s(s-c) = 0$.

Dit uitgeschreven betekent dat er moet gelden: $c^2 - a^2 - b^2 = 0$. En dat is zo.

Q.E.D.



S4.3: Gegeven: Twee vierkanten met omgeschreven cirkels.

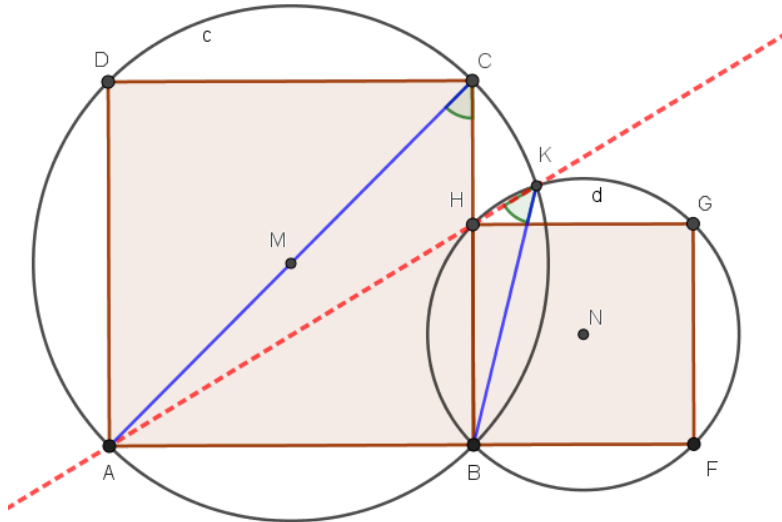
Te bewijzen: A, H en K zijn collineair.

Bewijs: $\angle BCA = \angle BKA = 45^\circ$. Beide zijn omtrekshoeken in cirkel c op koorde AB.

$\angle BKH = 45^\circ$. Dit is een omtrekshoek in cirkel d op koorde HB.

Gevolg: A ligt op verlengde van KH (hoek 45°) dus A, H en K zijn collineair.

Q.E.D.



S4.4: Gegeven: Twee cirkels. Eén middelpunt ligt op de andere cirkel. Een loodlijn halveert deel van een koorde door dat middelpunt.

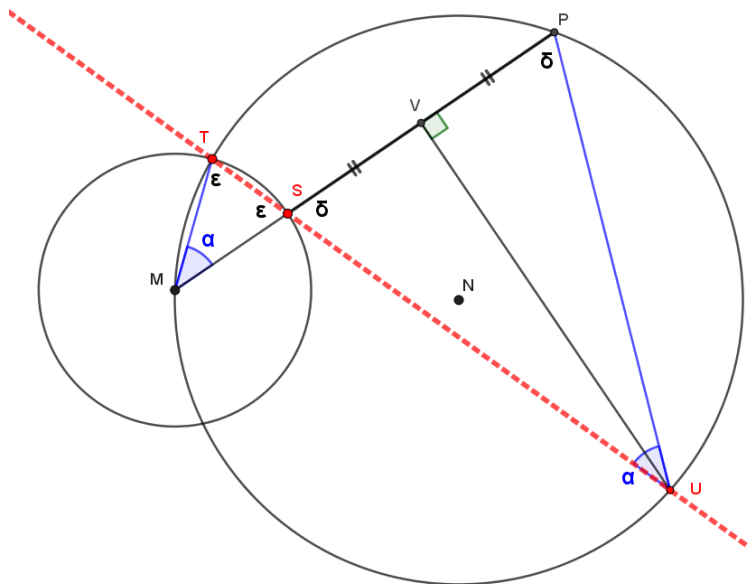
Te bewijzen: S, T en U zijn collineair.

Bewijs: Te M en U zitten even grote omtrekshoeken (α) want allebei op koorde TP.

$\delta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ en $\varepsilon = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$. Dus te S zijn de overstaande hoeken (ε, δ) gelijk.

Blijkbaar liggen SU en ST in elkaars verlengde ofwel S, T en U liggen op één lijn.

Q.E.D.



S4.5: Gegeven: Een regelmatige 12-hoek.

Te bewijzen: De lijnen door TU, PW en RS zijn concurrent.

Bewijs: Noem het snijpunt van de lijnen door TU en RS punt M.

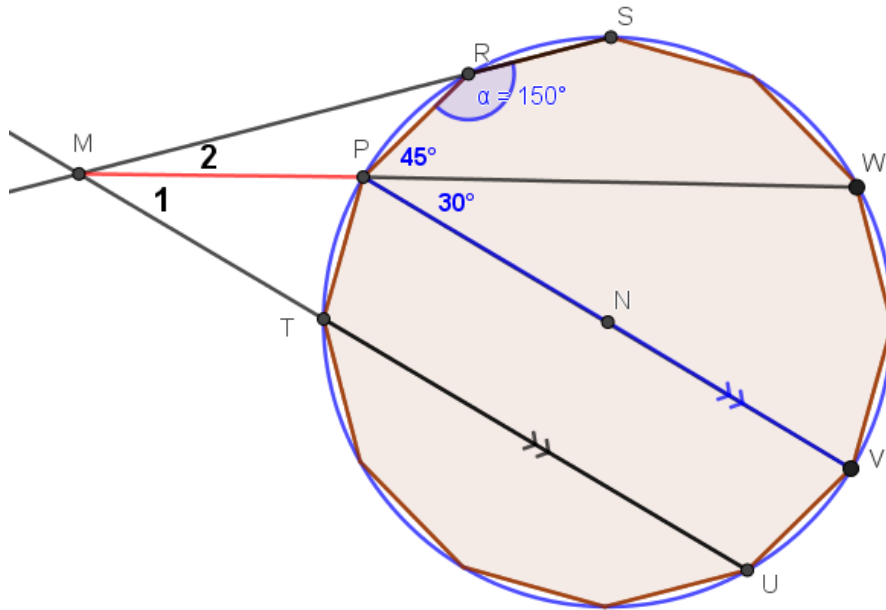
De (blauwe) hoeken in de figuur zijn bekend want dat zijn omtrekshoeken.

Gevolg: $\sphericalangle MRP = 30^\circ$. Dus $\sphericalangle M_2 = 15^\circ$.

$\sphericalangle M_{12} = \frac{1}{2}(\sphericalangle UNS - \sphericalangle RNT) = \frac{1}{2}(150^\circ - 60^\circ) = 45^\circ$. Dit volgt uit de omtrekshoekenstelling.

Dus: $\sphericalangle M_1 = 30^\circ$. Omdat PV evenwijdig is aan MU en te P ook een hoek van 30° zit, volgt uit de F-hoekstelling: M-P-W is een rechte lijn. Ofwel: lijn door PW gaat door M.

Q.E.D.



S4.6: Gegeven: Twee (half)cirkels en een raakcirkel en verder nog raakpunten.

Te bewijzen: Raaklijn aan cirkels k en d te R gaat door A.

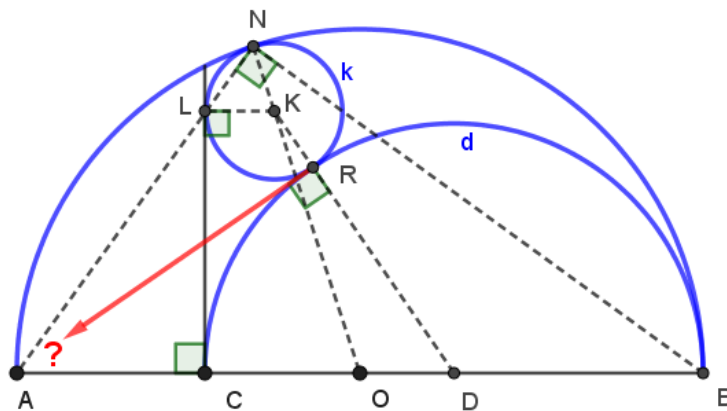
Bewijs: $LK \parallel AO$ dus $\triangle LKN \sim \triangle AON$ (zhz). Gevolg: A, L en N liggen op één lijn.

$\triangle ACL \sim \triangle ANB$ (hh). Gevolg: $AC : AN = AL : AB$. En dus geldt: $|AC| \cdot |AB| = |AL| \cdot |AN|$.

Dit betekent dat punt A dezelfde macht heeft t.o.v. de cirkels k en d.

Dus ligt A op de machtlijn van die twee cirkels en dat is de loodlijn te R op DK.

Q.E.D.



S4.7: Gegeven: Cirkel met twee raaklijnen op een middellijn. Een punt D willekeurig op de cirkel gelegen en daar een raaklijn.

Te bewijzen: E, F en G zijn collineair.

Bewijs: De raaklijn te D snijdt raaklijn te B resp. te A in K resp. in H.

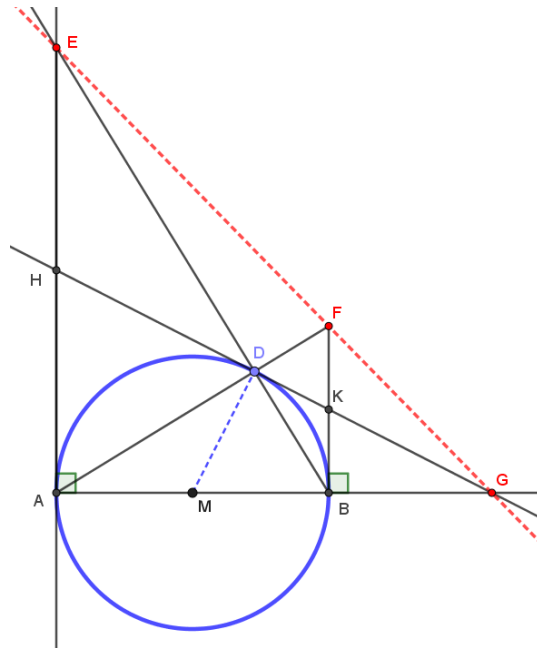
Omdat $\angle BDF = 90^\circ$ en $|BK| = |DK|$ volgt: $|BK| = |KF|$ dus K is het midden van BF.

Analoog geldt dat H het midden is van AE.

Bekijk de rechte lijnvermenigvuldiging vanuit de lijn door A en G met factor 2.

H, K resp. G worden afgebeeld op E, F resp. G. Een lijnvermenigvuldiging beeldt lijnen op lijnen af dus E, F en G liggen op één lijn, het beeld van de lijn door H, K en G.

Q.E.D.



S4.8: Gegeven: Regelmatige zeshoek met op twee diagonalen gelijke stukken afgepast.

Te bewijzen: E, S en P zijn collineair.

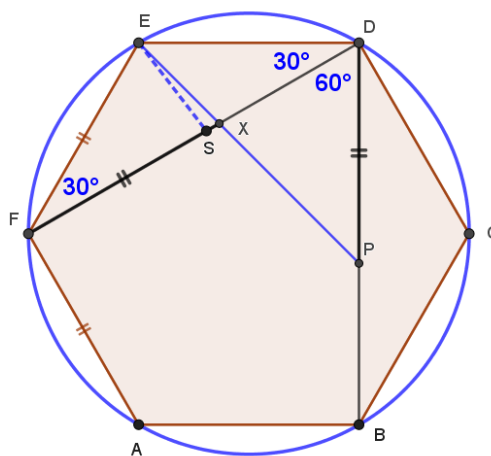
Bewijs: Trek lijn EP. Snijpunt X met lijn DF ontstaat.

De blauwe hoeken zijn bekend want dat zijn omtrekshoeken.

$\triangle DEP$ is gelijkbenig rechthoekig dus $\angle DEP = 45^\circ$. Gevolg: $\angle EXF = 75^\circ$.

$\triangle FSE$ is gelijkbenig dus $\angle ESF = 75^\circ$. Gevolg: $S=X$ en dus ligt S op de lijn door E en P.

Q.E.D.



S4.9: Gegeven: Een vierhoek waarvan de diagonalen elkaar loodrecht snijden. De voetpunten van de loodlijnen uit dat snijpunt op de zijden zijn verbonden.

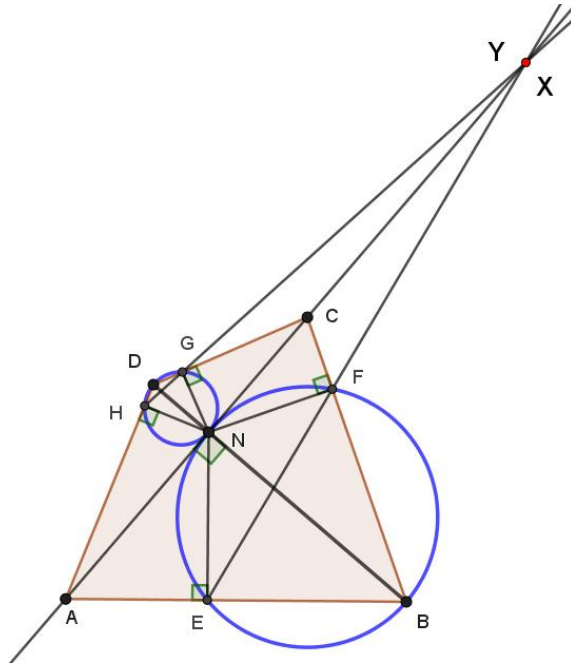
Te bewijzen: Lijnen door AC, EF en HG zijn concurrent.

Bewijs: BFNE is een koordenvierhoek met BN als middellijn (Thales). Voor snijpunt X van de lijn door EF met de raaklijn te N aan de cirkel geldt: $|XN|^2 = |XE| \cdot |XF|$. (macht)

Analoog geldt voor Y op AC en HG t.o.v. de cirkel om GDHN: $|YN|^2 = |YG| \cdot |YH|$.

Maar lijn door AC is de machtslijn van de twee cirkels. Een punt daarop heeft gelijke macht t.o.v. de twee cirkels dus $|XN| = |YN|$ met gevolg: $X = Y$.

Q.E.D.

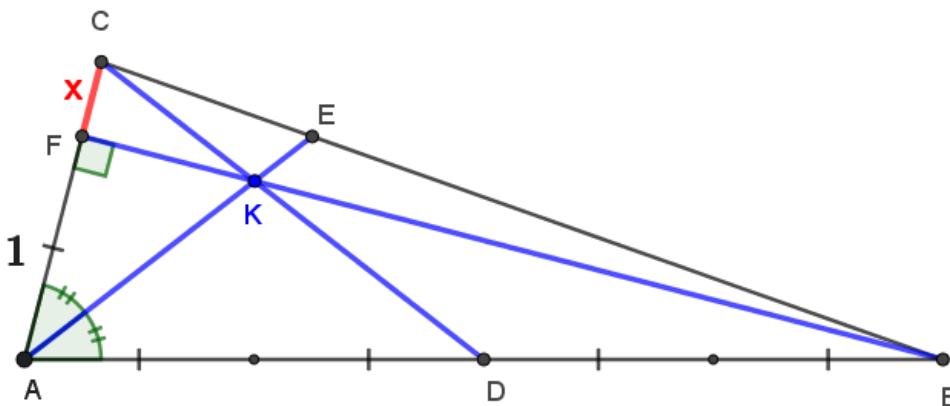


S4.10: Gegeven: Een driehoek waarvan een bissectrice, een hoogtelijn en een zwaartelijijn concurrent zijn. $|AF| = 1$ en $|AB| = 4 \cdot |AF|$.

Gevraagd: Lengte van CF (x).

Oplossing: Er geldt: $\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = 1$ volgens de stelling van Ceva.

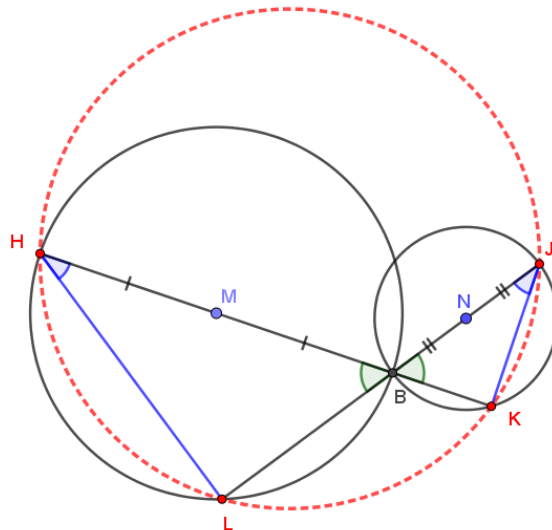
Met de bissectricestelling volgt verder: $\frac{2}{2} \cdot \frac{4}{1+x} \cdot \frac{x}{1} = 1$. Dus: $x = \frac{1}{3}$.



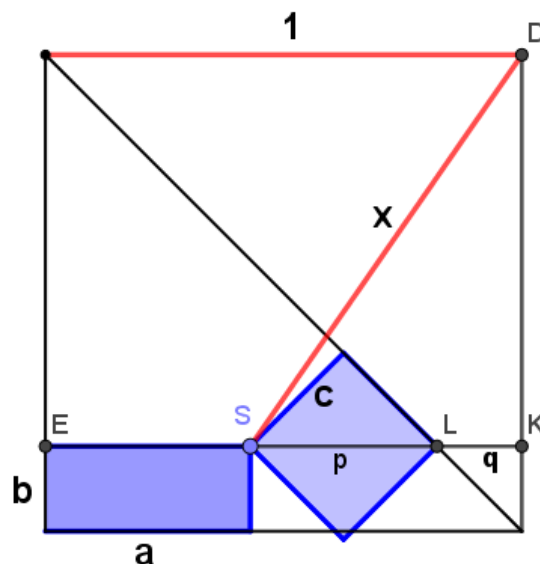
Voorbeeld van een Kletterdriehoek. FM

Oplossingen serie S5.x: divers

S5.1: Gegeven: Cirkels met middelpunten M en N snijden in B. Lijnen door MB en NB.
 Te bewijzen: De snijpunten van die lijnen met de cirkels liggen op een cirkel.
 Bewijs: $\sphericalangle KJB = 90^\circ - \sphericalangle JBK = 90^\circ - \sphericalangle HBL = \sphericalangle LHB$ m.b.v. stelling van Thales.
 Dus vanuit J en H gezien is de omtrekshoek op lijnstuk (koorde) KL even groot.
 J, K, L en H liggen op één cirkel volgens de omtrekshoekenstelling.
 Q.E.D.



S5.2: Geg: Vierkant met daarbinnen rechthoekje en vierkantje van gelijke oppervlakte.
 Te bewijzen: Gemeenschappelijk hoekpunt (S) ligt op een cirkel met middelpunt D.
 Bewijs: $x^2 = (1 - a)^2 + (1 - b)^2 = 2 - 2a - 2b + a^2 + b^2 \dots$ met gewoon Pythagoras.
 $p = 1 - a - q = 1 - a - b$. Dus: $p^2 = 1 - 2a - 2b + a^2 + b^2 + 2ab = x^2 - 1 + 2ab$.
 Maar ook geldt: $p^2 = 2c^2 = 2ab$. Dus: $x^2 = 1$. S ligt blijkbaar op een cirkel met straal 1 en middelpunt D.
 Q.E.D.



Voorbeeld van een 3 lijnenprobleem van Pappus; FM

S5.3: Gegeven: Drie rakende halfcirkels.

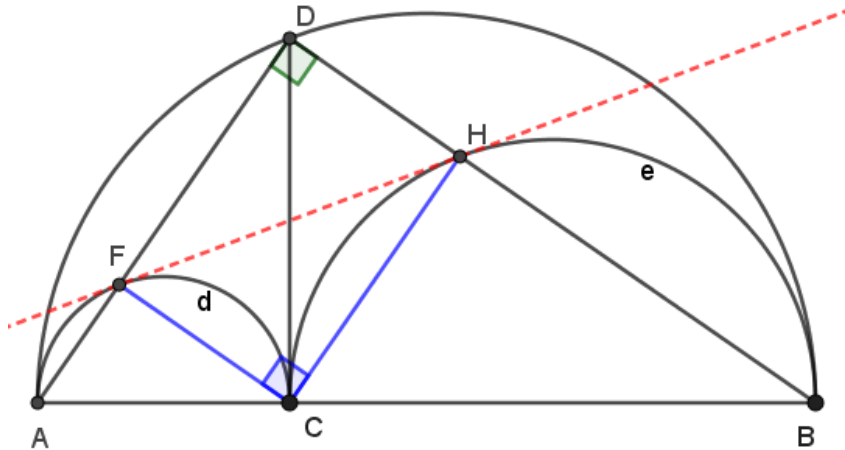
Te bewijzen: Lijn door F en H is een raaklijn.

Bewijs: Blauwe lijnstukken zijn toegevoegd. Omdat $\angle AFC = \angle CHB = 90^\circ$ volgt:

Vierhoek DFCH is een rechthoek. CD en FH zijn diagonalen. $\triangle DCH \cong \triangle FHC$ (ZZZ).

Dus: $\angle DCH = \angle FHC$. Uit de koordenhoekenstelling volgt: FH is net als CD raaklijn aan cirkel e. Analoog is de redenering voor cirkel d.

Q.E.D.



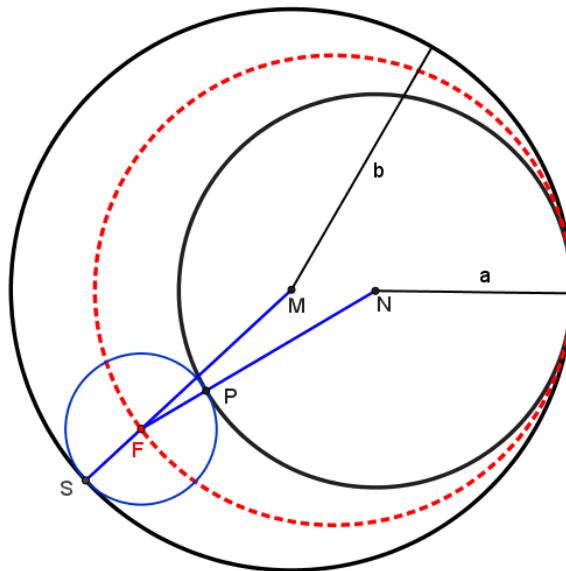
S5.4: Geg: Twee cirkels die elkaar raken. Daartussen ligt een bundel raakcirkels.

Gevraagd: Op welk type kromme ligt het middelpunt van zo'n raakcirkel?

Oplossing: De stralen van de startcirkels zijn a en b. Raakpunten zijn S en P.

Er geldt: $|NF| + |MF| = a + |PF| + b - |SF| = a + b$. Dus constant.

F ligt blijkbaar op een ellips met brandpunten M en N.



S5.5: Gegeven: Cirkel met daarbinnen drie raakcirkels. Punt C is willekeurig op de middellijn gelegen.

Te bewijzen: De drie kleine cirkels zijn even groot.

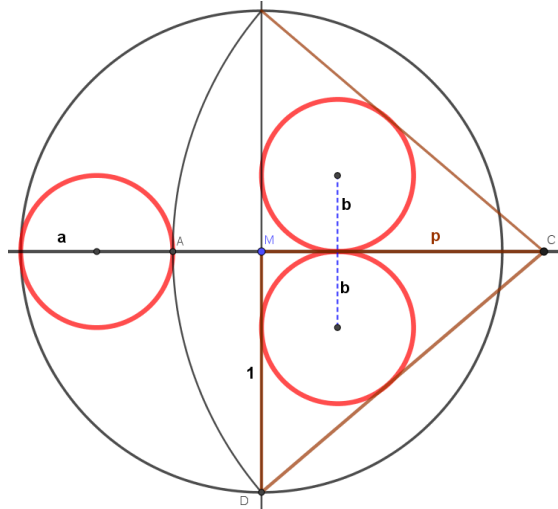
Bewijs: De cirkels boven en onder MC zijn even groot. Dat volgt uit symmetrie. Noem hun straal b. De derde rode cirkel heeft straal a en de startcirkel straal 1. $|MC| = p$.

Er volgt: $|DC| = \sqrt{1+p^2}$. Dus: $a = \frac{1}{2}(1+p - \sqrt{1+p^2})$.

Oppervlakte ΔMCD : $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot p = b \cdot \frac{1}{2}(1+p + \sqrt{1+p^2}) = b \cdot s \dots$ met s de halve omtrek.

Dus: $b = \frac{p}{1+p+\sqrt{1+p^2}} = \frac{p(1+p-\sqrt{1+p^2})}{(1+p)^2-(1+p^2)} = \frac{1}{2}(1+p - \sqrt{1+p^2})$.

Q.E.D.



S5.6: Gegeven: Driehoek met vanuit D rondgaand vijf evenwijdige lijnen aan de zijden.

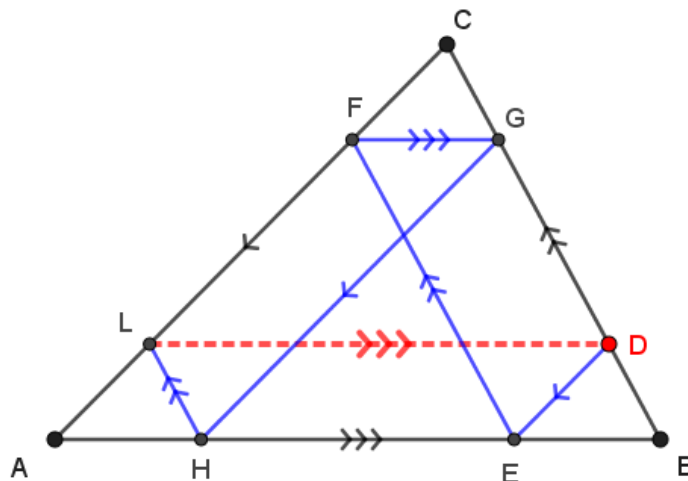
Te bewijzen: LD evenwijdig aan AB.

Bewijs: DEFG is een parallellogram dus $|DE| = |FC|$. En vanwege evenwijdige lijnen en de bijbehorende F-hoeken volgt: $\Delta BDE \cong \Delta GCF$ (HZH) dus: $|GC| = |BD|$.

CGHL is een parallellogram dus $|GC| = |HL|$ en bijgevolg: HL en BD zijn even lang (en evenwijdig).

Blijkbaar is BHLD een parallellogram dus LD is evenwijdig aan AB.

Q.E.D.



S5.7: Gegeven: Koordenvierhoek met vier bissectrices.

Te bewijzen: Punten D, K, L en C liggen op één cirkel.

Bewijs: K is snijpunt van twee buitenbissectrices van $\triangle ADE$ dus EK is een bissectrice.

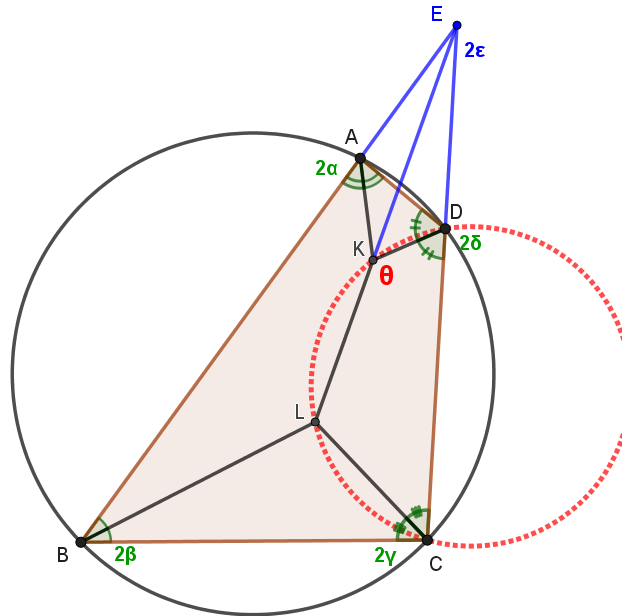
Er volgt: $2\varepsilon = 2\alpha + 2\delta - 180^\circ$. L is snijpunt van twee binnenbissectrices van $\triangle BCE$.

In $\triangle BCE$ is EL dus ook een bissectrice. Gevolg: E, K en L zijn collineair.

$\theta + \gamma = (\varepsilon + 180^\circ - \delta) + \gamma = (\alpha + \delta - 90^\circ) + 180^\circ - \delta + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ$.

Hoekensom overstaande hoeken is 180° en DKLC is dus een koordenvierhoek.

Q.E.D.



S5.8: Geg: Een willekeurige vierhoek met de middens van overstaande zijden verbonden.

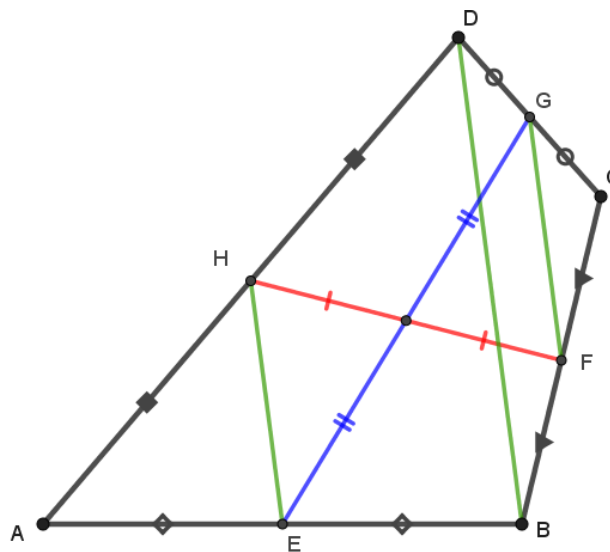
Te bewijzen: De lijnstukken FH en EG delen elkaar middendoor.

Bewijs: EH is een middenparallel in $\triangle ABD$ dus: $|EH| = \frac{1}{2}|BD|$ en $EH \parallel BD$.

Analoog geldt dat voor DF in $\triangle BCD$.

Dus: EFGH is een parallellogram en de diagonalen daarvan delen elkaar middendoor.

Q.E.D.



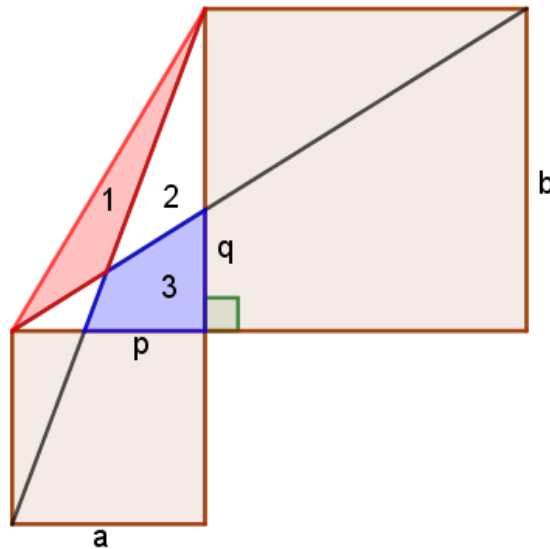
S5.9: Gegeven: Rechthoekige driehoek met twee vierkanten.

Te bewijzen: Oppervlakte gebied 1 = oppervlakte gebied 3.

Bewijs: $O2 + O3 = \frac{1}{2}b \cdot p = \frac{1}{2}b \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2} \frac{ab^2}{a+b}$.

$O2 + O1 = \frac{1}{2}a \cdot (b - q) = \frac{1}{2}a \cdot \left(b - \frac{ab}{a+b}\right) = \frac{1}{2} \frac{ab^2}{a+b}$. Dus: $O1 = O3$.

Q.E.D.



S5.10: Gegeven: Een driehoek met twee gelijkzijdige driehoeken op twee zijden. F, G resp. H zijn middens van DE, AC resp. BC

Te bewijzen: $\triangle FGH$ is gelijkzijdig.

Bewijs: Bekijk afbeelding $k = F_C, \frac{1}{2} \circ D_C, 60^\circ \circ F_D, 2$ en volg punt F. $k: F \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow G$.

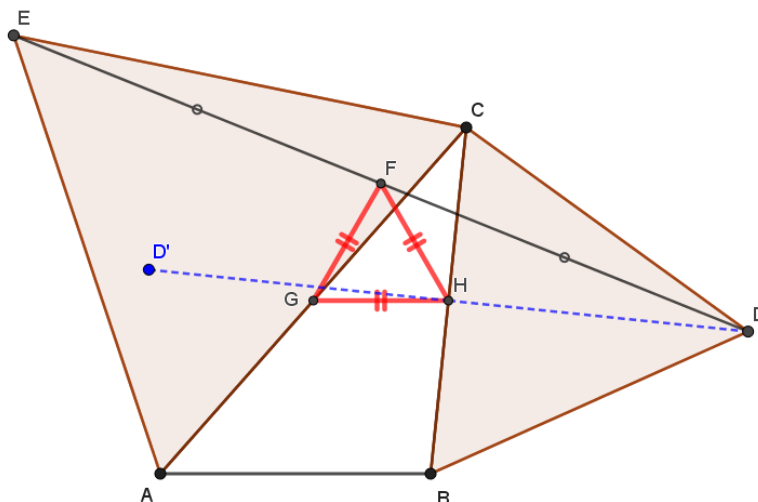
k is een congruentieafbeelding (factor=1) met draaihoek dus $k = D_X, 60^\circ$.

Volg nu punt H. $k: H \rightarrow D' \rightarrow B \rightarrow H$. D' is de gespiegelde van D in BC.

Blijkbaar is H invariant onder k dus $X=H$ en dus geldt: $|HG| = |HF|$ en $\sphericalangle GHF = 60^\circ$.

Gevolg: $\triangle FGH$ is gelijkbenig met een tophoek van 60° dus gelijkzijdig.

Q.E.D.



Achtergrond.

De term *Sangaku* verwijst naar *Ema*, een soort offerplankjes, waarop wiskundige problemen werden geschreven en die bij altaren en bij tempels in Japan werden opgehangen. De gewoonte om zulke offers te plaatsen begon rond 1660, tijdens de Edo-periode (1603-1867). Dit werd gedaan als dank aan de goden dat men wiskundige problemen kon oplossen en als vorm van gebed om zich meer met studie bezig te kunnen houden.

Tempels waren centra voor ontmoeting en gesprek voor gewone mensen, maar ook de plaatsen waar men aan elkaar prestaties kon laten zien. Problemen zonder antwoorden werden *Idai* genoemd. Tegenwoordig bestaan er nog ongeveer 1000 (originele) *Sangaku*.

De gewoonte om *Sangaku* te offeren wordt als een uniek aspect van de Japanse cultuur beschouwd. Het ontstaan kan mogelijk begrepen worden door het in die tijd te bezien: de wiskundige cultuur van de Edo-periode was zeer geavanceerd en ging van wiskundige spellen tot volwaardige wiskunde. [Boeken over astronomie, fysica, wiskunde waren verboden door de Shogun in die tijd. FM]

Na deze periode kwam in Japan een omslag naar westerse wiskunde.

Bron: Makishita, H. (2011). Solving Problems from Sangaku with Technology - For Good Mathematics in Education – in *The Bulletin of the Graduate School of Education of Waseda University, Separate Volume, 19*.



Een voorbeeld uit het artikel met hieronder de kale 'vertaling'.

